

## DEUXIÈME PARTIE

### Les Mathématiques en Italie

J'avais annoncé, en publiant sur l'invitation de notre président, M. WEILL, quelques détails sur l'enseignement des mathématiques en Italie (1), que je donnerais des énoncés de questions ayant fait l'objet de la composition écrite à l'examen de *Maturité*. M. MARCOLONGO a bien voulu m'envoyer les textes proposés en 1924 et 1925 ; on les trouvera plus loin. Il me donne en même temps des renseignements, qui me paraissent particulièrement intéressants, sur le recrutement des professeurs pour les établissements d'enseignement moyen : Instituts moyens inférieurs, Gymnases, Instituts moyens supérieurs.

On verra à la suite de ces quelques lignes les énoncés des questions données ces dernières années aux épreuves écrites des concours annuels correspondants ; la durée des compositions est de cinq heures. Les examens oraux consistent en une leçon sur les programmes des classes des *Instituts* ou Gymnases, et en interrogations sur des programmes que les Universités publient chaque année. Ces programmes dont j'ai reçu un exemplaire, portent sur toutes les sciences. D'ailleurs les professeurs doivent enseigner les mathématiques et la physique dans les Instituts supérieurs, et les mathématiques, les sciences naturelles et la comptabilité dans les Instituts inférieurs.

Chaque commission d'examen est composée de trois membres. Deux sont des professeurs d'Université, le troisième est un professeur des écoles secondaires.

On voit qu'il s'agit, dans les concours dont je viens de parler, de quelque chose comme cette agrégation scientifique pour les classes du Premier Cycle dont il a été question à certaines époques. M. MARGOLONGO m'écrit : « Je crois que c'est assez bien arrangé et par la longue expérience que j'ai faite, depuis environ 20 ans, je puis vous assurer que le choix des professeurs par cette méthode a donné des fruits très bons. »

Ch. BIOCHE,

*Professeur honoraire au Lycée Louis-le-Grand.*

#### Problèmes proposés à l'examen de Maturité scientifique

**Juillet 1924.** — Deux circonférences de rayon  $r$  et  $R$  sont tangentes intérieurement. Trouver sur la tangente commune un point tel que les autres tangentes menées par ce point aux deux circonférences forment un angle donné  $\gamma$ .

A quelle condition doit être soumis  $\gamma$  pour que le problème soit possible ?

(1) Voir le *Bulletin* n° 40, avril 1925, page 118.

**Octobre 1924.** — Un rectangle tournant successivement d'un tour complet autour de sa base et de sa hauteur engendre deux cylindres dont la mesure des volumes est triple du volume de la sphère de rayon  $a$ . Sachant que le périmètre du rectangle est  $2p$ , calculer la base et la hauteur du rectangle.

**Juillet 1925.** — On donne un cylindre circulaire droit de rayon  $r$  et de hauteur  $h$ , et une sphère de rayon  $r$  dont le centre est sur l'axe du cylindre, et qui est tout entière à l'intérieur du cylindre.

a) Déterminer la position du centre de la sphère de façon que son volume soit moyenne proportionnelle entre ceux des deux corps ronds déterminés par la sphère et le cylindre.

b) Examiner les deux cas  $h = 4r$   $h = 7r$

c) En tenant compte des conditions de réalité et des conditions de possibilité géométrique montrer que  $4r \leq h \leq 7r$

### Problèmes proposés aux Concours pour le recrutement des professeurs

#### INSTITUTS MOYENS INFÉRIEURS

**Septembre 1923.** — I. Résoudre le système d'équations :

$$\begin{aligned}x^2 + xy + y^2 &= a^2 \\ x^2 - y^2 &= b^2\end{aligned}$$

où  $a$  et  $b$  sont des quantités réelles connues.

Discuter les solutions en regardant  $x$  et  $y$  comme les coordonnées d'un point d'un plan ; interpréter les équations et les résultats obtenus, en traçant les graphiques correspondants.

Calculer, pour des valeurs numériques convenables attribuées à  $a$  et  $b$ , les racines du système proposé, avec une approximation donnée.

II. Exposer quelques considérations générales pour la discussion des problèmes du 2<sup>e</sup> degré, c'est-à-dire dont la solution dépend d'une équation du 2<sup>e</sup> degré. En faire l'application au problème consistant à inscrire dans une demi-ellipse (de demi-axes  $a$  et  $b$ ) un rectangle de façon qu'il ait deux sommets sur l'un des axes et qu'on connaisse le périmètre ou la surface.

Donner toujours l'interprétation géométrique des équations et la construction des relations avec la règle et le compas.

**Juin 1924.** — I. Entre les cinq membres réels,  $x, y, z, u, v$ , existent les trois solutions suivantes :

$$\begin{aligned}x(1 + u^2 + v^2) &= 2u \\ y(1 + u^2 + v^2) &= 2v \\ z(1 + u^2 + v^2) &= u^2 + v^2 - 1.\end{aligned}$$

En déduire que l'on a :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

et calculer  $u$  et  $v$  en fonction de  $x, y, z$ .

En interprétant  $x, y, z$  comme les coordonnées orthogonales d'un point  $P$  d'une sphère de rayon 1 ayant son centre à l'origine des axes,  $u$  et  $v$  comme les coordonnées d'un point  $P_1$  du plan des  $xy$ , étudier la transformation définie par les formules précédentes.

On pourra par exemple démontrer que les points  $P$  et  $P_1$  sont alignés avec le point  $N(0, 0, 1)$ ; que le produit des distances de  $P$  et  $P_1$  à  $N$  est constant; que, si  $P$  décrit sur la sphère un cercle dont le plan est  $\sigma$ , le point  $P_1$  décrit dans le plan des  $xy$  un cercle (ou une droite); que le centre de ce cercle et le pôle de  $\sigma$  par rapport à la sphère sont alignés avec  $N$ .

**II.**  $A$  est un point d'une circonférence de rayon  $a$  et de centre  $o$ . On prend  $Ao$  comme axe positif des abscisses, avec l'origine en  $A$ , déterminer sur cette droite un point  $P$  tel que les tangentes menées de  $P$  à la circonférence, forment avec la tangente en  $A$  un triangle isocèle de périmètre donné.

Discuter le problème, en considérant séparément le cas où  $P$  est sur la partie négative de l'axe, ou sur la partie positive. Dans le dernier cas construire les solutions par l'intersection d'une parabole et d'un cercle et déterminer le triangle de périmètre minimum.

#### GYMNASES

**Mars 1924.** —  $ABC$  étant un triangle,  $O$  le pied de la hauteur menée de  $C$  sur  $AB$ , dans le système d'axes cartésiens orthogonaux qui a pour origine  $O$ , pour axe des  $x$ ,  $AB$ , pour axe des  $y$ ,  $OC$ , les coordonnées de  $A$  sont  $(\alpha, 0)$ , celles de  $B$   $(\beta, 0)$ , celles de  $C$   $(0, h)$ . On considère le système de coniques :

$$x^2 + 2\lambda xy - y^2 - (z + \beta)x + \left(h - \frac{z\beta}{h}\right)y + z\beta = 0.$$

Démontrer que ces coniques sont des hyperboles équilatères passant par  $A, B, C$ , et par le point de rencontre des trois hauteurs du triangle, et trouver le lieu des centres des hyperboles.

**Mai 1925.** —  $x, y, z$  sont exprimées au moyen de la variable  $u$  et de la constante  $a$  par les formules :

$$(I) \begin{cases} x = 2a \cos u, \\ y = a(3 \cos u - \cos 3u), \\ z = a(3 \sin u - \sin 3u). \end{cases}$$

Démontrer qu'on a la relation :

$$3x^2 + y^2 + z^2 = 16a^2$$

Éliminer la variable  $u$  entre la 1<sup>re</sup> et la 2<sup>e</sup> des équations (I) et étudier la relation entre  $x$  et  $y$  ainsi obtenue en traçant le graphique. Interpréter géométriquement les résultats obtenus; faire l'étude de la courbe dont les équations paramétriques sont les équations (I); déterminer la tangente en un point et la longueur de l'arc de  $u = 0$

$$\text{à } u = \frac{\pi}{2}.$$

INSTITUTS MOYENS SUPÉRIEURS

**Mai 1925.** — I. Représenter graphiquement et résoudre algébriquement le système :

$$\begin{aligned}y &= x^2 - 3x + 2 \\x^2 + y^2 - 4y &= 4.\end{aligned}$$

II. Déterminer l'équation de la développée d'une parabole d'équation  $y^2 = 2px$ . Trouver les coordonnées des points de rencontre de cette développée avec la parabole et la longueur de l'arc de développée compris entre le point situé sur l'axe des  $x$  et un point de rencontre avec la parabole.

---