
DEUXIÈME PARTIE

Géométrie des Nombres

Sur la demande de l'Ecole des Hautes-Etudes de Bruxelles, M. CHATELET, recteur de l'Académie de Lille, professeur honoraire à la Faculté des Sciences, fit en décembre 1924 deux conférences sur la géométrie des nombres. J'ai cru intéresser mes collègues en leur donnant dans ce *Bulletin* quelques notes que j'ai prises au cours de la première. Les figures sont la reproduction des dessins en couleur sur tableau noir qui ont servi à illustrer l'exposition.

M. ROUSSEAU,
Professeur au Lycée de Lille.

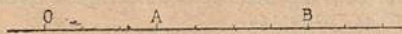
I. Modules de nombres

Interprétation géométrique de notions arithmétiques courantes

1. — On dit que deux longueurs sont commensurables quand il existe une troisième longueur contenue un nombre entier de fois dans chacune d'elles.

Portons sur une droite à partir d'un point O les deux longueurs OA et OB et soit Ou la troisième longueur. En portant bout à bout des segments égaux à Ou à partir de O , on obtient un réseau de points équidistants et dans la suite de ces points on rencontre nécessairement A et B . Ceci est vrai, que OA et OB soient de même sens ou de sens différents. Par suite :

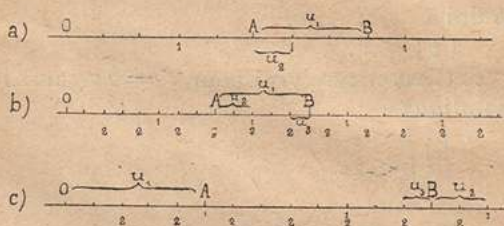
La condition nécessaire et suffisante pour que OA et OB soient commensurables est qu'il existe un réseau de points équidistants comprenant O , A et B .



Pratiquement, comment reconnaître que OA et OB sont commensurables, ou ce qui revient au même, appartiennent à un même réseau de points équidistants ?

Supposons OA et OB commensurables, OA plus petit que OB.

Le point A divise OB en deux segments dont l'un u_1 au plus égal à la moitié de OB contient la commune mesure un nombre entier de fois. Portons bout à bout des segments égaux à u_1 . Tous les points obtenus appartiendront au réseau. Si parmi eux se trouvent A et B la vérification est faite. Sinon A et B divisent les intervalles qui les contiennent



respectivement en deux segments dont l'un est au plus égal à la moitié de l'intervalle total. Soit u_2 le plus petit. Il contient la commune mesure un nombre entier de fois. Portons bout à bout des segments égaux

à u_2 (1). Tous les points obtenus appartiendront au réseau. Si, parmi eux se trouvent A et B la vérification est faite..., etc.

L'opération se continuera jusqu'à ce qu'on trouve A et B; il en sera ainsi nécessairement, parce que les segments u_1, u_2, \dots dont chacun est au plus égal à la moitié du précédent décroissent indéfiniment et ne peuvent pas devenir plus petits que la commune mesure que l'on a supposée exister.

Ainsi, quand l'opération que l'on vient de décrire se termine, OA et OB sont commensurables; sinon ils sont incommensurables et réciproquement.

2. — Nous allons essayer de traduire cette méthode de recherche par l'énoncé d'une propriété; nous donnerons d'abord deux définitions.

1. — Nous appellerons *module* de nombres un ensemble de nombres renfermant la somme et la différence de deux quelconques d'entre eux.

Si un module renferme des nombres a, a', a'', \dots il renfermera tous les nombres

$$\xi = ua + va' + wa'' + \dots$$

u, v, w, \dots désignant des nombres *entiers* quelconques positifs ou négatifs.

2. — Un module est *type* s'il est constitué par tous les multiples η d'un même nombre a :

$$\eta = ua$$

u étant un entier quelconque.

Tous les points η portés sur une droite constituent un réseau de points équidistants et réciproquement un réseau de points équidistants est un module type. On a alors la propriété suivante :

Pour qu'un module de nombres

$$\xi = ua + va' + wa'' + \dots$$

(1) Si un point, A, par exemple, appartient au réseau, on ne s'occupe que de B. — Voir la figure 2 (b).

soit type, il faut et il suffit qu'il n'y ait qu'un nombre fini de nombres ξ inférieurs, en valeur absolue, à un nombre donné positif ε :

$$|\xi| < \varepsilon.$$

La condition s'exprime encore en disant qu'il n'y a qu'un nombre fini de points du module dans un intervalle $x'ox$ symétrique par rapport à l'origine. Il est évident que cela est nécessaire.

Pour établir que c'est suffisant montrons d'abord que, s'il n'y a qu'un nombre fini de solutions à

$$|\xi| < \varepsilon,$$

il n'y a aussi qu'un nombre fini à

$$|\xi| < \varepsilon'.$$

C'est bien évident si $\varepsilon' < \varepsilon$. C'est encore vrai pour $\varepsilon' = 2\varepsilon$ car s'il y avait un nombre fini de solutions à

$$|\xi| < \varepsilon$$

et infini à

$$|\xi| < 2\varepsilon$$

il y en aurait une infinité à

$$\varepsilon < \xi < 2\varepsilon \quad \text{ou} \quad -\varepsilon > \xi > -2\varepsilon.$$

Leurs différences avec l'une d'elles $\delta = \xi - \xi_0$, seraient en nombre infini, inférieures en valeur absolue à ε et appartiendraient au module, ce qui est contraire à l'hypothèse.

La démonstration s'étend à $4\varepsilon, 8\varepsilon, \dots, 2n\varepsilon$, c'est-à-dire à tout nombre donné.

Soit un module tel qu'il n'y ait qu'un nombre fini de solutions à

$$0 < \xi < \varepsilon.$$

Prenons ε assez grand pour qu'il existe des solutions, et choisissons la plus petite, soit ω . Tout nombre ξ du module est multiple de ω ; sinon il serait enserré entre deux multiples de ω :

$$u\omega < \xi < (u+1)\omega.$$

Mais le nombre

$$\varphi = \xi - u\omega$$

appartiendrait au module et se trouverait être inférieur à ω , ce qui est absurde.

— Dans un module type $x\omega$, on dit que ω est la *base* ; s'il est engendré à partir de plusieurs nombres a, a', a'', \dots on dit que ces nombres constituent une *base surabondante*.

— Remarquons que nous avons donné au mot module le même sens que lorsqu'on dit a défini *module* 8, ou x défini *module* π . Module 8 ou module π est l'ensemble des multiples de 8 ou de π ,

Exemples et applications de modules types

1. — *P. G. C. D.* — Considérons plusieurs nombres entiers a, a', a'', \dots . Le module qu'ils définissent est l'ensemble des nombres $\xi = ua + va' + wa'' + \dots$ (u, v, w, \dots entiers quelconques). Tous les nombres ξ sont entiers. Il y en a donc un nombre fini inférieurs en module à un nombre a : $|\xi| < a$.

Donc le module est type et tous ces nombres sont donnés par la formule :

$$\xi = x.d \quad (x \text{ entier quelconque})$$

d est un diviseur de a puisque a est un nombre ξ , c'est aussi un diviseur de a', a'', \dots . Mais d est lui-même un nombre ξ , c'est dire qu'il existe des entiers u_0, v_0, w_0, \dots tels que

$$d = u_0 a + v_0 a' + w_0 a'' + \dots$$

On en conclut que tout diviseur commun à a, a', a'', \dots divise d , puisque tout diviseur de plusieurs nombres divise une somme algébrique de multiples de ces nombres. Par suite :

- 1° d est le plus grand des diviseurs communs à a, a', a'', \dots ;
- 2° Il est divisible par tous les autres diviseurs communs ;
- 3° Il peut être construit par addition et soustraction à partir de a, a', a'', \dots

Ce sont les propriétés fondamentales que l'on trouve dans tous les traités élémentaires d'arithmétique.

Voyons sur un exemple comment il est possible par ce procédé de calculer le p. g. c. d. Soient $a = 5, a' = 13$. Ils définissent le module :

$$\xi = x.5 + y.13.$$

A partir de O (fig. 2, b) portons les multiples de OA ou de 5. Il y en a deux qui enserront B: 10 et 15. Le plus proche est 15, sa différence 2 avec 13 est un nombre du module

$$2 = 3 \times (5) - 1 \times (13).$$

Portons les multiples de 2. Ceux qui enserront A sont 4 et 6 dont la différence 1 avec 5 appartient au module (qui comprend ainsi tous les nombres entiers). On a :

$$1 = 1 \times (5) - 2(2) = 1 \times (5) - 2[3 \times (5) - 1(13)] = 2 \times (13) - 5 \times (5).$$

On voit que ce procédé est identique à celui des divisions successives où l'on prendrait les restes minima en valeur absolue.

2. — P. P. M. C. — Soient encore les nombres entiers a, a', a'', \dots et tous les nombres entiers positifs ou négatifs *divisibles* à la fois par a, a', a'', \dots c'est-à-dire multiples communs de a, a', a'', \dots . L'ensemble de tous ces multiples est un module puisque la somme ou la différence de deux d'entre eux en fait partie. Ce module renferme le produit $aa'a'' \dots$; il y a un nombre fini de solutions à

$$|\mu| < aa'a'' \dots ;$$

donc le module est type et ses nombres sont donnés par la formule

$$\mu = nm, \quad n \text{ entier quelconque}$$

m est un multiple commun déterminé de $a, a', a'' \dots$ puisqu'il appartient au module, il divise tout autre multiple commun ; c'est le plus petit de ces multiples. On peut déduire de là les relations entre le p. g. c. d. et le p. p. m. c.

3. — Fractions. — Ces démonstrations s'appliquent toujours si a, a', a'' sont des fractions en nombre fini, parce que, avec cette restriction, les éléments des modules que l'on a considérés sont des fractions dont, le dénominateur est limité supérieurement.

Exemples et applications de modules non types

1. — Envisageons maintenant un module *non type* constitué avec deux nombres incommensurables α, α' ; formons

$$\xi = u\alpha + v\alpha'$$

Quel que soit ε positif, il y a un nombre ω du module tel que

$$|\omega| < \varepsilon.$$

Si A est un nombre quelconque comme $n\omega$ appartient au module, on peut choisir n de façon que

$$|A - n\omega| < |\omega| < \varepsilon$$

c'est-à-dire qu'il y a des points du module aussi voisins qu'on veut de tout nombre A . Les points du module forment un ensemble *partout dense* sur la droite.

2. — Soit $\alpha = x$ irrationnel et $\alpha' = -1$ définissant le module :

$$\xi = ux - v \quad u, v \text{ entiers quelconques ;}$$

on peut trouver u et v tels que

$$|ux - v| < \varepsilon \quad \text{ou} \quad \left| x - \frac{v}{u} \right| < \frac{\varepsilon}{|u|}$$

c'est-à-dire qu'on peut trouver une infinité de fractions $\frac{v}{u}$ s'approchant d'un nombre irrationnel donné de moins de $\frac{\varepsilon}{|u|}$.

C'est un cas particulier d'une propriété trouvée primitivement dans la théorie des fractions continues et que LEJEUNE-DIRICHLET a établie par un raisonnement direct en montrant en même temps qu'on peut approcher de x de moins de $\frac{1}{u^2}$.

3. — Considérons x comme l'abscisse curviligne d'un point sur une circonférence dont la longueur est prise pour unité. Les nombres

$$ux - v$$

sont alors les abscisses des sommets de la ligne brisée régulière d'angle au centre α .

Si on porte

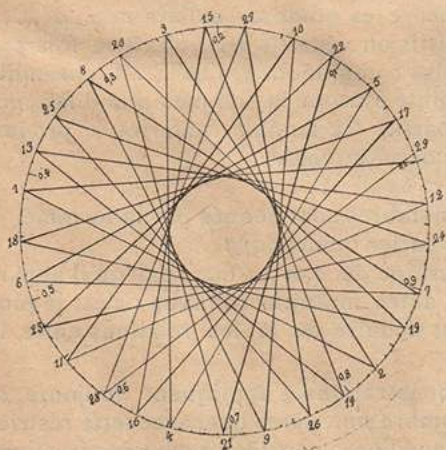
$$\alpha, 2\alpha, 3\alpha, 4\alpha,$$

on obtient des arcs dont la plus petite mesure positive est $(ux - v)$ v étant la partie entière par défaut de ux .

Si α est irrationnel, la ligne brisée ne se ferme pas. Quel que soit ε on peut trouver u et v tels que

$$\omega = |ux - v| < \varepsilon.$$

Il y a, par suite, un sommet du polygone aussi proche qu'on veut de l'origine. Comme $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$ correspondent à des



sommets distants entre eux d'au plus ε , il y a des sommets aussi rapprochés qu'on le veut les uns des autres. Ils forment un ensemble *partout dense* sur le cercle.

4. — Soit $f(x)$ une fonction de la variable réelle x , définie et continue pour toute valeur de x , admettant pour périodes a et b , c'est-à-dire telle que

$$f(x+a) = f(x). \quad f(x+b) = f(x).$$

en général

$$f(x+ua+vb) = f(x), \quad u \text{ et } v \text{ entiers quelconques.}$$

Les périodes appartiennent donc à un module qui, nécessairement, est type ; sinon, étant donné x quelconque, on pourrait trouver un nombre z du module tel que

$$|x - z| < \eta$$

et $|f(x) - f(z)| < \varepsilon$ ε donné.

Mais z étant une période

$$f(z) = f(o)$$

donc l'on aurait

$$|f(x) - f(o)| < \varepsilon$$

quel que soit ε et $f(x)$ serait constant.

Si une fonction continue d'une variable réelle admet deux périodes, le rapport de ces périodes est un nombre rationnel.

II. Modules de points (dans un plan)

1. — Considérons dans un plan un point O pris pour origine. Nous appellerons *somme* de deux points A et B le point C extrémité de la diagonale du parallélogramme construit sur OA et OB et nous écrirons

$$C = A + B.$$

En réalité, c'est une abréviation de l'égalité vectorielle :

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}.$$

L'origine O joue un rôle essentiel dans la définition de même que dans la représentation des nombres par des points d'une droite.

On voit immédiatement ce qu'il faut entendre par la différence D des points B et A ,

$$D = B - A;$$

c'est le point D défini par l'égalité vectorielle

$$\vec{OD} = \vec{OB} - \vec{OA}.$$

En prenant deux axes quelconques Ox , Oy issus de O , aux points A , B , C , D , ... on fait correspondre des couples de nombres (abscisse et ordonnée)

$$\left. \begin{matrix} x_A \\ y_A \end{matrix} \right\} \text{ pour } A, \quad \left. \begin{matrix} x_B \\ y_B \end{matrix} \right\} \text{ pour } B, \dots$$

A la somme ou la différence de deux points correspond la somme ou la différence des nombres correspondants :

$$\left\{ \begin{matrix} x_C = x_A + x_B \\ y_C = y_A + y_B \end{matrix} \right. \quad C = A + B \quad \left\{ \begin{matrix} x_D = x_B - x_A \\ y_D = y_B - y_A \end{matrix} \right. \quad D = B - A.$$

L'arithmétique des points comme nous venons de la définir est donc identique à l'arithmétique des systèmes de 2 nombres.

L'utilisation de la géométrie de l'espace conduit à l'arithmétique des systèmes de 3 nombres. L'arithmétique des espaces à n dimensions conduit à l'arithmétique des systèmes de n nombres.

Les notions de somme et différence de points étant précisées, nous allons appliquer aux points les raisonnements faits plus haut pour les nombres.

2. — Nous dirons qu'un ensemble de points forme un module s'il contient la somme ou la différence de deux quelconques d'entre eux.

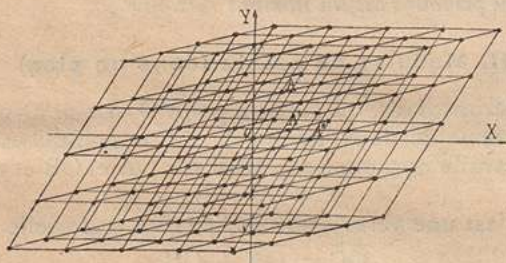
Si un module renferme les points A, A', A'', \dots il renferme tous les points

$$M = uA + vA' + wA'' + \dots \quad (u, v, w, \dots \text{ entiers})$$

dont les coordonnées par rapport à deux axes quelconques sont

$$\begin{cases} x = ua + va' + wa'' + \dots \\ y = ub + vb' + wb'' + \dots \end{cases}$$

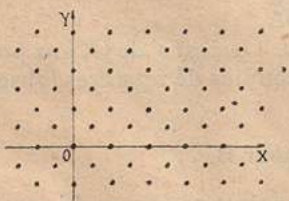
Sur la figure est esquissé un exemple de module construit à partir de 3 points $A(3,5), A'(4,1), A''(6,0)$. On n'en a représenté qu'un petit nombre de points, obtenus en donnant aux entiers u, v, w les valeurs $0 \pm 1 \pm 2$.



Si l'on part d'un seul point A , ses multiples uA constituent un réseau de points équidistants sur une droite.

Si on prend deux points A et A' on obtient les sommets d'un réseau de parallélogrammes répartis sur tout le plan.

Les figures en donnent deux exemples.



Module type : $\begin{matrix} X = 2x + y \\ Y = 2y \end{matrix}$



Module type : le quinconce

3. — Nous dirons qu'un module est type s'il est constitué par les sommets d'un réseau de parallélogrammes, c'est-à-dire s'il peut être engendré uniquement à partir de deux de ses points.

Tous ses points sont donnés par la formule

$$M = uB + vB' \quad (u, v, \text{ entiers quelconques})$$

B et B' étant convenablement choisis.

Théorème. — La condition nécessaire et suffisante pour qu'un module de points

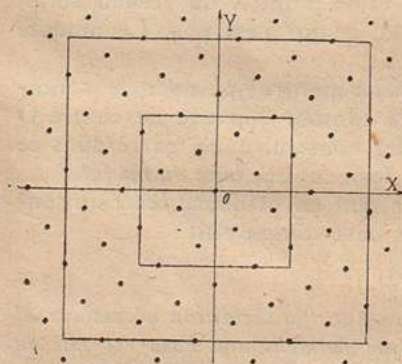
$$M = uA + vA' + wA'' + \dots \quad (u, v, w, \text{ entiers quelconques})$$

soit type est qu'il n'y ait qu'un nombre fini de ses points M dont les coordonnées x, y vérifient les inégalités.

$$\begin{cases} |x| \leq \varepsilon \\ |y| \leq \varepsilon \end{cases} \quad \varepsilon \text{ étant donné.}$$

La condition s'exprime également en disant qu'il n'y a qu'un nombre fini de points M dans un carré de centre O, de côtés égaux à 2ε , parallèles aux axes. Il est évident qu'elle est nécessaire.

Montrons que si les deux relations de condition ont un nombre fini



de solutions, elles ont aussi un nombre fini de solutions pour une nouvelle valeur ε' de ε . C'est évident pour $\varepsilon' < \varepsilon$. Considérons $\varepsilon' = 2\varepsilon$; s'il y avait une infinité de solutions aux inégalités

$$|x| \leq 2\varepsilon \quad |y| \leq 2\varepsilon$$

il y en aurait une infinité dans au moins un des 16 carrés partiels de côtés ε .

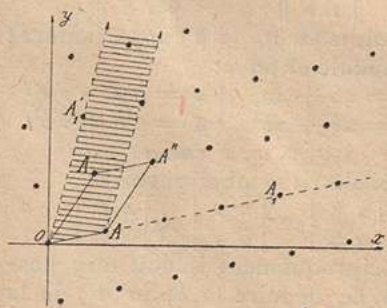
Mais si $M_0(x_0, y_0)$ est un point déterminé et M(x, y) un point quelconque du module contenu dans ce carré partiel on a

$$\begin{cases} |x - x_0| \leq \varepsilon \\ |y - y_0| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Les points $M - M_0$ sont des points du module; ils se trouvent dans le carré primitif de côté 2ε , et y seraient en nombre infini, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Le raisonnement s'étend à $4\varepsilon, 8\varepsilon, 2n\varepsilon$, c'est-à-dire à tout le plan.

Démontrons maintenant que la condition est suffisante. Soient A_1



et A_1' deux points du réseau et choisissons ε assez grand pour que le carré de côté 2ε les contienne. Dans ce carré il y a un nombre fini de points du module. Sur OA_1 prenons le point A du module le plus rapproché de O. (Ce peut être A_1 lui-même). Sur la droite OA_1 tous les points du module sont multiples de A : c'est une conséquence des propriétés des modules de nombres.

Formons ensuite la demi-bande

de base OA, dont les bords sont les demi-droites parallèles et de même sens OA', Au. Dans cette bande, bords compris, prenons le point A', dont la distance à OA comptée parallèlement à OA', est minima. De cette construction il résulte que :

Le parallélogramme OAA'A' construit sur OA et OA' ne contient aucun point du module à son intérieur, ni sur les côtés.

Il n'y en a pas sur les côtés parallèles OA' et AA'', sinon le point A' aurait été mal choisi. Il n'y en a pas non plus sur A'A'', sinon A ne serait pas le point le plus rapproché de O sur OA.

Construisons le réseau de points

$$uA + vA'$$

Les sommets sont dans le module et il contient le module tout entier, car si un point X' du module n'appartenait pas au réseau, il serait à l'intérieur ou sur les côtés d'un parallélogramme déduit du premier OAA'A' par une translation, et un point X du réseau serait à l'intérieur ou sur les côtés de OAA'A' ce qui n'est pas. Le module type est donc construit à partir de A, A'.

La première partie de la démonstration montre que dans la condition on peut remplacer le carré par un contour convexe de centre O entourant l'origine. On peut en effet construire un carré dans ce contour. On dit que les points A et A' forment une *base du module*.

On indique parfois cette base en mettant en évidence les coordonnées a, b et a', b' des deux points de la base comme suit

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

La démonstration précédente montre que : *la condition nécessaire et suffisante pour que deux points du module forment une base est que le parallélogramme correspondant ne contienne aucun point à son intérieur ni sur ses côtés.*

Il peut d'ailleurs y avoir plusieurs bases comme le montre la figure et ces bases sont évidemment liées entre elles.

Si deux bases sont définies respectivement par

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$$

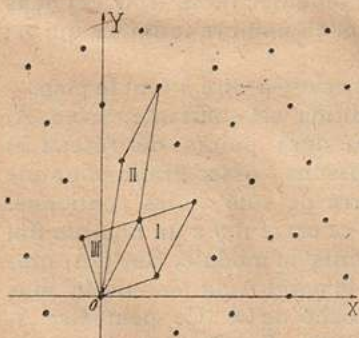
les points (x, y), (x', y') appartiennent au module et on a :

$$\begin{cases} x = ua + va, & \begin{cases} x' = u'a + v'a \\ y' = u'b + v'b' \end{cases} \\ y = ub + vb', & \end{cases}$$

u, v, u', v' entiers

ce qui s'écrit symboliquement

$$\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$



$$\text{I} \begin{cases} X = 3x + 2y \\ Y = x + 4y \end{cases} \quad \text{II} \begin{cases} X = 2x + y \\ Y = 4x + 7y \end{cases} \quad \text{III} \begin{cases} X = 3x - y \\ Y = x + 3y \end{cases}$$

Réciproquement il doit être possible de déduire (a, b) (a', b') de la

deuxième base, c'est-à-dire de résoudre les deux équations en a, a' et

les deux équations en b, b' et d'obtenir des combinaisons à coefficients entiers. Il faut donc d'abord que

$$uv' - vu' \neq 0.$$

En outre les coefficients U, V, U', V' des relations

$$\begin{cases} a = Ux + Vx' & a' = V'x + V'x' \\ b = U\beta + V\beta' & b' = V'\beta + V'\beta' \end{cases}$$

doivent être entiers. Il en est de même de la combinaison :

$$UV' - VU' = \frac{1}{uv' - vu'}$$

Comme le dénominateur est entier, il est nécessairement égal à ± 1

$$uv' - vu' = \pm 1.$$

Les formules de résolution montrent que cette condition est suffisante. On dit que

$$\begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}$$

définit une substitution unimodulaire si $uv' - vu' = \pm 1$. Cette définition acquise, on a la propriété :

Toute base se déduit d'une base donnée par une substitution unimodulaire.

De cette propriété il résulte que le déterminant d'une base a toujours la même valeur absolue ou encore que les parallélogrammes de toutes les bases ont même surface.

Applications des modules de points

1. — Considérons un module à *points entiers*, c'est-à-dire dont les coordonnées sont entières. Il est extrait d'un premier quadrillage et n'a évidemment qu'un nombre fini de points à l'intérieur d'un carré de centre O ; donc il est type. Les points ont pour coordonnées

$$\begin{cases} x = ua + va' \\ y = ub + vb' \end{cases} \quad u, v, \text{ entiers quelconques.}$$

Il renferme des points sur Ox et sur Oy . Cherchons une base en reprenant le raisonnement général, mais en partant de Ox et Oy . Choisissons comme premier point de base, A , celui qui est le plus rapproché de O sur la partie positive de Ox . Les coordonnées sont

$$(x, 0) \quad x > 0.$$

Parmi les points d'abscisse comprise entre $0, x$ il y en a un A' dont l'ordonnée positive est la plus petite, de coordonnées

$$(x', \beta) \quad 0 \leq x' < x \quad \beta > 0.$$

Toute base du module peut être ramenée à la base A, A' , c'est-à-dire qu'à tout système de quatre nombres entiers

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$$

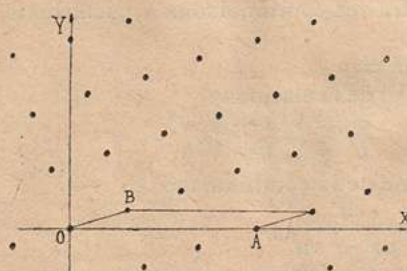
on peut faire correspondre un système et un seul de quatre nombres entiers

$$x \ 0 \quad x > 0 \quad \beta' > 0 \quad 0 \leq x' < x.$$

$$x' \ \beta'$$

déduit du précédent par une substitution unimodulaire.

C'est HERMITE qui a donné un énoncé précis de cette propriété déjà



ancienne et en a montré l'importance et l'extension à des tableaux carrés de n nombres.

La base obtenue s'appelle la *base réduite* d'HERMITE.

En explicitant cette propriété on retrouverait les propriétés du p. g. c. d. et le théorème de BEZOUT.

Remarque. — Un module M' inclus dans un module M est appelé

sous-module de M . Un module de points entiers est sous module du module type constitué par tous les points d'un quadrillage, c'est pourquoi il est type lui-même.

2. — Soit à résoudre en nombres entiers l'équation

$$Ax + By + Cz = 0 \quad A, B, C \text{ entiers.}$$

Les solutions sont des points entiers de l'espace à trois dimensions situés dans un même plan P passant par l'origine. Ces points constituent un module parce que la somme de deux points

$$x_1 + x_2 \quad y_1 + y_2 \quad z_1 + z_2$$

est encore une solution. Ce module *plan* est type. Donc ses points se déduisent de deux d'entre eux par addition et soustraction

$$\begin{cases} x = ua + va' \\ y = ub + vb' \\ z = uc + vc'. \end{cases}$$

Pour trouver a, b, c, a', b', c' on pourrait faire l'extension de la base d'Hermite à l'espace à 3 dimensions.

3. — Considérons trois points

$$A_1(a_1, b_1), A_2(a_2, b_2), A_3(a_3, b_3)$$

Les points

$$uA_1 + vA_2 + wA_3$$

forment un module. S'il est type on a

$$\begin{cases} A_1 = u_1B + v_1C \\ A_2 = u_2B + v_2C \\ A_3 = u_3B + v_3C \end{cases}$$

Si A_1, A_2, A_3 ne sont pas en ligne droite avec l'origine, u_1, v_1 ne sont pas *simultanément* proportionnels à u_2, v_2 et u_3, v_3 ; les mineurs

$$U_1 = u_2v_3 - u_3v_2 \quad U_2 = u_3u_1 - u_1v_3 \quad U_3 = u_1v_2 - u_2v_1$$

ne sont pas tous nuls et on a

$$U_1A_1 + U_2A_2 + U_3A_3 = 0$$

c'est-à-dire qu'il y a une même relation linéaire et homogène à coefficients entiers entre les abscisses et les coordonnées des points

$$\begin{cases} U_1a_1 + U_2a_2 + U_3a_3 = 0 \\ U_1b_1 + U_2b_2 + U_3b_3 = 0 \end{cases}$$

Inversement quand cette relation a lieu, les points A_1, A_2, A_3 appartiennent au module type défini par

$$\frac{1}{U_3} A_1 \quad \frac{1}{U_3} A_3$$

par suite le module formé par les trois points, contenu dans un module type, est lui-même type.

Par conséquent, quand il n'y a pas une même relation linéaire et homogène à *coefficients entiers* entre les coordonnées des trois points, le module qu'ils définissent n'est pas type et quel que soit ε il existe des entiers u, v, w , tels que

$$\begin{aligned} |ua_1 + va_2 + wa_3| &< \varepsilon \\ |ub_1 + vb_2 + wb_3| &< \varepsilon \end{aligned}$$

Prenons, par exemple,

$$\begin{aligned} a_1 = \sqrt{2} \quad a_2 = 0 \quad a_3 = -1 \\ b_1 = \sqrt{3} \quad b_2 = -1 \quad b_3 = 0. \end{aligned}$$

Quel que soit ε on peut trouver u, v, w tels que

$$|u\sqrt{2} - w| < \varepsilon \qquad \left| \sqrt{2} - \frac{w}{u} \right| < \frac{\varepsilon}{|u|}$$

ou

$$|u\sqrt{3} - v| < \varepsilon \qquad \left| \sqrt{3} - \frac{v}{u} \right| < \frac{\varepsilon}{|u|}$$

c'est-à-dire qu'on peut approcher de deux irrationnelles par des fractions de même dénominateur d'une quantité inférieure à toute fraction donnée à l'avance de l'inverse de ce dénominateur.

Les points

$$x = u\sqrt{2} - w$$

$$y = u\sqrt{3} - v$$

forment un ensemble partout dense dans le plan (1).

A. CHATELET,

Recteur de l'Académie de Lille.