Sur une Théorie des Directrices

Plusieurs procédés d'exposition d'une théorie des directrices ont paru, soit dans les ouvrages, soit dans les revues. En voici un que je crois nouveau et qui montre notamment aux élèves les ressources que leur procure l'inversion. Je m'appuierai sur les deux propriétés suivantes, d'ailleurs classiques, et d'où l'on peut déduire de nombreux exercices.

I. Etant donnée une conique dont l'un des foyers est F et (C) le cercle principal, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un point M appartienne à la conique est que le cercle (M) de diamètre MF soit tangent au cercle (C).

II. Etant donné un cercle et deux points A et B, le rapport des distances de A et B au centre du cercle est égal au rapport $\frac{AU}{BV}$ des distances de chacun de ces points à la polaire de l'autre.

Théorème. — A chaque foyer F d'une conique, on peut associer une droite (D) appelée directrice, polaire de F par rapport à (C), et telle que le rapport $\frac{MF}{MP}$ des distances de tout point M de la conique au foyer F et à la droite (D) soit égal à $\frac{c}{a}$.

Soit M un point de la conique. Faisons une inversion de centre F et de puissance *positive* r^2. Appelons (T) le cercle d'inversion. D'après le 1er lemme, le cercle (M) de diamètre MF est tangent à (C). La droite (M') inverse de (M) et qui n'est autre que la polaire de M par rapport à (T) devient tangente au cercle (C') de centre I, de rayon a', cercle inverse de (C). Conformément à la propriété relative à l'inverse du centre d'un cercle, la polaire (D) de I par rapport à (T) n'est autre que la polaire de F par rapport à (C). Le deuxième lemme appliqué aux points M, I et pour le cercle (T) donne $\frac{MF}{MP} = \frac{IF}{a'}$. Mais F centre d'inversion de (C) et (C') est également centre d'homothétie et l'on a :

$$\frac{IF}{a'} = \frac{OF}{a} = \frac{c}{a} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{MF}{MP} = \frac{c}{a}.$$

Remarque. — La directrice (D) polaire de F par rapport à (C) est l'homothétique par rapport au pôle F et dans le rapport 2 de l'axe radical du cercle point F et du cercle (C). Cela revient à dire, puisque l'homothétie transforme un axe radical en axe radical, que la directrice (D) est l'axe radical du cercle point F et du cercle directeur relatif à l'autre foyer.

Réciproque. — Le lieu des points M tels que le rapport des distances de chacun d'eux à un point fixe F et à une droite fixe (D) soit égal à une constante e est une ellipse ou une hyperbole suivant que e est inférieur ou supérieur à 1.

Faisons la même inversion que dans le théorème direct. Appelons I le pôle de (D) par rapport à (T) et x la distance de I à la droite (M'), inverse du cercle (M) de diamètre MF, droite qui n'est autre que la polaire de M par rapport à (T). Le deuxième lemme donne $\frac{MF}{MP} = \frac{IF}{x}$. En tenant compte de l'hypothèse $\frac{MF}{MP} = e$, il résulte que x est constant, c'est-à-dire que (M') enveloppe un cercle (C') de centre I, ou encore que (M) enveloppe un cercle (C) de centre O et de rayon a. Comme F est centre d'homothétie de (C) et (C'), on a : $\frac{IF}{x} = \frac{OF}{a}$, d'où $\frac{OF}{a} = e$. On en conclut que le lieu de M est une ellipse si $e < 1$, et une hyperbole si $e > 1$. D'ailleurs, la droite (D) polaire de I par rapport à (T) est bien polaire de F par rapport à (C).

Remarques. — I. Du théorème direct, il résulte encore que la polaire réciproque d'une conique par rapport à un cercle directeur (T) de centre F est un cercle (C') dont le centre I est le pôle de la directrice (D) relative à F par rapport à (T). De la réciproque, légèrement remaniée, et une fois acquis les résultats de cette réciproque, on déduit que la polaire réciproque d'un cercle (C') par rapport à un cercle directeur (T) de centre F est une conique dont l'un des foyers est F et la directrice relative la polaire du centre I de (C') par rapport à (T). On a d'ailleurs ainsi une des démonstrations classiques connues.

II. Le procédé de transformation utilisé peut encore servir à établir d'autres propriétés relatives aux coniques. Raisonnons par exemple sur l'ellipse. Soit MM_1 une corde focale relative au foyer F. Faisons une inversion de centre F, mais cette fois-ci de puissance $-b^2$. Les droites parallèles (M'), (M'_1) inverses des cercles (M) et (M_1) sont tangentes à (C). Si m et m_1 sont les inverses des points M, M_1 on a $Fm + Fm_1 = 2a$, d'où l'on déduit $\frac{1}{FM} + \frac{1}{FM_1} = \frac{2}{p}$, p paramètre de l'ellipse. Le lieu du milieu de mm_1 est le cercle (U) de diamètre OF, d'où il résulte que l'inverse de l'ellipse par rapport au pôle F est un limaçon de Pascal. Le cercle de diamètre MM_1 a pour inverse le cercle de diamètre mm_1. Or, ce dernier cercle enveloppe manifestement deux cercles concentriques au cercle (U). Par suite le cercle de diamètre MM_1 enveloppe deux cercles inverses des précédents et dont il serait aisé de préciser la position en prenant comme cordes focales le grand axe et la parallèle au petit axe. Si maintenant les demi-droites FM, FM_1 font entre elles un angle algébrique constant différent de π, le point de rencontre p des droites (M') et (M'_1) décrit un cercle (V') concentrique à (C). Or p n'est autre que l'inverse de P, pied de la perpendiculaire abaissée de F sur MM_1. P décrit le cercle (V) inverse de (V') et ce cercle (V) sera le cercle principal de la conique dont l'un des foyers est F, enveloppée par la droite MM_1. D'ailleurs, (C) et (V') étant concentriques, le centre d'inversion F sera l'un des points de Poncelet des cercles inverses (C) et (V), c'est-à-dire que F a même polaire par rapport à (C) et (V) ou encore que la directrice relative au foyer commun F est la même pour l'ellipse et la conique enveloppe.

Pour l'hyperbole, on raisonnerait d'une façon analogue. Pour la parabole, le cercle principal doit être remplacé par la tangente au sommet. On établirait notamment que l'inverse d'une parabole, le foyer F étant pris pour pôle, est une cardioïde et que le cercle de diamètre MM_1, MM_1 corde focale, est tangent d'une part à la directrice, d'autre part au cercle de diamètre SH, S sommet de la parabole et H le point de l'axe du même côté que F, par rapport à S, tel que

$$SH = \frac{3p}{2}.$$

J. Coissard,
Professeur au Lycée Janson-de-Sailly.