

**Bulletin de l'Association**  
des  
**Professeurs de Mathématiques**  
de l'Enseignement Secondaire Public

Paraisant tous les trimestres

**SOMMAIRE**

**PREMIÈRE PARTIE**

I. Avis importants.....	29
II. Etat de l'Association.....	31
III. Réunion du Comité : 26 novembre 1925 .....	35
IV. Documents officiels : 4. Rapport sur la composition de Mathématiques (classe de Mathématiques) au Concours général des Lycées et Collèges en 1925 .....	36
5. Rapport sur la composition de Mathématiques (classe de Première C-D) au Concours général des Lycées et Collèges en 1925 .....	38
V. Communications diverses .....	41

**DEUXIÈME PARTIE**

A. CHATELET : Géométrie des Nombres.....	44
B. GAMBIE : Sur les méthodes en géométrie élémentaire.....	55
Ouvrages reçus.....	56

**SUPPLÉMENT**

Examens et Concours de 1925 : Énoncés des Problèmes de Mathématiques 2 <sup>e</sup> fascicule faisant suite au III <sup>e</sup> Numéro spécial publié en septembre 1925 (8 pages encartés)	
--	--

**ADMINISTRATION**

**21, Avenue de Châtillon, PARIS (14<sup>e</sup>)**

Les membres de l'Association (cotisation : 8 fr. pour l'année scolaire reçoivent gratuitement le *Bulletin* ainsi que toute publication de l'Association

Abonnement d'un an au *Bulletin* : France, 8 fr. — Etranger, 10 fr. »  
 Prix d'un numéro du *Bulletin* : — 2 fr. — — 2 fr. 50  
 S'adresser au trésorier : M. FLAVIEN, 4, square Lagarde, Paris, 5<sup>e</sup>

Librairie DELAGRAVE, 15, rue Soufflot, Paris (V<sup>e</sup>)

Nouveautés :

# Arithmétique

## Calcul mental, Système métrique

PAR J.-B. BRACHET et J. DUMARQUÉ, Professeurs agrégés

Classes de Cinquième et de Sixième

Un vol. in-8°, 650 exercices et problèmes, 80 figures, br. 5 fr. 50; cart. 7 fr. 50

Les auteurs se sont constamment appuyés sur des exemples concrets. La pratique des opérations sur les nombre entiers vient après la découverte de leurs propriétés. Dans le chapitre des fractions cet emploi du concret et la notion de fractions inverses, introduite dès le début, ont apporté toute la simplicité désirable.

Arithmétique, Notions d'Algèbre, cl. de 4<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> (paraîtra en septembre 1925)

Géométrie, cl. de 4<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup>.....br. 6 fr. 50; cart. 8 fr. 50

Algèbre, cl. de 2<sup>e</sup> et 1<sup>re</sup>..... (sous presse).

# PRÉCIS DE GÉOMÉTRIE

F. BRACHET

PAR

J. DUMARQUÉ

Ancien élève de l'École Normale Supérieure,  
Professeur agrégé au Lycée d'Hanoi.

Ancien élève de l'École Normale Supérieure  
Professeur agrégé au Lycée Condorcet.

## I. Géométrie Plane (Cl. de 2<sup>e</sup> C et D)

330 figures, 339 problèmes, table de rapports trigonométriques

Un volume in-8°, br. 12 fr. 20; cart..... 15 fr.

## II. Géométrie dans l'espace

(Classes de 1<sup>re</sup> C et D)

Un volume in-8°, illustré de 167 figures, br. 9 fr. 60; cart..... 11 fr. 50

## III. Compléments, Transformations, Coniques

(Classes de Mathématiques)

Un vol. in-8°, 211 figures, 530 problèmes, br..... 11 fr.; cart..... 13 fr. 50

Un livre préliminaire regroupe, en les complétant, les connaissances antérieurement acquises. Les déplacements, l'homothétie, l'inversion, etc., sont ensuite étudiés systématiquement au point de vue *Transformations* des figures. Les propriétés essentielles des *Coniques* sont exposées avec toute la rigueur et la simplicité désirables.

### Membres d'Honneur :

- MM. BLUTEL, Inspecteur général de l'Enseignement secondaire.  
 LECONTE, Inspecteur général de l'Enseignement primaire.  
 MARIJON, Inspecteur général de l'Enseignement secondaire.  
 THYBAUT, Inspecteur de l'Académie de Paris.

### Bureau :

Le Bureau et les Rapporteurs se réunissent les troisièmes jeudis.

- Président* : M. WEILL, 6, rue Leclerc, Paris, 14<sup>e</sup>.  
*Vice-Présidents* : M. LEMAIRE, 18, rue Eugène-Manuel, Paris, 16<sup>e</sup>.  
 Mlle PICOT, 27, avenue Duquesne, Paris, 7<sup>e</sup>.  
*Secrétaires* : M. DECERF, 59, avenue Mozart, Paris, 16<sup>e</sup>.  
 M. DUMARQUÉ, 18 bis, rue du Débarcadère, Paris, 17<sup>e</sup>.  
*Trésorier* : M. FLAVIEN, 4, square Lagarde, Paris, 5<sup>e</sup>.

En cas de règlement par chèque postal (frais d'envoi 0 fr. 25), utiliser exactement l'adresse suivante :

Paris, C/c 8-63 — L. FLAVIEN — 4, square Lagarde, Paris, 5<sup>e</sup>

### Comité :

#### Membres de droit :

- M. COMMISSAIRE, Louis-le-Grand. M. BONIN, St-Germain-en-Laye.

#### Membres élus pour 4 ans :

##### En 1922 :

- MM. DUMARQUÉ, Condorcet. Mlle PICOT, Victor-Duruy.  
 FLAVIEN, Henri-IV. M. ROBY, St-Germain-en-Laye.

##### En 1923 :

- MM. CHENEVIER, St-Louis. MM. WEILL, St-Louis.  
 GROS, Condorcet. WEBER, Chaptal.

##### En 1924 :

- MM. BIOCHE, Louis-le-Grand. MM. DECERF, Janson.  
 Mme CHABAUTY, Fénelon. GRÉVY, St-Louis.  
 MM. COMBET, Louis-le-Grand. JULIEN, Janson.  
 COMMANAY, Compiègne. SAINTE-LAGUE, Janson.

##### En 1925 :

- MM. COISSARD, Janson. M. LEMAIRE, Janson.  
 JACQUET, Henri-IV. Mlle LAUZANNE, Victor-Hugo.

### Correspondants :

- |                        |               |                      |                |
|------------------------|---------------|----------------------|----------------|
| <i>Aix-Marseille</i> : | M. FONT.      | <i>Lyon</i> :        | .....          |
| <i>Alger</i> :         | M. DE SARRAU. | <i>Montpellier</i> : | M. DESBATS.    |
| <i>Tunis</i> :         | M. PATOU.     | <i>Nancy</i> :       | M. THIÉBAUT.   |
| <i>Besançon</i> :      | .....         | <i>Poitiers</i> :    | M. DREYFUS.    |
| <i>Bordeaux</i> :      | M. MAUPIN.    | <i>Rennes</i> :      | M. JACQUEMART. |
| <i>Caen</i> :          | .....         | <i>Nantes</i> :      | .....          |
| <i>Clermont</i> :      | M. SANSELME.  | <i>Strasbourg</i> :  | .....          |
| <i>Dijon</i> :         | .....         | <i>Toulouse</i> :    | M. DOUCHEZ.    |
| <i>Grenoble</i> :      | .....         |                      |                |
| <i>Lille</i> :         | M. CHATRY.    | <i>Hanoï</i> :       | M. BRACHET.    |

**Extraits des Tables du Bulletin**

(Les numéros indiqués sont ceux du *Bulletin*)

<i>Les travaux de la Commission internationale de l'Enseignement mathématique</i> .....	27
<i>Sur la théorie des pôles et polaires dans l'Enseignement secondaire</i> .....	33
A. AMIEL : <i>Quelques réflexions sur l'initiation mathématique</i> .....	26
J. ANGELLOZ-PESSEY : <i>Sur un lieu géométrique élémentaire</i> .....	36
C. BERTHIER : <i>Sur le volume engendré par un triangle</i> .....	35
Ch. BIOCHE : <i>Sur le cercle, limite de polygones circonscrits</i> .....	19
Ch. BIOCHE : <i>Sur des polygones à éléments égaux et non superposables</i> .....	32
E. BLUTEL : <i>Sur le premier enseignement de la géométrie</i> .....	18-19
E. BLUTEL : <i>Sur le premier enseignement de l'arithmétique</i> ... 33-34-36	
E. BLUTEL : <i>Points conjugués et polaire d'un point par rapport à un cercle</i> .....	21
E. BLUTEL : <i>Sur la division des nombres décimaux</i> .....	21
E. BLUTEL : <i>Une conséquence inattendue d'un principe d'équivalence</i> .....	23
F. BRACHET et J. DUMARQUÉ : <i>Sur les théorèmes de Poncelet</i> .....	27
F. BRACHET et J. DUMARQUÉ : <i>Sur l'hyperbole</i> .....	31
F. BRACHET et J. DUMARQUÉ : <i>Sur un lieu géométrique élémentaire</i> .....	33
J. COISSARD : <i>Sur quelques énoncés de problèmes tirés de propositions classiques</i> .....	28
J. COISSARD : <i>Sur un problème du Concours général</i> .....	30
H. COMMISSAIRE : <i>Sur les comptes courants</i> .....	29
A. DECERF : <i>Sur deux formules du VII<sup>e</sup> Livre</i> .....	23
A. DECERF : <i>Sur le premier Livre de géométrie</i> .....	33
R. DONTOT : <i>Sur le nombre e</i> .....	24
L. DREYFUS : <i>Sur la rédaction des énoncés de problèmes</i> .....	22
E. DROULON : <i>Sur le volume du tronc de prisme triangulaire</i> .....	33
E. DUFOUR : <i>Sur les comptes courants</i> .....	28
G. FONTENÉ : <i>Sur la division</i> .....	21
G. FONTENÉ : <i>Sur le sens de variation d'une fonction</i> .....	29
H. GIRARD : <i>Au sujet de la relation de Stewart</i> .....	30
Th. LECONTE : <i>Sur les progressions arithmétiques à deux raisons</i> .....	23
P. LESGOURGUES : <i>Sur une construction classique des coniques</i> ... 34	
M. ROBY : <i>A propos des solutions pratiques des problèmes</i> .....	24
M. ROBY : <i>Sur les cercles directeurs des coniques</i> .....	32
L. ROUYER : <i>Sur le nombre e</i> .....	26
E. WEILL : <i>Sur une équation trigonométrique</i> .....	31

S'adresser au trésorier, M. FLAVIEN, en envoyant 1 fr. par numéro demandé.

En cas de règlement par chèque postal (frais d'envoi 0 fr. 25), utiliser exactement l'adresse suivante, sans aucune addition :

Paris, C/c 8-63 — L. FLAVIEN. — 4, square Lagarde, Paris, 5<sup>e</sup>

*Bulletin de l'Association*  
*des*  
**Professeurs de Mathématiques**  
*de l'Enseignement Secondaire public*

---

## PREMIÈRE PARTIE

### I. Avis importants

#### 1. Paiement des Cotisations 1925-1926

Le Bureau remercie vivement les correspondants et les membres de l'Association qui ont bien voulu se charger de recueillir et d'envoyer les cotisations de leurs collègues.

Ceux qui n'ont pas encore réglé leur cotisation (8 francs à verser en octobre, art. 4 des Statuts) sont instamment priés de les envoyer au Trésorier, individuellement ou — de préférence — par établissement, à l'aide d'un chèque postal (frais d'envoi 0 fr. 25) en utilisant exactement l'adresse suivante, sans aucune addition :

Paris, C/c 8.63 — L. FLAVIEN  
4, square Lagarde, V<sup>e</sup>

L'inscription au *Bulletin* des membres ayant versé leur cotisation tient lieu de reçu.

Prière aussi de bien vouloir signaler aussi les mutations et nominations (nouveaux et anciens postes, mises à la retraite, ..... ) des professeurs de mathématiques, et, s'il y a lieu, les rectifications au Répertoire alphabétique du *Bulletin* n° 42.

#### 2. Enquête sur les réductions d'horaires dans l'enseignement des mathématiques

L'enseignement des mathématiques dans les Collèges a donné lieu, cette année, à de nombreuses observations. Le Comité, dans sa réunion du 26 novembre 1925, a décidé de protester contre l'attribution de certaines classes à des professeurs non licenciés. De nouvelles communications sont parvenues depuis au Bureau ; certaines sont relatives à des réductions d'horaires et à des géminations de classes qui, en

raison d'effectifs réduits, ont été faites dans plusieurs établissements sans tenir compte des nécessités de l'enseignement des mathématiques.

Afin de recueillir les indications nécessaires aux décisions à prendre à ce sujet, les professeurs de mathématiques — et tout spécialement ceux chargés de l'enseignement dans les Collèges de garçons — sont priés de bien vouloir adresser soit au Bureau, soit à M. ROBY, professeur au Collège de St-Germain-en-Laye, leurs réponses aux questions suivantes :

1° *Quelles sont les réductions que l'on pourrait, à la rigueur, faire subir dans les classes à effectif réduit aux horaires prévus, pour les mathématiques, par le plan d'études de 1902-1905 :*

- a) *en Mathématiques A-B ?*
- b) *en Première C-D ?*
- c) *en Seconde C-D ?*

2° *Quelles classes pourrait-on, à la rigueur, géminer pour les mathématiques sans compromettre l'enseignement ? Est-il possible de réunir des classes d'enseignement secondaire et des classes d'enseignement primaire supérieur et lesquelles ?*

3° *Combien y avait-il d'élèves en moyenne pendant ces trois dernières années dans l'établissement où vous enseignez :*

- a) *en Mathématiques A-B ?*
- b) *en Première C-D ?*

4° *La préparation aux Baccalauréats scientifiques est-elle organisée régulièrement dans l'établissement féminin voisin du vôtre ?*

5° *Avez-vous parmi vos élèves de Première C-D et de Mathématiques A-B des jeunes filles venant de cet établissement ?*

6° *Quels titres faut-il exiger des professeurs qui font les diverses classes de l'enseignement secondaire ?*

La première et la deuxième question ne visent évidemment que les classes où le plan d'études de 1923-1925 n'est pas encore en vigueur. L'Association des Professeurs de Mathématiques ne saurait envisager une réduction du temps consacré à l'étude des mathématiques dans les nouveaux programmes, et ne pourrait admettre d'autres geminations que celles prévues par l'Arrêté du 3 juin 1925, c'est-à-dire la réunion d'élèves appartenant à la même classe dans les sections A et B.

### 3. Prochaines élections au Comité

L'Assemblée générale de Pâques 1926 sera appelée à élire 4 membres au Comité, en remplacement de Mlle PICOT et de MM. DUMARQUÉ, FLAVIEN et ROBY, membres sortants non immédiatement rééligibles.

Afin d'éviter une trop grande dispersion des suffrages, il semble désirable de présenter au choix des électeurs — qui conservent d'ailleurs leur entière liberté — une liste de membres de l'Association acceptant de mettre leur activité et leur dévouement au service de l'Association.

Les membres de l'Association désireux soit de poser leur candidature, soit de provoquer la candidature d'autres collègues, sont priés d'en informer le Bureau.

## II. Etat de l'Association

800 membres au 30 novembre 1925

### 1. Inscriptions

MM.	MM.
ALZIEU (Mlle), Perpignan (C. F.).	HOULEZ, Rennes.
AULLEN, Dôle (C.).	JACQUEMARD (Mlle), St-Quentin (F.).
BANON, Bischwiller (C.).	JEHL (Mlle), Colmar (F.).
BARBIER (J.), Montpellier.	LAPORTE (Mme), Marmande (C. G.).
BARÈS (L.), Millau (C.).	LERAT, La Flèche.
BARNIER (Mlle), Bourg (F.).	MARTIN (Mlle J.), Mulhouse (F.).
BARTHÈS, Bordeaux.	MARTY (Mme J.), Toulouse (F.).
BRÉCHET, Tarbes.	MULTON, Laon.
BRIAND, Quimper.	NAGLÉ, Metz.
CAHN, Belfort.	PAPILLON, Angoulême.
EYRAUD (H.), <i>Henri-IV</i> .	PRULHIÈRE, Rennes.
FITTE, Toulouse.	RICHER (Mlle), Fécamp (C. F.).
FONDERT (Mlle), Montargis (C. F.).	RIVET, La-Roche-sur-Yon.
FRANK, Metz.	ROYER Dôle, (C.).
GAUTHIER, Armentières (C.).	SCHNÉE, Strasbourg, <i>Kléber</i> .
GOUPIL (Mlle), Mulhouse (F.).	VIDAL, Tunis.

### 2. Radiations

MM. DESJARDIN, Abbeville (C.), <i>décédé</i> .
LALLEMENT, Flers (C.), <i>en retraite</i> .
MELET (Mlle), Vendôme (C. F.), <i>en retraite</i> .
NAVEL, La Flèche, <i>en retraite</i> .
PECQUERY, Bordeaux, <i>en retraite</i> .
TOURNAUX, Amiens, <i>en retraite</i> .

### 3. Cotisations reçues du 1<sup>er</sup> octobre au 30 novembre

(6 cotisations rachetées (1) et 331 cotisations 1925-1926, au total : 337)

Les noms en italiques sont ceux des membres ayant un nouveau poste

*Membres honoraires* : M. Fréchet, *prof.* à l'Université de Strasbourg.  
M. Gosse, *professeur* à l'Université de Grenoble.  
M. Lebeuf, *directeur* de l'observatoire de Besançon.  
M. Mortagne, *censeur* du Lycée de Belfort.  
M. Piaté, *surveillant général* du Lycée Janson.  
M. Poirier, *professeur* à l'E. P. I., Rive-de-Gier.  
M. Ribeyre, *professeur* à l'E. N. I., Moulins.  
M. Rouyer, *professeur* à l'Université d'Alger.

(1) Mlle Debat, Mme Flamant, MM. Fréchet, Gosse, Mlles Graff, Poncey.

- En congé* : M. Gioan, 41, Bd Victor-Hugo, Grasse.  
Mme Jamain-Xambeu, Lycée d'Evreux.  
Mme Nadal, 349, rue de Bègles, Bordeaux.
- En retraite* : M. Antoine (E.), prof. honoraire au Lycée de Chambéry.  
M. Bioche, prof. honoraire au Lycée Louis-le-Grand.  
M. Charvet, professeur honoraire au Lycée Buffon.  
M. Goulin, professeur honoraire au Lycée Condorcet.
- AGDE (C.). — M. Dupuy.
- ALAIS. — MM. Clapier, Reynaud (G.).
- ALGER. — MM. Albou, Bennezon, Cagnac, Carrère, Coti, Davidou,  
Gallot, Paoli (L.), Puzin, de Sarreau, Tutenuit.
- ALGER (F.). — Mlles Frelin, Raffin, Tertois.
- AIX. — MM. Amiel, Bernard (E.), Terrier.
- AMIENS. — MM. Durand (Ch.), Louvet, Ranson (E.), Vasseur.
- AMIENS (F.). — Mlle Perron.
- ANGERS. — MM. Allonneau, Droulon, Larget-Piet.
- ANGOULÈME. — MM. Graff (P.), Méric (A.), Papillon.
- ANNECY. — M. Chanel.
- ARMENTIÈRES (C.). — M. Gauthier.
- AUCH. — MM. Baillon, Baurens.
- AUXONNE (C.). — M. Rousseau (G.).
- BAYONNE (C. F.). — Mlle Pinot.
- BÉDARIEUX (C.). — M. Blanc.
- BELFORT. — MM. Benoit-Gonin, Cahn, Guillemain.
- BESANÇON (F.). — Mlles Arnould, Poncey, Rousset.
- BÉTHUNE (C.). — M. Thiesset.
- BÉTHUNE (C. F.). — Mlle Creton.
- BÉZIERS (C.). — MM. Imbert, Maury, Vigné.
- BISCHWILLER (C.). — M. Banon.
- BLIDA (C.). — M. Durand (P.).
- BORDEAUX. — MM. Bargues, Barès (...), Barthès, Broca, Courriades,  
Dilhan (S.), Lamoureux, Maupin, Maurin,  
Ninin, Rebeix, Roubau, Sanson.
- BORDEAUX, Longchamps. — M. Loiseleur.
- BORDEAUX, Talence. — M. Caillibotte.
- BORDEAUX (F.). — Mme Baudeuf, Mlle Capdeville, Mme Darbon,  
Mlle Debat.
- BOURG (F.). — Mlle Barnier.
- BREST (F.). — Mlle Gramont.
- CARCASSONNE. — MM. Brunet, Radix.
- CETTE (C.). — MM. Marty (R.), Poux.
- CHAMBÉRY. — MM. Caron, Raymond.
- CHAUMONT. — MM. Nicolas, Ramondot.
- CLERMONT-FERRAND (F.). — Mlle Pommier.
- CLERMONT-L'HÉRAULT (C.). — M. Bonnal.
- COLMAR. — M. Mathé.
- COLMAR (F.). — Mlles Dietz, Jehl, Triand.

- CONDOM (C.). — M. Izar.  
DIJON. — MM. Coulon, Fleuchot, Lebel, Renaud.  
DÔLE (C.). — MM. Aullen, *Royer*.  
DOUAI (C. F.). — Mmes *Dehem-Momal*, Ranson-Merchier.  
DREUX (C. F.). — Mlle Lecornu.  
EVREUX (C. F.). — Mlle Baudry.  
FÉCAMP (C. F.). — Mlle *Richer*.  
FLERS (C.). — M. *Frémin*.  
FOIX. — MM. Chelle, Clause.  
FORT-DE-FRANCE. — M. *Pioger*.  
GRENOBLE. — MM. Grumel, Rival, Rivoire, *Viallis*.  
GRENOBLE (F.). — Mlle *Lafourcade*.  
LA FLÈCHE. — MM. Bastien, Bellon, Bessot, Convers, *Lerat*, Léger,  
Morel (G.), Prévot, Taratte, Vallet.  
LAON. — M. Multon.  
LA ROCHELLE. — MM. Lesgourges (L.), *Louchez*, Vénencie.  
LA ROCHE-SUR-YON. — MM. Deringère, *Rivet*.  
LE BLANC (C.). — M. Michon (J.).  
LE HAVRE. — MM. Delens, Deschamps, Philippe (A.).  
LE HAVRE (F.). — Mlle Bertrand.  
LE PUY. — M. Paulin.  
LOUHANS (C.). — M. Malachane.  
LYON, *Le Parc*. — MM. *Berlande*, Gaillet, Garin, Jouberton, Pluchery,  
Robert (P.).  
LYON, *St-Rambert*. — M. Vautherin.  
MACON. — MM. Dupeyrat, Genre, Pau.  
MACON (F.). — Mlle Dargent.  
MARMANDE (C.). — Mme *Laporte*, M. Sourisse.  
MARSEILLE. — MM. Bertrand, Font, Frizac, Janis, Maroger, Martin  
(...), Métral, Mourret, Paoli (J. M.), Roche,  
Turcan.  
MARSEILLE, *St-Charles*. — MM. André, Grolleau, Gros (O.), Massiani.  
MARSEILLE, *Montgrand* (F.). — Mme Chazottes, Mlle Mabelly,  
Mme *Nicolas*.  
MAUBEUGE (C.). — MM. Crinon, Decoux.  
MELUN (C.). — M. Rioult.  
METZ. — MM. Armbruster, Bellocq (D.), Cordier, Deperrois, Franck,  
Kieffer, Martin (M.), Naglé, Pallez.  
MILLAU (C.). — M. Barès (L.).  
MONACO. — M. Saporte.  
MONTARGIS (C. F.). — Mlle Fondert.  
MONTAUBAN. — M. Pfaff.  
MONTBÉLIARD (C.). — M. Fournier.  
MONTÉLIMAR (C.). — M. Sayerle.  
MONTPELLIER. — M. *Barbier* (J.), Bourateu, Desbats, Esquirol, Fages,  
Gary-Bobo, Marchaud, Motte, Pons.  
MONTPELLIER (F.). — Mlle Woirion.

- MOULINS. — MM. Blanchot, Girard, Marcoz.  
MOULINS (F.). — Mlle Emin.  
MULHOUSE (F.). — Mlles Goupil, Martin (J.).  
NARBONNE (C. F.). — Mme Mathieu-Pères.  
OLORON (C.). — M. Garraux.  
ORAN. — MM. Boulonier, Génin, Hais, Séguin.  
OUDJDA (C.). — M. Moncheaux.  
PARIS, *Condorcet*. — MM. Arnould, Boutillier, Dauzats, Dedron,  
Defourneaux, Delcourt (E.), Dumarqué,  
Garnon, Gros (C.), de Lapierre,  
Mérieux, Picardmorot.  
PARIS, *Henri IV*. — MM. Casabonne, Delcourt (P.), Eyraud (H.),  
Flavien, Guitton, Jacquet, Muxart,  
Portalier.  
PARIS, *Janson*. — MM. Anzemberger, Coissard, Decerf, Dumont (G.),  
Julien, Lhébrard, Lhermitte, Mahuet, Martin  
(L.), Perfetti, Perrichet, Rech, Sainte-Lague,  
Sourd.  
PARIS, *Victor-Hugo* (F.). — Mlle Graff.  
PERPIGNAN (C.). — MM. Maris, Mengel.  
PERPIGNAN (C. F.). — Mlle Alzieu.  
PÉZENAS (C.). — M. Estibotte.  
PONTOISE (C.). — M. Petiteville.  
QUIMPER. — M. Beauverger, Briand.  
REIMS. — MM. Colin, Finot, Vany.  
RENNES. — MM. Houlez, Leroy, Long, Marceil, Poumier, Prulhière.  
RENNES (F.). — Mlle Guitel.  
SAINT-CLAUDE (C.). — Fauconnet, Limousin.  
SAINT-DENIS-DE-LA-RÉUNION. — M. Bellivier.  
SAINT-ETIENNE. — MM. Berthier, Carrière, Marion, Roux, Sueur,  
Vallier.  
SAINT-MARCELLIN (C.). — M. Lagier.  
SAINT-OMER. — MM. Brossard, Ellies.  
SAINT-QUENTIN (F.). — Mlle Jacquemard.  
SARREGUEMINES. — MM. Bay, Naucelle.  
SAULIEU (C.). — M. Lacourt.  
SAUMUR (C.). — Malfreyt.  
SAVERNE (C.). — M. Meysonnier.  
SENS. — M. Morel (H.).  
STRASBOURG, *Kléber*. — MM. Hahn, Picardat (R.), Roy, Schnée,  
Wilhelm.  
STRASBOURG (F.). — Mme Flamant.  
TARBES. — M. Bréchet.  
THIONVILLE (C.). — M. Schmidt (A.).  
TOULOUSE. — MM. Caussé, Chabou, Douchez, Estève, Fitte, Izarn,  
Lacroix, Marty (M.), Méric (...), Mitault,  
Rebière, Vignes.

- TOULOUSE (F.). — Mme Marty (J.), Mlle Maurin, Mme Roques.  
TOURNON (F.). — Mlle Arnaud.  
TUNIS. — MM. Chaignon, Gründler, Lalande, Patou, Perrachon, Thovet, Vidal.  
TUNIS (F.). — Mme Nicole-Astier.  
VALENCIENNES. — M. Mas.  
VALENCIENNES (F.). — Mlle Moulin.  
VENDOME. — MM. Gagneux, Pénaud.  
VERSAILLES. — MM. Aubry, Framboise, Garde, Guadet, Léchenet, Le Diouron, Perrin, Schlessler.  
VERSAILLES (F.). — Mme Alba-Mignon, Mlles Barbier, Sandier.  
VIENNE (C.). — M. Reynaud (A.).  
VILLENEUVE-SUR-LOT (C.). — M. Couffignal.

### III. Réunion du Comité

26 novembre 1925

*Présents* : M. BIOCHE, Mme CHABAUTY, MM. CHENEVIER, COMMISSAIRE, DUMARQUÉ, FLAVIEN, GRÉVY, GROS, JACQUET, JULIEN, WEBER, WEILL.

*Excusés* : M. DECERF, Mlle LAUZANNE.

La séance est ouverte à 16 h. 30, sous la présidence de M. WEILL.

M. FLAVIEN, trésorier, dépose le compte rendu financier de l'année scolaire 1924-1925, qui sera soumis à l'Assemblée générale de Pâques 1926.

*Certificat d'aptitude à l'Enseignement secondaire.* — M. WEILL rend compte qu'en vue d'étudier la création d'un certificat d'aptitude à l'Enseignement secondaire, — étude renvoyée par le Congrès de Pâques 1925 aux sociétés de spécialistes, — une réunion des professeurs de mathématiques a eu lieu le 25 octobre 1925. En raison de l'ignorance totale où on se trouve touchant les projets de l'Administration, il a été difficile d'émettre des avis précis.

Quelques membres du Comité appréhendent que la création d'un certificat ne masque une attaque contre l'agrégation ; chacun sait que le nombre des candidats va se raréfiant chaque année et qu'on manque d'agrégés pour pourvoir aux postes vacants, même dans des lycées importants : n'est-il pas à craindre que le certificat n'ait pour objet de pallier à cette situation ? Ce serait alors l'abaissement de l'Enseignement secondaire. En tout état de cause il convient d'être prudent et, à l'unanimité, le Comité décide que le délégué de l'Association à la Commission du Certificat devra : 1° s'informer des raisons précises pour lesquelles on veut un nouvel examen ou concours ; 2° s'opposer à la création de tout certificat *intermédiaire* entre la licence et l'agrégation.

*Ecole Unique.* — Le Comité décide d'envoyer un « observateur » à la Commission de l'Ecole Unique et prie M. WEILL de vouloir bien accepter ces fonctions.

*L'enseignement des mathématiques dans les Collèges.* — Le Comité s'entretient ensuite de la répercussion des économies à tout prix, réalisées un peu partout, sur la bonne marche des études : dans certain collège, par exemple, pour éviter des heures supplémentaires, l'enseignement des mathématiques en Quatrième (classe d'initiation pour la géométrie, donc très importante) est retiré à l'unique professeur de mathématiques de l'établissement et est confié à un non-licencié : l'Association se doit d'élever une protestation contre ces errements.

*Rectification à une motion de l'Association des professeurs de langues vivantes.* — Le Comité, après avoir pris connaissance d'un extrait du procès-verbal de la séance du 28 mai 1925 de la Section de l'Enseignement de la C. T. I. (1), constate que ce procès-verbal reproduit une motion déposée par l'Association des professeurs de langues vivantes de l'Enseignement public où il est dit : « que le Conseil Supérieur de l'Instruction publique où siègent les représentants élus de tout le corps enseignant a, au cours de sa dernière session, rejeté presque à l'unanimité le projet COMMISSAIRE. »

Le Comité charge le Bureau de faire savoir à l'Association des professeurs de langues vivantes que le projet COMMISSAIRE a été repoussé en commission par 23 voix contre 18 et qu'en séance publique 15 voix se sont prononcées pour ce projet et 30 contre.

Il remarque que cette majorité est loin de constituer la presque unanimité dont il est question dans la motion précitée et regrette de se voir dans l'obligation de rectifier cette affirmation.

L'ordre du jour étant épuisé, la séance est levée à 18 heures.

---

## IV. Documents officiels

---

### 4. Rapport sur la Composition de Mathématiques (Classe de Mathématiques) au Concours général des Lycées et Collèges en 1925

Le problème proposé comportait cinq parties (2). Les trois premières se rattachent étroitement à l'étude classique des sphères qui appartiennent à un réseau linéaire, dont les points de base sont imaginaires. On demandait, en particulier, d'examiner celles de ces sphères qui passent par un ou deux points donnés, ou qui sont tangentes à un plan donné.

(1) Voir le *Bulletin* n° 41, page 153.

(2) Voir l'énoncé page 4 des *Fascicules* consacrés aux *Examens et Concours de 1925*.

La nature des points de base est la source de discussions qui ont embarrassé la plupart des concurrents, en les obligeant à limiter les lieux géométriques auxquels ils étaient conduits. Beaucoup ont fait, à cette occasion, des calculs bien inutiles. Il leur paraît indispensable d'attacher des coordonnées à un élément géométrique pour le définir. Ils ne se rendent pas compte qu'à partir du moment où ils l'ont fait, le symbole masque souvent l'idée et qu'ils se sont rendus esclaves d'un mécanisme. La géométrie a des moyens propres dont l'emploi n'est fructueux que pour celui qui sait conserver intacte sa liberté d'observation.

De bons résultats ont cependant été obtenus puisque la note 18 a été atteinte pour la première partie et la note 16 pour les deux suivantes.

La liaison des deux dernières parties avec l'étude précitée est un peu plus lâche que celle des trois premières; elles se rattachent par ailleurs à des questions familières. Elles ont été moins bien traitées, les notes ne dépassant pas 14 pour la quatrième et une seule atteignant 15 pour la cinquième.

La copie qui a obtenu le premier prix a des notes variant de 12 à 16, avec une moyenne de 14; c'est un travail qui dénote des connaissances étendues et variées. Une mise au point, dans la forme, eût été nécessaire pour en rendre possible la publication.

Celles qui ont encore été jugées dignes du 10<sup>e</sup> accessit ont une moyenne supérieure à 9 et un assez grand nombre d'autres copies se groupent au voisinage.

Un examen général rendra compte de l'intérêt pris par l'ensemble des candidats à la solution du problème :

- 5 copies blanches seulement sur 310 ;
- 89 copies consacrées à l'unique étude de la première partie ;
- 78 à celle de deux parties, les deux premières généralement ;
- 59 à celle de trois parties ;
- 60 à celle de quatre parties ;
- 19 à celle des cinq parties.

C'est dans les deux dernières catégories qu'ont été retenues 26 copies dont 15 ont été primées, après de nouvelles lectures.

Le sujet a donc été jugé abordable par la majorité. On ne pourrait que s'en féliciter, n'était le surcroît de besogne imposé aux correcteurs. Plus de soin dans la rédaction, de discrétion dans les rapports entre concurrents à qui l'on demande de faire œuvre personnelle, eussent facilité une tâche qui a été, cette fois, particulièrement lourde.

*L'Inspecteur général,  
Président de la Commission de correction,  
E. BLUTEL.*

**5. Rapport sur la Composition de Mathématiques  
(Classe de Première C-D.)  
au Concours général des Lycées et Collèges en 1925**

Sur les quatre parties du problème dont la solution était demandée (1), trois sont purement géométriques. La première seule demande un peu de calcul. Encore peut-elle être considérablement simplifiée par un examen géométrique préalable.

C'est sans doute à cette prépondérance de la géométrie pure qu'est due la faiblesse exceptionnelle du concours. La Commission de correction n'a attribué que trois notes : 14, 11,5, 10 dépassant ou atteignant la moyenne. Sept autres notes sont comprises entre 8,5 et 7,5 ; au total, 27 copies seulement sur plus de 500 ont été cotées au-dessus de 5. Le reste est très faible, mauvais ou nul.

Dans la première partie, il s'agissait, en somme, de placer, dans l'espace, un cercle de rayon donné passant par A et B, de manière qu'il ait un point commun avec la droite D'. La construction géométrique est immédiate, et elle se discute sans grande difficulté, dans les deux hypothèses : A et B sont du même côté de O, ou sont de part et d'autre de O.

Les concurrents se sont précipités, comme toujours, dans de longs calculs, conduits à l'aventure, souvent détaillés sur la copie avec une naïve complaisance. Un peu moins de la moitié ont donné l'équation exacte.

Les fautes les plus fréquentes sont des oublis de facteurs numériques : on écrit  $S = ah$ ,  $a = R \sin A$ , ... Parfois, les formules élémentaires de la trigonométrie sont appliquées à contre-sens :  $OM = d \cos \alpha$ , au lieu de :  $d = OM \cos \alpha$ . Des erreurs dans les exposants, ou des omissions des facteurs R, d, ... amènent des accrocs au principe de l'homogénéité, dont on néglige trop l'application, pourtant si facile.

Dans la discussion, que le nombre des paramètres mis en cause rendait assez délicate,  $R^2$  intervenait linéairement, et il était tout naturel d'étudier le nombre de solutions acceptables suivant la grandeur de  $R^2$ . Ceux qui ont essayé de discuter par rapport à  $d^2$  ont été arrêtés dès le début.

Quelques copies posent nettement la question, et examinent les deux cas de figure ; mais elles bornent en général leur effort à l'étude des conditions auxquelles il existe une solution unique. La plupart écrivent, au hasard, des inégalités en  $a, b, d, R$ , ne classent pas les valeurs remarquables, et s'arrêtent sans conclure. Un seul concurrent a donné une réponse exacte, claire et complète ; il a été aussi le seul à bien voir la nature géométrique de la question.

En géométrie, personne n'a donné, à beaucoup près, une solution complète. La plupart de ceux qui ont traité la moitié du problème

(1) Voir l'énoncé, page 5, des *Fascicules* consacrés aux *Examens et Concours de 1925*.

figurent au palmarès. A peine 10 o/o, dans l'ensemble, laissent l'impression qu'ils sont de taille à aborder correctement l'une ou l'autre des difficultés à résoudre.

Voici quelques échantillons des affirmations les plus courantes :

« Un cône circulaire est de révolution. Un plan le coupe suivant un cercle. Il rencontre suivant un cercle un cône de même espèce. »

« Le lieu n'a pas de points à l'infini. C'est donc un cercle. »

« Trois points du lieu forment un triangle. Donc le lieu est un cercle. »

« Le lieu du sommet d'un angle droit de l'espace dont les côtés passent par deux points fixes est une demi-circonférence. »

Nous nous contentons, bien entendu, de relever des fautes souvent répétées et, en quelque sorte, systématiques, laissant de côté certaines absurdités isolées qu'on peut, avec indulgence, considérer comme des lapsus.

Nous faisons observer l'an dernier que beaucoup des meilleures compositions prouvaient une tendance déplorable à s'appuyer, à tort et à travers, sur des connaissances étrangères au programme de la classe. Ce défaut est encore plus sensible au concours de 1925. L'inversion, en particulier, intervient à tout propos, et est souvent fort malmenée, soit qu'on l'emploie incorrectement, faute de la bien connaître, soit qu'on l'invoque où elle n'a que faire, comme si elle était la clef de toutes les difficultés qu'on peut rencontrer en géométrie. On l'utilise, par exemple, pour trouver le lieu des points d'un plan d'où l'on voit deux points fixes sous un angle droit. Un concurrent, parmi les meilleurs, a fait intervenir, pour résoudre la troisième partie, de lourdes considérations sur les divisions homographiques ; s'il eût ignoré des théorèmes dont un élève de Première n'a que faire, il eût certainement mieux employé son incontestable finesse à découvrir que  $\overline{OM.O'M'}$  est constant, ce qu'il n'a vu qu'en admettant sans preuve que  $O'$  est le point central de l'involution des points  $M$  et  $M'$ . Quelques copies invoquent les propriétés du tétraèdre orthocentrique, et l'on s'aperçoit vite, à voir avec quelle maladresse les démonstrations de certaines de ces propriétés sont parfois esquissées, que les résultats seuls ont retenu l'attention.

Un grand nombre de nos bons élèves paraissent, en somme, chercher le succès dans l'étalage naïf d'une érudition massive et mal assimilée. Ils abordent le concours comme s'ils étaient convaincus que la solution du problème à résoudre dépend de recettes savantes, dont la formule existe seulement dans les chapitres relégués hors du programme.

Nous voulons croire que les professeurs n'encouragent pas cette erreur de jugement, et s'efforcent de développer les qualités de logique, de bon sens et d'ingéniosité des mieux doués de leurs élèves, dans les limites, déjà larges, du plan d'études. Et nous constatons une fois de plus l'influence défavorable, dans le classement, des incursions inutiles parmi les théories trop savantes.

Nous déplorons, comme les années précédentes, le peu de souci de la valeur littéraire, de la correction de l'orthographe, et de la propreté matérielle, qu'affichent un grand nombre de compositions.

Du moment qu'il s'agit de mathématiques, on se croit autorisé à écrire en dehors des règles de la plus élémentaire syntaxe ; le résultat étant exact, le correcteur doit comprendre à demi-mot. Certains ne se sentent vraiment à l'aise que dans le maniement des formules consacrées : « on a... », « il vient... », « d'où... », et ils font jouer à ces formules un rôle imprévu dans l'exposé de leurs solutions géométriques. Enfin, l'abus des hiéroglyphes, contre lequel nous ne cessons de nous élever, continue à sévir. Dans quelques copies, il est vrai, on l'évite en première page, mais l'auteur se rattrape, par la suite, de sa contrainte au départ. Les //,  $\perp$ , cf, pp, pll,  $\Delta$ , éq, ..... abondent. Une même composition considère le  $\Delta$  de l'éq., et le  $\Delta$ .AMB. Il est visible que de pareilles incorrections sont trop souvent tolérées dans les devoirs de classe.

Deux des dix copies qui avaient été retenues pour l'attribution des récompenses ont été exclues du palmarès en raison de leur présentation trop négligée et de leur rédaction défectueuse.

La composition classée en tête se détachait nettement par ses qualités d'ordre, de clarté, de sincérité. La première partie y est traitée de façon à peu près complète, avec, toutefois, un oubli sans doute imputable à une erreur matérielle. Dans les questions géométriques, l'auteur reste strictement dans le programme de Première. Il recourt plus volontiers au calcul qu'à l'étude directe des propriétés de la figure, et manque parfois de pénétration. C'est, au total, un bon esprit, juste, équilibré, solide. Sa copie est comparable aux copies primées dans les concours de 1923 et 1924.

La seconde place a été attribuée à un concurrent dont les qualités de géomètre ressortent surtout dans la solution de la troisième partie du problème. Il s'est servi de l'inversion, sans trop en abuser, et il s'est égaré, à la fin, dans l'usage des propriétés du tétraèdre orthocentrique. C'est surtout à cause du peu de soin apporté à la rédaction qu'il n'a eu qu'un 3<sup>e</sup> prix.

La troisième copie, récompensée d'un premier accessit, est simplement moyenne, en algèbre comme en géométrie. Elle renferme une erreur grave, à propos de la recherche du lieu du centre de la sphère ABMM'.

Enfin, les cinq copies qui suivent, notablement inférieures à la précédente, présentent entre elles peu d'écart, malgré la diversité des qualités et des défauts dont leurs auteurs font preuve. La Commission a été indulgente en leur accordant les 6<sup>e</sup>, 8<sup>e</sup>, 9<sup>e</sup>, 10<sup>e</sup> accessits.

*L'Inspecteur général,  
Président de la Commission de correction,  
A. MARIJON.*

---

## V. Communications diverses

### 1. Enquête sur le rôle et la place des sciences dans l'enseignement secondaire

Le *Bulletin* n° 42 a signalé l'enquête ouverte par *La Revue Universitaire* sur le rôle et la place des sciences dans l'enseignement secondaire. Un questionnaire, reproduit plus loin, a été publié dans le numéro de novembre 1925 de *La Revue Universitaire*; il était précédé d'un exposé des motifs dont voici quelques extraits :

La réforme de l'enseignement secondaire entreprise par M. Léon BÉRARD, modifiée et complétée par MM. François ALBERT et A. DE MONZIE, a provoqué des discussions qui ont porté surtout sur les disciplines littéraires. Au point de vue des sciences, on s'est borné à des critiques d'ordre général concernant les programmes de 1902, sans trop se préoccuper des modifications successives qu'ils avaient subies. Seul l'enseignement des mathématiques a été l'objet d'une controverse, brève d'ailleurs, au Conseil supérieur de l'Instruction publique. Ne conviendrait-il pas, dans ces conditions, de tenter pour les études scientifiques un examen analogue à celui qui a été fait si largement pour les études littéraires ? *La Revue Universitaire*, saisie de la question par un groupe de professeurs de sciences, y a répondu par l'affirmative, et elle a décidé d'ouvrir une enquête sur le rôle et la place des sciences dans l'enseignement secondaire, ainsi que sur leur importance au point de vue de la formation intellectuelle.

.....

La réforme de 1902 a reconnu et consacré pour la première fois le rôle éducatif que l'on doit attribuer aux sciences dans la culture générale et la formation des esprits. Mais les solutions adoptées dans les plans d'études de 1902 ont soulevé des objections sérieuses.

La première porte sur le caractère « utilitaire » que semblait présenter l'enseignement scientifique, bien qu'au fond ce défaut provint surtout de quelques passages maladroitement rédigés des Exposés des Motifs ou des Instructions pédagogiques, et de quelques alinéas des Programmes, qu'il était aisé de faire disparaître sans troubler leur économie générale.

D'autres objections sont plus graves. On a reproché aux programmes de 1902, en ce qui concerne l'enseignement scientifique, de rompre la symétrie entre les deux sections, classique et moderne, en liant en quelque sorte l'option moderne à l'option scientifique, en faisant commencer aux « modernes » l'enseignement des sciences expérimentales — physique et chimie — deux ans plus tôt qu'aux « classiques » ; en offrant enfin aux « modernes », dans le premier cycle, un enseignement mathématique plus complet qu'aux « classiques ». Certains reprochaient même à cet enseignement scientifique d'être prématuré et de s'adresser à des esprits trop jeunes pour en profiter.

Par contre, certaines sections classiques — les sections A et B du second cycle — donnaient un enseignement scientifique réduit en fait à presque rien, sans sanction réelle au baccalauréat, infligeant ainsi à leurs élèves un véritable « désarmement scientifique », au double point de vue de leur culture intellectuelle et des carrières auxquelles ils pouvaient ultérieurement viser. Les programmes de 1902 favorisaient ainsi chez les élèves une tendance fâcheuse à la « spécialisation » qui les conduisait à mépriser *a priori* toute une série de disciplines essentielles, et à sacrifier à leurs préférences ou à leurs antipathies le souci, pourtant supérieur, d'une culture bien équilibrée.

Enfin les mêmes programmes ne semblaient admettre comme culture scientifique que la forme mathématiques-physique, en ne faisant jouer aux sciences d'observation proprement dites qu'un rôle trop effacé.

Les nouveaux plans d'études réalisent-ils parfaitement l'idéal impliqué dans toutes ces critiques, et, par ailleurs, ne comportent-ils pas, — toujours au point de vue de l'enseignement scientifique, — d'autres inconvénients ? Ce sont là des questions auxquelles des réponses très diversées peuvent être faites, et sur lesquelles des opinions divergentes se sont déjà manifestées. Il serait extrêmement instructif de recueillir et de confronter les différents points de vue qui peuvent être défendus à ce sujet, et de tenter d'en tirer des conclusions d'ordre pratique pour l'avenir.

Un dernier mot, pour éviter tout malentendu : dans l'esprit des organisateurs de cette enquête, il s'agit, avant tout, — ils ne sauraient trop le répéter, — de culture générale. On a pu dire à ce propos, sous une forme un peu paradoxale, qu'il importe peut-être encore plus à ceux qui n'auront pas plus tard à s'occuper de sciences qu'aux futurs savants ou techniciens, de recevoir au lycée une solide empreinte scientifique. Il ne sera donc pas question du rôle des sciences dans la préparation à l'enseignement supérieur scientifique et aux grandes écoles techniques. Cet aspect proprement « utilitaire » du problème, dont l'importance est d'ailleurs extrême, est nettement laissé en dehors du programme de l'enquête.

#### QUESTIONNAIRE

I. — AGE. — *A quel âge estimez-vous qu'il faille commencer les études scientifiques pour qu'elles aient une action éducative efficace ?*

*On pourra envisager successivement les mathématiques, la physique, la chimie, les sciences naturelles, et citer des exemples de sujets d'études et de méthodes d'enseignement (1).*

II. — L'ÉGALITÉ SCIENTIFIQUE. — 1° *Approuvez-vous le principe de l'« égalité scientifique » ?*

2° *Dans l'affirmative, avec quelles modalités la croyez-vous réalisable ?*

(1) On évitera d'entrer dans des détails techniques ou professionnels ne pouvant intéresser que les spécialistes.

A. — *Parts respectives des sciences et des lettres dans la durée totale de l'enseignement ; répartition des diverses disciplines scientifiques dans la totalité du temps consacré aux sciences (1).*

B. — *Groupement des élèves dans les classes de sciences, soit d'après leurs groupements dans les autres enseignements, soit d'après leurs aptitudes en sciences.*

3° *Estimez-vous que le rôle des sciences dans la formation intellectuelle soit le même dans la section moderne que dans la section classique ?*

4° *Que pensez-vous de la création d'une option scientifique entre sciences abstraites et sciences concrètes, indépendante de l'option littéraire entre classiques et modernes ?*

III. — SANCTIONS. — *Quelle place désirez-vous voir attribuer aux diverses sciences, soit à l'écrit, soit à l'oral, dans les examens de culture générale (sans spécialisation) et particulièrement au baccalauréat ?*

Le dépouillement de l'enquête sera assuré par M. M. WEBER, professeur de Mathématiques spéciales préparatoires au Collège Chaptal. On est prié d'adresser les réponses, avant le 28 février 1926, à la Rédaction de la *Revue Universitaire* (Librairie Armand Colin, 103, boulevard Saint-Michel, Paris, V<sup>e</sup>).

## **2. Au sujet de la séance du 28 mai 1925 de la Section de l'Enseignement de la C. T. I.**

Le Journal des Collèges, dans son numéro 190, juillet 1925, a publié des « Méditations pour les vacances » de M. Esrié, dont voici quelques extraits :

C'était à une réunion de la section universitaire d'une grande association (2). Les représentants des mathématiciens faisaient entendre la protestation de leur catégorie contre les nouveaux programmes élaborés en janvier par le Conseil Supérieur. Il ne s'agissait rien moins, disaient ces collègues, que de tout l'avenir de la culture scientifique en France, parfaitement compromis, à leur sens, par le nouveau plan d'études.

J'étais ému ; et, me souvenant des inquiétudes manifestées à notre dernier Congrès national au sujet des répercussions que peut avoir sur la prospérité de nos établissements l'application de ces programmes, j'avais hâte qu'une ample discussion me permit d'exposer notre point de vue, qui concilie la sauvegarde des collèges avec la défense générale de la culture.

Mais, pour mon plus grand étonnement, j'ai entendu le délégué d'une autre catégorie déclarer, selon un mot déjà célèbre : « La question ne sera pas posée ». Ceci, disait-il, afin d'éviter un risque de discordance entre les éléments universitaires de l'Association qui nous réunissait.

Eh ! quoi ! Avant même que le fond fût abordé, on considérait que si, par hasard, la discussion donnait raison aux professeurs de mathé-

(1) On évitera d'entrer dans des précisions numériques excessives.

(2) Voir le *Bulletin* n° 41, page 152.

matiques et à la cause qu'ils défendaient, d'autres spécialistes ne manqueraient pas de protester. Pour quel motif ? Je me le demandais.

Ce fut, cette fois, un scientifique qui m'éclaira. Comme un professeur de lettres faisait observer qu'au Conseil Supérieur la motion COMMISSAIRE n'avait recueilli que les voix des mathématiciens, ce collègue répliqua : « Mais, parbleu ! comme un projet présenté par un historien n'aurait eu pour lui que la voix du professeur d'histoire ; de même que le projet BÉRARD n'a été soutenu que par la Franco-ancienne. »

En sommes-nous là ! Je ne suis pas si pessimiste. Je crois tout de même que sur ces problèmes d'enseignement la grande majorité de nos collègues oublie, pour leur honneur, leur propre catégorie, et ne songent qu'à l'intérêt général.....

---

## DEUXIÈME PARTIE

---

### Géométrie des Nombres

---

Sur la demande de l'Ecole des Hautes-Etudes de Bruxelles, M. CHATELET, recteur de l'Académie de Lille, professeur honoraire à la Faculté des Sciences, fit en décembre 1924 deux conférences sur la géométrie des nombres. J'ai cru intéresser mes collègues en leur donnant dans ce *Bulletin* quelques notes que j'ai prises au cours de la première. Les figures sont la reproduction des dessins en couleur sur tableau noir qui ont servi à illustrer l'exposition.

M. ROUSSEAU,  
*Professeur au Lycée de Lille.*

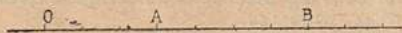
#### I. Modules de nombres

*Interprétation géométrique de notions arithmétiques courantes*

1. — On dit que deux longueurs sont commensurables quand il existe une troisième longueur contenue un nombre entier de fois dans chacune d'elles.

Portons sur une droite à partir d'un point  $O$  les deux longueurs  $OA$  et  $OB$  et soit  $Ox$  la troisième longueur. En portant bout à bout des segments égaux à  $Ox$  à partir de  $O$ , on obtient un réseau de points équidistants et dans la suite de ces points on rencontre nécessairement  $A$  et  $B$ . Ceci est vrai, que  $OA$  et  $OB$  soient de même sens ou de sens différents. Par suite :

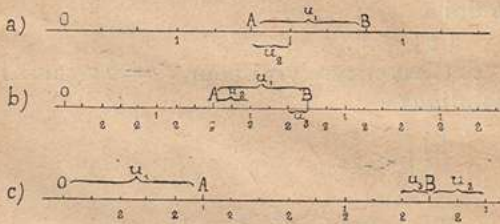
*La condition nécessaire et suffisante pour que  $OA$  et  $OB$  soient commensurables est qu'il existe un réseau de points équidistants comprenant  $O$ ,  $A$  et  $B$ .*



Pratiquement, comment reconnaître que OA et OB sont commensurables, ou ce qui revient au même, appartiennent à un même réseau de points équidistants ?

Supposons OA et OB commensurables, OA plus petit que OB.

Le point A divise OB en deux segments dont l'un  $u_1$  au plus égal à la moitié de OB contient la commune mesure un nombre entier de fois. Portons bout à bout des segments égaux à  $u_1$ . Tous les points obtenus appartiendront au réseau. Si parmi eux se trouvent A et B la vérification est faite. Sinon A et B divisent les intervalles qui les contiennent



respectivement en deux segments dont l'un est au plus égal à la moitié de l'intervalle total. Soit  $u_2$  le plus petit. Il contient la commune mesure un nombre entier de fois. Portons bout à bout des segments égaux

à  $u_2$  (1). Tous les points obtenus appartiendront au réseau. Si, parmi eux se trouvent A et B la vérification est faite..., etc.

L'opération se continuera jusqu'à ce qu'on trouve A et B; il en sera ainsi nécessairement, parce que les segments  $u_1, u_2, \dots$  dont chacun est au plus égal à la moitié du précédent décroissent indéfiniment et ne peuvent pas devenir plus petits que la commune mesure que l'on a supposée exister.

Ainsi, quand l'opération que l'on vient de décrire se termine, OA et OB sont commensurables; sinon ils sont incommensurables et réciproquement.

2. — Nous allons essayer de traduire cette méthode de recherche par l'énoncé d'une propriété; nous donnerons d'abord deux définitions.

1. — Nous appellerons *module* de nombres un ensemble de nombres renfermant la somme et la différence de deux quelconques d'entre eux.

Si un module renferme des nombres  $a, a', a'', \dots$  il renfermera tous les nombres

$$\xi = ua + va' + wa'' + \dots$$

$u, v, w, \dots$  désignant des nombres entiers quelconques positifs ou négatifs.

2. — Un module est *type* s'il est constitué par tous les multiples  $\eta$  d'un même nombre  $a$  :

$$\eta = ua$$

$u$  étant un entier quelconque.

Tous les points  $\eta$ , portés sur une droite constituent un réseau de points équidistants et réciproquement un réseau de points équidistants est un module type. On a alors la propriété suivante :

Pour qu'un module de nombres

$$\xi = ua + va' + wa'' + \dots$$

(1) Si un point, A, par exemple, appartient au réseau, on ne s'occupe que de B. — Voir la figure 2 (b).

soit type, il faut et il suffit qu'il n'y ait qu'un nombre fini de nombres  $\xi$  inférieurs, en valeur absolue, à un nombre donné positif  $\varepsilon$  :

$$|\xi| < \varepsilon.$$

La condition s'exprime encore en disant qu'il n'y a qu'un nombre fini de points du module dans un intervalle  $\alpha' \alpha x$  symétrique par rapport à l'origine. Il est évident que cela est nécessaire.

Pour établir que c'est suffisant montrons d'abord que, s'il n'y a qu'un nombre fini de solutions à

$$|\xi| < \varepsilon,$$

il n'y a aussi qu'un nombre fini à

$$|\xi| < \varepsilon'.$$

C'est bien évident si  $\varepsilon' < \varepsilon$ . C'est encore vrai pour  $\varepsilon' = 2\varepsilon$  car s'il y avait un nombre fini de solutions à

$$|\xi| < \varepsilon$$

et infini à

$$|\xi| < 2\varepsilon$$

il y en aurait une infinité à

$$\varepsilon < \xi < 2\varepsilon \quad \text{ou} \quad -\varepsilon > \xi > -2\varepsilon.$$

Leurs différences avec l'une d'elles  $\delta = \xi - \xi_0$ , seraient en nombre infini, inférieures en valeur absolue à  $\varepsilon$  et appartiendraient au module, ce qui est contraire à l'hypothèse.

La démonstration s'étend à  $4\varepsilon, 8\varepsilon, \dots, 2n\varepsilon$ , c'est-à-dire à tout nombre donné.

Soit un module tel qu'il n'y ait qu'un nombre fini de solutions à

$$0 < \xi < \varepsilon.$$

Prenons  $\varepsilon$  assez grand pour qu'il existe des solutions, et choisissons la plus petite, soit  $\omega$ . Tout nombre  $\xi$  du module est multiple de  $\omega$  ; sinon il serait enserré entre deux multiples de  $\omega$  :

$$u\omega < \xi < (u+1)\omega.$$

Mais le nombre

$$\varphi = \xi - u\omega$$

appartiendrait au module et se trouverait être inférieur à  $\omega$ , ce qui est absurde.

— Dans un module type  $x\omega$ , on dit que  $\omega$  est la base ; s'il est engendré à partir de plusieurs nombres  $a, a', a'', \dots$  on dit que ces nombres constituent une base surabondante.

— Remarquons que nous avons donné au mot module le même sens que lorsqu'on dit  $a$  défini module 8, ou  $\alpha$  défini module  $\pi$ . Module 8 ou module  $\pi$  est l'ensemble des multiples de 8 ou de  $\pi$ ,

### Exemples et applications de modules types

1. — P. G. C. D. — Considérons plusieurs nombres entiers  $a, a', a'' \dots$ . Le module qu'ils définissent est l'ensemble des nombres  $\xi = ua + va' + wa'' + \dots$  ( $u, v, w, \dots$  entiers quelconques) Tous les nombres  $\xi$  sont entiers. Il y en a donc un nombre fini inférieurs en module à un nombre  $a$  :  $|\xi| < a$ .

Donc le module est type et tous ces nombres sont donnés par la formule :

$$\xi = x.d \quad (x \text{ entier quelconque})$$

$d$  est un diviseur de  $a$  puisque  $a$  est un nombre  $\xi$ , c'est aussi un diviseur de  $a', a'', \dots$ . Mais  $d$  est lui-même un nombre  $\xi$ , c'est dire qu'il existe des entiers  $u_0, v_0, w_0, \dots$  tels que

$$d = u_0 a + v_0 a' + w_0 a'' + \dots$$

On en conclut que tout diviseur commun à  $a, a', a'', \dots$  divise  $d$ , puisque tout diviseur de plusieurs nombres divise une somme algébrique de multiples de ces nombres. Par suite :

- 1°  $d$  est le plus grand des diviseurs communs à  $a, a', a'', \dots$  ;
- 2° Il est divisible par tous les autres diviseurs communs ;
- 3° Il peut être construit par addition et soustraction à partir de  $a, a', a'', \dots$

Ce sont les propriétés fondamentales que l'on trouve dans tous les traités élémentaires d'arithmétique.

Voyons sur un exemple comment il est possible par ce procédé de calculer le p. g. c. d. Soient  $a = 5, a' = 13$ . Ils définissent le module :

$$\xi = x.5 + y.13.$$

A partir de O (fig. 2, b) portons les multiples de OA ou de 5. Il y en a deux qui enserrent B : 10 et 15. Le plus proche est 15, sa différence 2 avec 13 est un nombre du module

$$2 = 3 \times (5) - 1 \times (13).$$

Portons les multiples de 2. Ceux qui enserrent A sont 4 et 6 dont la différence 1 avec 5 appartient au module (qui comprend ainsi tous les nombres entiers). On a :

$$1 = 1 \times (5) - 2(2) = 1 \times (5) - 2[3 \times (5) - 1(13)] = 2 \times (13) - 5 \times (5).$$

On voit que ce procédé est identique à celui des divisions successives où l'on prendrait les restes minima en valeur absolue.

**2. — P. P. M. C. —** Soient encore les nombres entiers  $a, a', a'', \dots$  et tous les nombres entiers positifs ou négatifs *divisibles* à la fois par  $a, a', a'', \dots$  c'est-à-dire multiples communs de  $a, a', a'', \dots$ . L'ensemble de tous ces multiples est un module puisque la somme ou la différence de deux d'entre eux en fait partie. Ce module renferme le produit  $aa'a'' \dots$  ; il y a un nombre fini de solutions à

$$|\mu| < aa'a'' \dots ;$$

donc le module est type et ses nombres sont donnés par la formule

$$\mu = nm, \quad n \text{ entier quelconque}$$

$m$  est un multiple commun déterminé de  $a, a', a'', \dots$  puisqu'il appartient au module, il divise tout autre multiple commun ; c'est le plus petit de ces multiples. On peut déduire de là les relations entre le p. g. c. d. et le p. p. m. c.

**3. — Fractions. —** Ces démonstrations s'appliquent toujours si  $a, a', a''$  sont des fractions en nombre fini, parce que, avec cette restriction, les éléments des modules que l'on a considérés sont des fractions dont, le dénominateur est limité supérieurement.

*Exemples et applications de modules non types*

1. — Envisageons maintenant un module *non type* constitué avec deux nombres incommensurables  $a, a'$  ; formons

$$\xi = ua + va'$$

Quel que soit  $\varepsilon$  positif, il y a un nombre  $\omega$  du module tel que

$$|\omega| < \varepsilon.$$

Si  $A$  est un nombre quelconque comme  $n\omega$  appartient au module, on peut choisir  $n$  de façon que

$$|A - n\omega| < |\omega| < \varepsilon$$

c'est-à-dire qu'il y a des points du module aussi voisins qu'on veut de tout nombre  $A$ . Les points du module forment un ensemble *partout dense* sur la droite.

2. — Soit  $a = \alpha$  irrationnel et  $a' = -1$  définissant le module :

$$\xi = u\alpha - v \quad u, v \text{ entiers quelconques ;}$$

on peut trouver  $u$  et  $v$  tels que

$$|u\alpha - v| < \varepsilon \quad \text{ou} \quad \left| \alpha - \frac{v}{u} \right| < \frac{\varepsilon}{|u|}$$

c'est-à-dire qu'on peut trouver une infinité de fractions  $\frac{v}{u}$  s'approchant d'un nombre irrationnel donné de moins de  $\frac{\varepsilon}{|u|}$ .

C'est un cas particulier d'une propriété trouvée primitivement dans la théorie des fractions continues et que LEJEUNE-DIRICHLET a établie par un raisonnement direct en montrant en même temps qu'on peut approcher de  $\alpha$  de moins de  $\frac{1}{u^2}$ .

3. — Considérons  $\alpha$  comme l'abscisse curviligne d'un point sur une circonférence dont la longueur est prise pour unité. Les nombres

$$u\alpha - v$$

sont alors les abscisses des sommets de la ligne brisée régulière d'angle au centre  $\alpha$ .

Si on porte

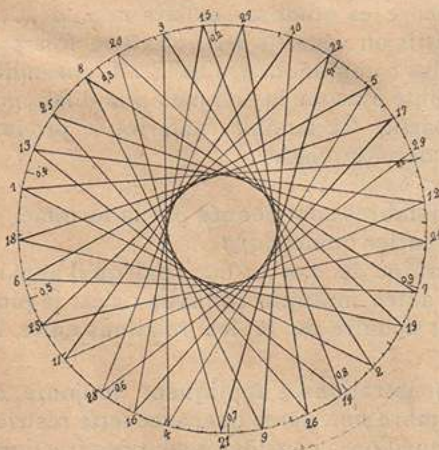
$$\alpha, 2\alpha, 3\alpha, 4\alpha,$$

on obtient des arcs dont la plus petite mesure positive est  $(u\alpha - v)$   $v$  étant la partie entière par défaut de  $u\alpha$ .

Si  $\alpha$  est irrationnel, la ligne brisée ne se ferme pas. Quel que soit  $\varepsilon$  on peut trouver  $u$  et  $v$  tels que

$$\omega = |u\alpha - v| < \varepsilon.$$

Il y a, par suite, un sommet du polygone aussi proche qu'on veut de l'origine. Comme  $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$  correspondent à des



sommets distants entre eux d'au plus  $\varepsilon$ , il y a des sommets aussi rapprochés qu'on le veut les uns des autres. Ils forment un ensemble *partout dense* sur le cercle.

4. — Soit  $f(x)$  une fonction de la variable réelle  $x$ , définie et continue pour toute valeur de  $x$ , admettant pour périodes  $a$  et  $b$ , c'est-à-dire telle que

$$f(x+a) = f(x), \quad f(x+b) = f(x).$$

en général

$$f(x+ua+vb) = f(x), \quad u \text{ et } v \text{ entiers quelconques.}$$

Les périodes appartiennent donc à un module qui, nécessairement, est type ; sinon, étant donné  $x$  quelconque, on pourrait trouver un nombre  $\alpha$  du module tel que

$$|x - \alpha| < \eta$$

et  $|f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon$   $\varepsilon$  donné.

Mais  $\alpha$  étant une période

$$f(\alpha) = f(o)$$

donc l'on aurait

$$|f(x) - f(o)| < \varepsilon$$

quel que soit  $\varepsilon$  et  $f(x)$  serait constant.

*Si une fonction continue d'une variable réelle admet deux périodes, le rapport de ces périodes est un nombre rationnel.*

## II. Modules de points (dans un plan)

1. — Considérons dans un plan un point O pris pour origine. Nous appellerons *somme* de deux points A et B le point C extrémité de la diagonale du parallélogramme construit sur OA et OB et nous écrirons

$$C = A + B.$$

En réalité, c'est une abréviation de l'égalité vectorielle :

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}.$$

L'origine O joue un rôle essentiel dans la définition de même que dans la représentation des nombres par des points d'une droite.

On voit immédiatement ce qu'il faut entendre par la différence D des points B et A,

$$D = B - A;$$

c'est le point D défini par l'égalité vectorielle

$$\vec{OD} = \vec{OB} - \vec{OA}.$$

En prenant deux axes quelconques  $Ox$ ,  $Oy$  issus de O, aux points A, B, C, D, ... on fait correspondre des couples de nombres (abscisse et ordonnée)

$$\left. \begin{matrix} x_A \\ y_A \end{matrix} \right\} \text{ pour A,} \quad \left. \begin{matrix} x_B \\ y_B \end{matrix} \right\} \text{ pour B, ...}$$

A la somme ou la différence de deux points correspond la somme ou la différence des nombres correspondants :

$$\left\{ \begin{matrix} x_C = x_A + x_B \\ y_C = y_A + y_B \end{matrix} \right. \quad C = A + B \quad \left\{ \begin{matrix} x_D = x_B - x_A \\ y_D = y_B - y_A \end{matrix} \right. \quad D = B - A.$$

L'arithmétique des points comme nous venons de la définir est donc identique à l'arithmétique des systèmes de 2 nombres.

L'utilisation de la géométrie de l'espace conduit à l'arithmétique des systèmes de 3 nombres. L'arithmétique des espaces à  $n$  dimensions conduit à l'arithmétique des systèmes de  $n$  nombres.

Les notions de somme et différence de points étant précisées, nous allons appliquer aux points les raisonnements faits plus haut pour les nombres.

2. — Nous dirons qu'un ensemble de points forme un module s'il contient la somme ou la différence de deux quelconques d'entre eux.

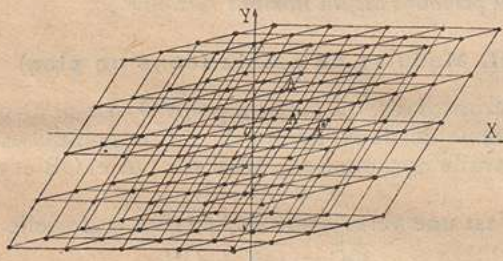
Si un module renferme les points  $A, A', A'', \dots$  il renferme tous les points

$$M = uA + vA' + wA'' + \dots \quad (u, v, w, \dots \text{ entiers})$$

dont les coordonnées par rapport à deux axes quelconques sont

$$\begin{cases} x = ua + va' + wa'' + \dots \\ y = ub + vb' + wb'' + \dots \end{cases}$$

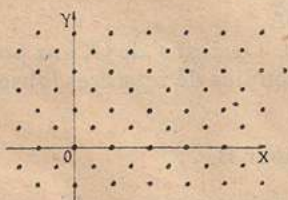
Sur la figure est esquissé un exemple de module construit à partir de 3 points  $A(3,5), A'(4,1), A''(6,0)$ . On n'en a représenté qu'un petit nombre de points, obtenus en donnant aux entiers  $u, v, w$  les valeurs  $0 \pm 1 \pm 2$ .



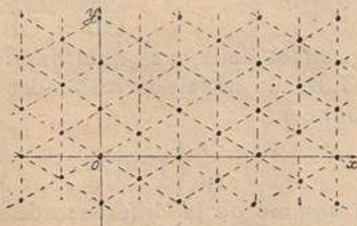
Si l'on part d'un seul point  $A$ , ses multiples  $uA$  constituent un réseau de points équidistants sur une droite.

Si on prend deux points  $A$  et  $A'$  on obtient les sommets d'un réseau de parallélogrammes répartis sur tout le plan.

Les figures en donnent deux exemples.



Module type :  $\begin{matrix} X = 2x + y \\ Y = 2y \end{matrix}$



Module type : le quinconce

3. — Nous dirons qu'un module est type s'il est constitué par les sommets d'un réseau de parallélogrammes, c'est-à-dire s'il peut être engendré uniquement à partir de deux de ses points.

Tous ses points sont donnés par la formule

$$M = uB + vB' \quad (u, v, \text{ entiers quelconques})$$

B et B' étant convenablement choisis.

*Théorème.* — La condition nécessaire et suffisante pour qu'un module de points

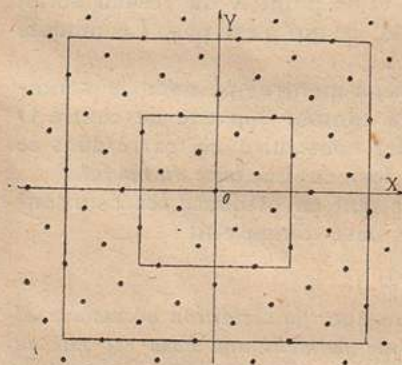
$$M = uA + vA' + wA'' + \dots \quad (u, v, w, \text{ entiers quelconques})$$

soit type est qu'il n'y ait qu'un nombre fini de ses points M dont les coordonnées x, y vérifient les inégalités.

$$\begin{cases} |x| \leq \varepsilon \\ |y| \leq \varepsilon \end{cases} \quad \varepsilon \text{ étant donné.}$$

La condition s'exprime également en disant qu'il n'y a qu'un nombre fini de points M dans un carré de centre O, de côtés égaux à  $2\varepsilon$ , parallèles aux axes. Il est évident qu'elle est nécessaire.

Montrons que si les deux relations de condition ont un nombre fini



de solutions, elles ont aussi un nombre fini de solutions pour une nouvelle valeur  $\varepsilon'$  de  $\varepsilon$ . C'est évident pour  $\varepsilon' < \varepsilon$ . Considérons  $\varepsilon' = 2\varepsilon$ ; s'il y avait une infinité de solutions aux inégalités

$$|x| \leq 2\varepsilon \quad |y| \leq 2\varepsilon$$

il y en aurait une infinité dans au moins un des 16 carrés partiels de côtés  $\varepsilon$ .

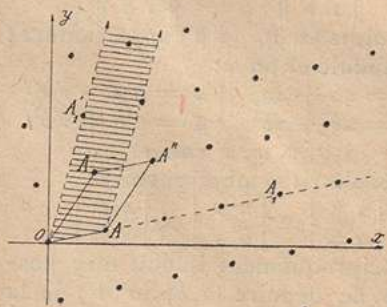
Mais si  $M_0(x_0, y_0)$  est un point déterminé et  $M(x, y)$  un point quelconque du module contenu dans ce carré partiel on a

$$\begin{cases} |x - x_0| \leq \varepsilon \\ |y - y_0| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Les points  $M - M_0$  sont des points du module; ils se trouvent dans le carré primitif de côté  $2\varepsilon$ , et y seraient en nombre infini, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Le raisonnement s'étend à  $4\varepsilon, 8\varepsilon, 2n\varepsilon$ , c'est-à-dire à tout le plan.

Démontrons maintenant que la condition est suffisante. Soient  $A_1$



et  $A_1'$  deux points du réseau et choisissons  $\varepsilon$  assez grand pour que le carré de côté  $2\varepsilon$  les contienne. Dans ce carré il y a un nombre fini de points du module. Sur  $OA_1$  prenons le point A du module le plus rapproché de O. (Ce peut être  $A_1$  lui-même). Sur la droite  $OA_1$  tous les points du module sont multiples de A : c'est une conséquence des propriétés des modules de nombres.

Formons ensuite la demi-bande

de base OA, dont les bords sont les demi-droites parallèles et de même sens OA', Au. Dans cette bande, bords compris, prenons le point A', dont la distance à OA comptée parallèlement à OA', est minima. De cette construction il résulte que :

*Le parallélogramme OAA'A' construit sur OA et OA' ne contient aucun point du module à son intérieur, ni sur les côtés.*

Il n'y en a pas sur les côtés parallèles OA' et AA'', sinon le point A' aurait été mal choisi. Il n'y en a pas non plus sur A'A'', sinon A ne serait pas le point le plus rapproché de O sur OA.

Construisons le réseau de points

$$uA + vA'.$$

Les sommets sont dans le module et il contient le module tout entier, car si un point X' du module n'appartenait pas au réseau, il serait à l'intérieur ou sur les côtés d'un parallélogramme déduit du premier OAA'A' par une translation, et un point X du réseau serait à l'intérieur ou sur les côtés de OAA'A' ce qui n'est pas. Le module type est donc construit à partir de A, A'.

La première partie de la démonstration montre que dans la condition on peut remplacer le carré par un contour convexe de centre O entourant l'origine. On peut en effet construire un carré dans ce contour. On dit que les points A et A' forment une *base du module*.

On indique parfois cette base en mettant en évidence les coordonnées a, b et a', b' des deux points de la base comme suit

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

La démonstration précédente montre que : *la condition nécessaire et suffisante pour que deux points du module forment une base est que le parallélogramme correspondant ne contienne aucun point à son intérieur ni sur ses côtés.*

Il peut d'ailleurs y avoir plusieurs bases comme le montre la figure et ces bases sont évidemment liées entre elles.

Si deux bases sont définies respectivement par

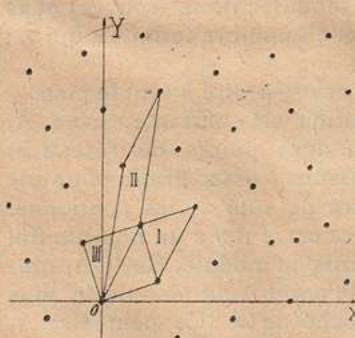
$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$$

les points (x, y), (x', y') appartiennent au module et on a :

$$\begin{cases} \alpha = ua + v\alpha' \\ \beta = ub + v'\beta' \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha' = u'a + v'\alpha'' \\ \beta' = u'b + v''\beta'' \end{cases}$$

u, v, u', v' entiers  
ce qui s'écrit symboliquement

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$



$$\text{I} \begin{cases} X = 3x + 2y \\ Y = x + y \end{cases} \quad \text{II} \begin{cases} X = 2x + y \\ Y = 4x + 7y \end{cases} \quad \text{III} \begin{cases} X = 3x - y \\ Y = x + 3y \end{cases}$$

Réciproquement il doit être possible de déduire (a, b) (a', b') de la deuxième base, c'est-à-dire de résoudre les deux équations en a, a' et

les deux équations en  $b, b'$  et d'obtenir des combinaisons à coefficients entiers. Il faut donc d'abord que

$$uv' - vu' \neq 0.$$

En outre les coefficients  $U, V, U', V'$  des relations

$$\begin{cases} a = Uz + Vz' & a' = V'z + V'z' \\ b = U\beta + V\beta' & b' = V'\beta + V'\beta' \end{cases}$$

doivent être entiers. Il en est de même de la combinaison :

$$UV' - VU' = \frac{1}{uv' - vu'}.$$

Comme le dénominateur est entier, il est nécessairement égal à  $\pm 1$

$$uv' - vu' = \pm 1.$$

Les formules de résolution montrent que cette condition est suffisante. On dit que

$$\begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}$$

définit une substitution unimodulaire si  $uv' - vu' = \pm 1$ . Cette définition acquise, on a la propriété :

*Toute base se déduit d'une base donnée par une substitution unimodulaire.*

De cette propriété il résulte que le déterminant d'une base a toujours la même valeur absolue ou encore que les parallélogrammes de toutes les bases ont même surface.

#### Applications des modules de points

1. — Considérons un module à *points entiers*, c'est-à-dire dont les coordonnées sont entières. Il est extrait d'un premier quadrillage et n'a évidemment qu'un nombre fini de points à l'intérieur d'un carré de centre  $O$  ; donc il est type. Les points ont pour coordonnées

$$\begin{cases} x = ua + va' \\ y = ub + vb' \end{cases} \quad u, v, \text{ entiers quelconques.}$$

Il renferme des points sur  $Ox$  et sur  $Oy$ . Cherchons une base en reprenant le raisonnement général, mais en partant de  $Ox$  et  $Oy$ . Choisissons comme premier point de base,  $A$ , celui qui est le plus rapproché de  $O$  sur la partie positive de  $Ox$ . Les coordonnées sont

$$(x, 0) \quad x > 0.$$

Parmi les points d'abscisse comprise entre  $0, x$  il y en a un  $A'$  dont l'ordonnée positive est la plus petite, de coordonnées

$$(x', \beta) \quad 0 \leq x' < x \quad \beta > 0.$$

Toute base du module peut être ramenée à la base  $A, A'$ , c'est-à-dire qu'à tout système de quatre nombres entiers

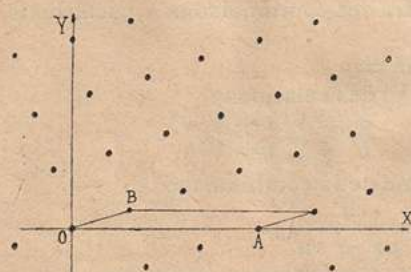
$$\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$$

on peut faire correspondre un système et un seul de quatre nombres entiers

$$\begin{matrix} x & 0 & x > 0 & \beta' > 0 & 0 \leq x' < x. \\ x' & \beta' & & & \end{matrix}$$

déduit du précédent par une substitution unimodulaire.

C'est HERMITE qui a donné un énoncé précis de cette propriété déjà



ancienne et en a montré l'importance et l'extension à des tableaux carrés de  $n$  nombres.

La base obtenue s'appelle la *base réduite* d'HERMITE.

En explicitant cette propriété on retrouverait les propriétés du p. g. c. d. et le théorème de BEZOUT.

*Remarque.* — Un module  $M'$  inclus dans un module  $M$  est appelé

*sous-module* de  $M$ . Un module de points entiers est sous module du module type constitué par tous les points d'un quadrillage, c'est pourquoi il est type lui-même.

2. — Soit à résoudre en nombres entiers l'équation

$$Ax + By + Cz = 0 \quad A, B, C \text{ entiers.}$$

Les solutions sont des points entiers de l'espace à trois dimensions situés dans un même plan  $P$  passant par l'origine. Ces points constituent un module parce que la somme de deux points

$$x_1 + x_2 \quad y_1 + y_2 \quad z_1 + z_2$$

est encore une solution. Ce module *plan* est type. Donc ses points se déduisent de deux d'entre eux par addition et soustraction

$$\begin{cases} x = ua + va' \\ y = ub + vb' \\ z = uc + vc'. \end{cases}$$

Pour trouver  $a, b, c, a', b', c'$  on pourrait faire l'extension de la base d'Hermite à l'espace à 3 dimensions.

3. — Considérons trois points

$$A_1(a_1, b_1), A_2(a_2, b_2), A_3(a_3, b_3)$$

Les points  $uA_1 + vA_2 + wA_3$  forment un module. S'il est type on a

$$\begin{cases} A_1 = u_1B + v_1C \\ A_2 = u_2B + v_2C \\ A_3 = u_3B + v_3C \end{cases}$$

Si  $A_1, A_2, A_3$  ne sont pas en ligne droite avec l'origine,  $u_1, v_1$  ne sont pas *simultanément* proportionnels à  $u_2, v_2$  et  $u_3, v_3$ ; les mineurs

$$U_1 = u_2v_3 - u_3v_2 \quad U_2 = u_3u_1 - u_1v_3 \quad U_3 = u_1v_2 - u_2v_1$$

ne sont pas tous nuls et on a

$$U_1A_1 + U_2A_2 + U_3A_3 = 0$$

c'est-à-dire qu'il y a une même relation linéaire et homogène à coefficients entiers entre les abscisses et les coordonnées des points

$$\begin{cases} U_1a_1 + U_2a_2 + U_3a_3 = 0 \\ U_1b_1 + U_2b_2 + U_3b_3 = 0 \end{cases}$$

Inversement quand cette relation a lieu, les points  $A_1, A_2, A_3$  appartiennent au module type défini par

$$\frac{1}{U_3} A_1 \quad \frac{1}{U_3} A_3$$

par suite le module formé par les trois points, contenu dans un module type, est lui-même type.

Par conséquent, quand il n'y a pas une même relation linéaire et homogène à coefficients entiers entre les coordonnées des trois points, le module qu'ils définissent n'est pas type et quel que soit  $\varepsilon$  il existe des entiers  $u, v, w$ , tels que

$$\begin{aligned} |ua_1 + va_2 + wa_3| &< \varepsilon \\ |ub_1 + vb_2 + wb_3| &< \varepsilon \end{aligned}$$

Prenons, par exemple,

$$\begin{aligned} a_1 = \sqrt{2} \quad a_2 = 0 \quad a_3 = -1 \\ b_1 = \sqrt{3} \quad b_2 = -1 \quad b_3 = 0. \end{aligned}$$

Quel que soit  $\varepsilon$  on peut trouver  $u, v, w$  tels que

$$|u\sqrt{2} - w| < \varepsilon \qquad \left| \sqrt{2} - \frac{w}{u} \right| < \frac{\varepsilon}{|u|}$$

ou

$$|u\sqrt{3} - v| < \varepsilon \qquad \left| \sqrt{3} - \frac{v}{u} \right| < \frac{\varepsilon}{|u|}$$

c'est-à-dire qu'on peut approcher de deux irrationnelles par des fractions de même dénominateur d'une quantité inférieure à toute fraction donnée à l'avance de l'inverse de ce dénominateur.

Les points

$$x = u\sqrt{2} - w$$

$$y = u\sqrt{3} - v$$

forment un ensemble partout dense dans le plan (1).

A. CHATELET,

Recteur de l'Académie de Lille.

## Sur les méthodes en géométrie élémentaire Exemple déduit du cercle des neuf points

Dans les divers examens ou concours, Baccalauréat, Licence, Grandes Ecoles, voire même Agrégation, beaucoup de copies de géométrie semblent attacher plus de prix à la découverte du résultat qu'à la méthode ; l'argot scolaire emploie les mots : *truc*, *astuce*, *ficelle*, qui correspondent à une exagération de l'ingéniosité au détriment de la faculté de raisonnement. Pourtant, au lieu que l'ingéniosité cherche à supplanter le raisonnement, il est désirable que le raisonnement intervienne pour développer l'ingéniosité. Bien que cette remarque ne soit pas neuve, puis-je, sur un exemple simple, tel que celui du cercle des neuf points, montrer comment un raisonnement a priori permet, avant même tout tracé de figure, de trouver une méthode simple ?

(1) En général un module de points non type constitue soit un ensemble partout dense dans le plan soit un ensemble dense seulement sur des droites parallèles et équidistantes.

Sur les neuf points en jeu, il y a évidemment trois points attachés à chaque sommet A, B ou C ; au sommet A correspondent les pieds A', a de la médiane et hauteur issues de A, et le milieu a' du segment AH (H, orthocentre). Il est donc naturel de chercher à prouver que le centre P du cercle circonscrit à A' a a', ne dépend pas du choix particulier du sommet A, B, C, non plus que le rayon.

Or A' a a' est triangle rectangle ; P est le milieu de l'hypoténuse a'A' ; O étant le centre du cercle circonscrit à ABC, les triangles OA'B' et HAB sont semblables dans le rapport de 1 à 2 (côtés parallèles et de sens contraire) ; OA', Aa', a'H sont des segments égaux, parallèles et de même sens ; A'a' = OA = R, rayon du cercle circonscrit à ABC (côtés opposés d'un parallélogramme) ; A'a' et OH se coupent en leur milieu P (diagonales d'un parallélogramme). La conclusion est immédiate : les neuf points sont sur le cercle de rayon  $\frac{R}{2}$  ayant son centre au milieu de OH. Le cercle circonscrit à ABC et le cercle des neuf points admettent les rayons parallèles et de même sens OA et Pa', les rayons parallèles et de sens contraire OA et PA' ; on en déduit le centre de similitude externe H, puis le centre de similitude interne G au croisement de la droite OPH avec AA', au tiers de AA' à partir de A' ; donc G est le centre de gravité de ABC.

B. GAMBIER,

Professeur à la Faculté des Sciences de Lille

## Ouvrages reçus

A. GRÉVY, professeur au Lycée St-Louis : *Arithmétique élémentaire*, à l'usage des classes de Sixième et Cinquième, conforme aux programmes du 3 juin 1925, 8<sup>e</sup> édition ; un volume 18 × 12, 304 pages, cartonné : 12 fr. 25 (librairie Vuibert, 63, boulevard St-Germain, Paris, 5<sup>e</sup>).

A. GRÉVY, professeur au Lycée St-Louis : *Arithmétique et Algèbre*, à l'usage des classes de Quatrième et de Troisième, conforme aux programmes du 3 juin 1925 ; un volume 18 × 12, 356 pages, cartonné : 13 fr. 75 (Librairie Vuibert).

A. GRÉVY, professeur au lycée St-Louis : *Géométrie plane* à l'usage des classes de Quatrième et de Troisième, conforme aux programmes du 3 juin 1925 ; un volume 18 × 12, 224 pages, 178 figures ; cartonné : 10 fr. (Librairie Vuibert).

---

Le Gérant : A. COUESLANT.

---

CAHORS, IMPRIMERIE COUESLANT (personnel intéressé). — 32.072

## Extraits des Tables du Bulletin

Les chiffres arabes et les chiffres romains entre parenthèses indiquent respectivement les numéros du *Bulletin* et les numéros spéciaux.

### AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES :

Rapports sur les Concours de 1923 (35), de 1924 (38).

Énoncés des problèmes des Concours de 1922 (27), de 1923 (I), de 1924 (II).

### AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES DES JEUNES FILLES :

Rapports sur les Concours de 1921 (24), de 1922 (28), de 1923 (33), de 1924 (38).

Énoncés des problèmes des Concours de 1921 (24), de 1922 (27), de 1923 (31), de 1924 (II).

### CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES ET COLLÈGES :

Classe de Mathématiques A-B : Rapports sur la composition de Mathématiques en 1922 (29), en 1923 (34), en 1924 (40).

Classe de Première C-D : Rapports sur la composition de Mathématiques en 1923 (34), en 1924 (40).

Énoncés des problèmes des Concours de 1922 (26), de 1923 (31), de 1924 (II).

### CONSEIL ACADÉMIQUE DE PARIS :

Rapports sur l'enseignement des Mathématiques en 1922 (29), en 1923 (32), en 1924 (37).

S'adresser au trésorier, M. FLAVIEN, en envoyant 1 fr. par numéro demandé.  
Paris, C/c 8-63 — L. FLAVIEN. — 4, square Lagarde, Paris, 5<sup>e</sup>

## ÉCOLE D'ÉLECTRICITÉ INDUSTRIELLE DE MARSEILLE

RECONNUE PAR L'ÉTAT - (Décret du 3 Janvier 1922)

8 & 10, Rue Camoin-Jeune & Saint-Barnabé

Honorée de Nombreuses Subventions

Hors-concours-Membre du Jury (Exposition Internationale d'Electricité, Marseille 1908)

Diplôme d'Ingénieur -- Diplôme de Monteur

Section d'Automobile et d'Aviation (Mécaniciens)

Section de T. S. F. et de Préparation aux P. T. T.

(Surnuméraires-Mécanicien)

Externat - Demi-pension - Internat

Envoi du Programme sur demande

**INSTITUT POLYTECHNIQUE DE L'OUEST**  
**rattaché à la Faculté des Sciences de Rennes**  
3, rue Saint-Clément, Nantes

L'Institut polytechnique de l'Ouest comprend :

**I. — L'Ecole Supérieure des Constructions Navales.**

Durée des études : 4 ans pour les bacheliers-mathématiques ; — 3 ans pour les candidats qui subissent avec succès un examen d'admission portant sur le programme de Mathématiques spéciales des Lycées, l'épreuve de mécanique exceptée ; — 1 an pour les ingénieurs diplômés des Ecoles d'Arts et Métiers ou des Grandes Ecoles.

**II. — Une Ecole d'Elèves-Ingénieurs.**

Durée des études : 3 ans pour les bacheliers-mathématiques ; — 2 ans après examen sur le programme de Mathématiques spéciales, mécanique exceptée ; — 1 an pour les ingénieurs diplômés des Ecoles d'Arts et Métiers ou des Grandes Ecoles.

Spécialités envisagées : construction mécanique et moteurs thermiques — Construction électrique — Métallurgie-Fonderie — Travaux Publics et Chemins de fer.

Possibilité d'acquérir en même temps la licence ès-sciences (Mathématiques générales, Mécanique rationnelle, Calcul différentiel et intégral, Mécanique appliquée, Physique générale et Physique appliquée).

**III. — Une Ecole de Techniciens.**

**IV. — Des Ecoles préparatoires aux emplois techniques de l'Etat,**  
à savoir :

- 1° Une Ecole préparatoire aux Sections Elèves-Ingénieurs de l'Etat :
  - a) de l'Ecole Supérieure des Postes et Télégraphes ;
  - b) de l'Ecole Supérieure d'Aéronautique.
- 2° Une Ecole préparatoire à l'Ecole Normale Technique.
- 3° Une Ecole préparatoire à l'Ecole des Elèves-Officiers-Mécaniciens de la Marine de l'Etat.
- 4° Une Ecole des Travaux Publics préparatoire aux emplois dans les Ponts et Chaussées, dans la Voirie et dans les Chemins de fer.

— *Les programmes sont adressés gratuitement sur demande* —

LIBRAIRIE ARMAND COLIN, 103, Boulevard Saint-Michel, PARIS 5<sup>e</sup>

(R. C. Seine 28.0 5)

## SCIENCES MATHÉMATIQUES

NOUVEAU COURS DE MATHÉMATIQUES, par BOREL-MONTEL

- Arithmétique (*Classes préparatoires des Lycées et Collèges de garçons et de jeunes filles*), par M. Henri GONON. 1 vol. in-18, illustré, cart. .... 4 fr. 20
- Arithmétique (*Classes de 8<sup>e</sup> et 7<sup>e</sup> des Lycées et Collèges de garçons et de jeunes filles*), par M. Henri GONON. 1 vol. in-18, illustré, cart. .... 6 fr. 50
- Algèbre (*Classes de 3<sup>e</sup> A ; 2<sup>de</sup> et 1<sup>re</sup> AB ; 3<sup>e</sup> B ; 2<sup>de</sup> CD et Enseignement secondaire de jeunes filles*), par MM. Emile BOREL et Paul MONTEL. 1 vol. in-18, cartonné. . . 12 fr. »

E. DESPORTES

- Géométrie descriptive (*Première CD et Mathématiques AB*), par M. E. DESPORTES. Un vol. in-8<sup>o</sup> raisin, broché. .... 25 fr. »

COURS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES (COURS DARBOUX)

- |  |   |
|--|---|
| Leçons d'arithmétique théorique et pratique, par M. Jules TANNERY ( <i>Edition entièrement refondue</i> ). Un vol. in-8 <sup>o</sup> , broché. .... 40 fr. | Leçons de Géométrie élémentaire, par M. Jacques HADAMARD ( <i>Nouvelle édition revue et corrigée</i> ). |
| Leçons d'algèbre élémentaire, par M. Carlo BOURLET. ( <i>Edition entièrement refondue</i> ). In-8 <sup>o</sup> , broché. .... 40 fr.                       | I. Géométrie plane. In-8 <sup>o</sup> , broché. 30 fr.  |
| Leçons de Trigonométrie rectiligne, par M. Carlo BOURLET. In-8 <sup>o</sup> , broché. .... 30 fr.  | II. Géométrie dans l'espace. In-8 <sup>o</sup> , broché (5 <sup>e</sup> Edition). .... 50 fr.           |
|  | Leçons de Cosmographie, par MM. TISSERAND et ANDOYER. Un vol. in-8 <sup>o</sup> , broché. .... 30 fr.   |

## MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

POL SIMON

Chef des Travaux pratiques de Mathématiques à la Faculté des Sciences de Nancy

## LA RECHERCHE DES LIEUX GÉOMÉTRIQUES EN GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

A l'usage des classes de Mathématiques spéciales et des Instituts techniques des Facultés des Sciences

- Un vol. in-8<sup>o</sup>, avec 142 exercices gradués résolus, broché. .... 25 fr. »

- |  |  |
|--|--|
| Cours de Géométrie Analytique, à l'usage des candidats aux Ecoles Centrale et Navale, des Elèves de 1 <sup>re</sup> Année de Mathématiques Spéciales, par MM. TRESSE et THYBAUT. Nouvelle édition conforme aux derniers programmes). Un vol. in-8 <sup>o</sup> , 267 fig., broché. .... 40 fr. | Cours d'Algèbre (Préparation à l'Ecole Normale supérieure, à l'Ecole polytechnique et à l'Ecole centrale), par M. B. NIEWENGLOWSKI. ( <i>Edition conforme aux derniers programmes</i> ). |
|  | Tome I. — In-8 <sup>o</sup> raisin, broché. .... 30 fr.  |
|  | Tome II. — In-8 <sup>o</sup> raisin, broché. .... 40 fr.   |

MASSON & C<sup>IE</sup>, ÉDITEURS  
120, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, PARIS (VI<sup>e</sup>)

## Cours de Mathématiques

PAR

H. COMMISSAIRE

Ancien élève de l'École Normale Supérieure,  
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand

Leçons d'Arithmétique (6 <sup>e</sup> et 5 <sup>e</sup> A et B, Programme 1925).	8 fr. 50
Leçons d'Arithmétique et de Géométrie (4 <sup>e</sup> A et B, progr. 1925).....	8 fr. 20
Leçons d'Algèbre et de Géométrie (3 <sup>e</sup> A), 2 <sup>e</sup> édit.....	8 fr. 20
Leçons d'Algèbre et de Géométrie (3 <sup>e</sup> B), 2 <sup>e</sup> édit.....	11 fr. »
Leçons d'Algèbre (Classes de 2 <sup>e</sup> C et D), 5 <sup>e</sup> édition.....	9 fr. 60
Leçons de Trigonométrie (et compléments d'Algèbre) (Classes de 1 <sup>re</sup> C et D), 5 <sup>e</sup> édition.....	9 fr. 60
Leçons d'Arithmétique (Classes de Mathématiques A et B), 2 <sup>e</sup> édit.....	11 fr. »
Leçons de Mécanique (Math. A et B), nouvelle édition simplifiée.....	13 fr. 50
Leçons d'Algèbre et de Trigonométrie, 4 <sup>e</sup> édition....	21 fr. »
Leçons de Cosmographie (Math. A et B et Philosophie)	11 fr. »

## Exercices de Mathématiques

PAR

H. COMMISSAIRE

Professeur au Lycée-le-Grand

E. ANZEMBERGER

Professeur au Lycée Janson-de-Sailly

Exercices d'Algèbre et de Trigonométrie (Math. A et B). Solutions des Exercices et Problèmes proposés dans les Leçons d'Algèbre et de Trigonométrie. 1 vol. in-8°, avec figures, cart.....	19 fr. »
Exercices d'Algèbre et de Trigonométrie (2 <sup>e</sup> et 1 <sup>re</sup> C et D). Solutions des Exercices et Problèmes proposés dans les Leçons d'Algèbre (2 <sup>e</sup> C et D) et les Leçons de Trigonométrie (1 <sup>re</sup> C et D). 1 vol. in-8°, avec fig., cart.....	16 fr. 50
Exercices d'Arithmétique (Math. A et B). Solutions des Exercices et Problèmes proposés dans les Leçons d'Arithmétique, cart.....	16 fr. »