Sur le problème d'algèbre proposé en 1924 au Concours d'entrée à Sèvres

Deux heures étaient accordées aux candidates pour traiter le sujet suivant :

On donne une circonférence de rayon R, un de ses diamètres AB, et sur la perpendiculaire en A à son plan, un point C tel que AC $= h$.

Déterminer sur la circonférence un point M par sa distance AM $= x$ au point A, en supposant successivement que l'une des conditions suivantes est remplie :

1° Les angles ACM, MCB sont égaux.

2° L'aire du triangle BMC est donnée et égale à $\frac{k^2}{2}$.

3° La somme des aires des deux triangles MAC, BMC est égale à la somme des aires des deux triangles BAC, AMB.

Discuter.

Présenter les remarques géométriques que comportent ces questions.

L'auteur a poursuivi le but de bâtir un énoncé vraiment simple, appartenant au genre familier aux candidates, capable cependant de mettre en œuvre des qualités diverses, et donnant lieu soit à des solutions géométriques, soit à des remarques géométriques.

Le classement a été aisé, le résultat d'ensemble satisfaisant. Sur 72 compositions, une a été notée 18, deux 16 et 17, neuf de 14 à 16, six de 12 à 14, dix-sept de 10 à 12, quatorze de 8 à 10, neuf de 6 à 8, six de 4 à 6, cinq de 2 à 4, trois de 0 à 2.

Je voudrais insister sur les difficultés qu'ont éprouvées les candidates au point de vue géométrique. Vingt d'entre elles n'ont pas vu que l'angle CMB est droit ; pour plusieurs autres, ce fait n'a été que la conséquence des relations métriques entre les longueurs de la figure : et il ne s'agit pas seulement de candidates faibles puisque certaines ont finalement obtenu des notes satisfaisantes allant jusqu'à 14. Il est intéressant d'indiquer une sorte d'opposition entre les deux compositions les mieux notées, l'une parfaite en algèbre et de peu de valeur en géométrie, l'autre riche au point de vue géométrique, la seule qui contienne l'ensemble des remarques possibles, mais gâtée par de nombreuses incorrections en ce qui concerne l'algèbre.

De nombreuses candidates qui, par ailleurs, ont bien raisonné, ont voulu à tout prix présenter des remarques géométriques puisqu'on en demandait et ont dit que A et M sont sur la sphère de diamètre BC, ou que CM est une ligne de plus grande pente du plan CMB, ou, à propos de la première partie, que le trièdre de sommet C est alors isocèle et superposable à son symétrique, ou encore que $x < 0$ peut correspondre à un autre sens de parcours choisi sur le cercle, etc...

Nous attendions des remarques mieux adaptées aux questions proposées et elles ont été rares. Six candidates seulement ont traité la première partie géométriquement en observant que CM se projette sur le plan ACB suivant la bissectrice de l'angle ACB ou que $\overline{CM}^2 = CA \cdot CB$. Cette relation est écrite dans plusieurs copies sans que son importance géométrique soit aperçue.

La donnée de la surface du triangle CMB, revenait à donner la grandeur de ce triangle ; la comparaison des côtés de l'angle droit avec 2 R permettrait de retrouver les résultats de la discussion. D'une autre manière, on pouvait dire que si α est un angle aigu du triangle CMB, $\sin 2\alpha$ est égal $\frac{2\,K^2}{\overline{BC}^2}$, puis chercher les angles α supérieurs à CBA, c'est-à-dire à $\arcsin \frac{h}{\sqrt{4\,R^2 + h^2}}$ ou $\operatorname{arc\,tg} \frac{h}{2R}$. Trois compositions seulement contiennent des remarques de ce genre. Trois candidates également ont interprété géométriquement la solution $x^2 = 4R^2 - h^2$, ($\overline{BM}^2 = h^2$) trouvée dans la troisième partie et observé que les faces du tétraèdre ABCM étant alors égales deux à deux, la solution trouvée lorsque $h < 2R$ convient bien.

Il résulte de ces constatations que, en dépit de nos efforts, les élèves, même les meilleurs, sont assez absorbés par l'élaboration d'une solution algébrique pour ne pas revenir sans peine aux remarques fournies directement par les données concrètes du problème. Nous ne lutterons jamais assez contre cette tendance.

C'est surtout sur ce point que je voulais insister. Qu'il me soit permis, cependant, de déplorer l'emploi abusif, dans la rédaction courante, des symboles mathématiques. C'est ainsi que je relève ces membres de phrases : « n'a qu' 1 racine + », « 4 positions 2M », « $4R^2$ est > 0, nombre compris entre y' et y'' », « 2 racines conviennent si > 0 ».

Th. Leconte.