

Enoncés de quelques paradoxes

Il ne faut pas abuser du paradoxe. La recherche du point faible de certains raisonnements faux présente cependant quelque intérêt : elle est susceptible de faire réfléchir sur la nécessité de serrer de près les démonstrations et de fuir les dangers d'une logique superficielle.

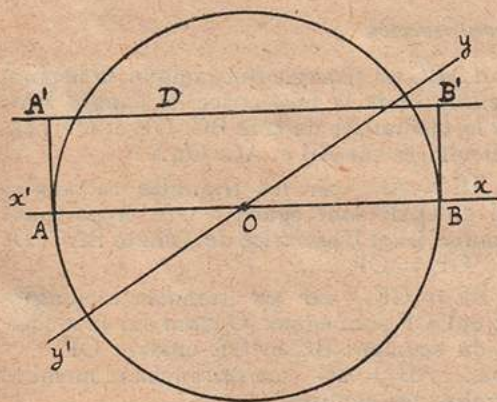
Voici quelques énoncés de paradoxes géométriques.

Les uns sont des types classiques de propositions absurdes démontrées à la manière d'Euclide, mais avec omission de l'examen préalable des conditions de position auxquelles sont assujetties les diverses parties de la figure. Cet examen est, malheureusement, trop souvent négligé dans notre enseignement de la géométrie.

Le premier est un paradoxe d'un autre genre ; il est exposé sous la forme la plus classique.

I. — *Lemme* : Etant donnée une longueur h et un nombre n , on peut toujours déterminer le rayon R d'un cercle de manière que l'aire du cercle soit supérieure à celle d'un rectangle de base $2R$ et de hauteur $2nh$, car pour vérifier (1) l'inégalité $\pi R^2 > 4Rnh$, il suffit de prendre $R > \frac{4}{\pi}nh$.

Théorème : D'un point donné on ne peut mener qu'une parallèle à une droite donnée (forme courante du postulat d'Euclide).



Soit la droite D et le point O , non situé sur cette droite. On sait mener de O une parallèle à D : $x'Ox$. Menons de O une droite $y'Oy$ autre que $x'Ox$: elle rencontre D .

En effet, soit α l'angle aigu (non nul) $x'Oy$, évalué en radians par exemple. Il existe un entier n tel que

$$(1) \quad n\alpha \geq \pi$$

c'est-à-dire tel que n fois l'angle $x'Oy$ égale au moins un demi-plan.

Si nous désignons par h la distance de O à D , et

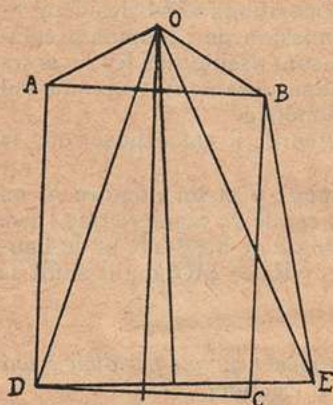
(1) Si on objecte que la formule donnant l'aire du cercle suppose la théorie des figures semblables, il suffit d'affirmer que l'aire du cercle de rayon R est certainement supérieure à R^2 et que, par suite, $R > 4nh$ satisfait aux conditions de l'énoncé.

si nous traçons un cercle de centre O et dont le rayon R est supérieur à $\frac{4}{\pi}nh$, il résulte du lemme précédent que l'aire du cercle est supérieure à $2n$ fois celle d'un rectangle de base $2R$ et de hauteur h .

Comme d'après la condition (1) l'aire du cercle est inférieure ou égale à $2n$ fois celle du secteur compris dans l'angle xOy , l'aire de ce secteur est supérieure à celle du rectangle $ABA'B'$ de base $2R$ et de hauteur h .

Or, si $y'Oy$ ne coupait pas D , le secteur serait tout entier dans le rectangle, ce qui est en contradiction avec le résultat précédent. Il est donc absurde de supposer qu'on peut mener par O deux droites ne coupant pas D

II. — *Un angle droit est égal à un angle obtus.*



Soit le rectangle $ABCD$. Menons la droite BE extérieure au rectangle et portons $BE = BC = AD$. Soit O le point de rencontre des médiatrices des segments AB et DE , non parallèles.

Par construction :

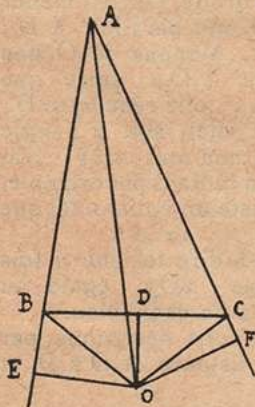
$$AD = BE, \quad OA = OB, \quad OD = OE,$$

donc : $\quad OAD = OBE,$

et comme : $\quad OAB = OBA,$

l'angle droit BAD est égal à l'angle obtus ABE

III. — *Tous les triangles sont isocèles.*



Soit ABC un triangle quelconque, O le point de rencontre de la bissectrice de l'angle BAC et de la médiatrice du côté BC , OE et OF perpendiculaires sur AB et AC . On a :

1° $AE = AF$, car les triangles rectangles OAE et OAF sont égaux : OA , hypoténuse commune étant bissectrice de l'angle BAC . De plus : $OE = OF$.

2° $BE = CF$, car les triangles rectangles OBE et OCF sont égaux, O étant sur la médiatrice du segment BC et OE égalant OF .

Donc $AB = AC$, en retranchant membre à membre les égalités 1° et 2°.....