

Sur les méthodes en géométrie élémentaire

Exemple déduit du cercle des neuf points

Dans les divers examens ou concours, Baccalauréat, Licence, Grandes Ecoles, voire même Agrégation, beaucoup de copies de géométrie semblent attacher plus de prix à la découverte du résultat qu'à la méthode ; l'argot scolaire emploie les mots : *truc*, *astuce*, *ficelle*, qui correspondent à une exagération de l'ingéniosité au détriment de la faculté de raisonnement. Pourtant, au lieu que l'ingéniosité cherche à supplanter le raisonnement, il est désirable que le raisonnement intervienne pour développer l'ingéniosité. Bien que cette remarque ne soit pas neuve, puis-je, sur un exemple simple, tel que celui du cercle des neuf points, montrer comment un raisonnement à priori permet, avant même tout tracé de figure, de trouver une méthode simple ?

(1) En général un module de points non type constitue soit un ensemble partout dense dans le plan soit un ensemble dense seulement sur des droites parallèles et équidistantes.

Sur les neuf points en jeu, il y a évidemment trois points attachés à chaque sommet A, B ou C ; au sommet A correspondent les pieds A', a de la médiane et hauteur issues de A, et le milieu a' du segment AH (H, orthocentre). Il est donc naturel de chercher à prouver que le centre P du cercle circonscrit à A' a a', ne dépend pas du choix particulier du sommet A, B, C, non plus que le rayon.

Or A' a a' est triangle rectangle ; P est le milieu de l'hypoténuse a'A' ; O étant le centre du cercle circonscrit à ABC, les triangles OA'B' et HAB sont semblables dans le rapport de 1 à 2 (côtés parallèles et de sens contraire) ; OA', Aa', a'H sont des segments égaux, parallèles et de même sens ; A'a' = OA = R, rayon du cercle circonscrit à ABC (côtés opposés d'un parallélogramme) ; A'a' et OH se coupent en leur milieu P (diagonales d'un parallélogramme). La conclusion est immédiate : les neuf points sont sur le cercle de rayon $\frac{R}{2}$ ayant son centre au milieu de OH. Le cercle circonscrit à ABC et

le cercle des neuf points admettent les rayons parallèles et de même sens OA et Pa', les rayons parallèles et de sens contraire OA et PA' ; on en déduit le centre de similitude externe H, puis le centre de similitude interne G au croisement de la droite OPH avec AA', au tiers de AA' à partir de A' ; donc G est le centre de gravité de ABC.

B. GAMBIER,

Professeur à la Faculté des Sciences de Lille