Unification des définitions de mots et des notations mathématiques *(suite)*

17. Grandeurs et nombres

M. Weber pense (voir le *Bulletin* n° 33, page 74) qu'il y aurait lieu de revenir sur la décision prise de supprimer du vocabulaire arithmétique la locution *rapport de deux nombres* ; je pense qu'il est dans le vrai et à ses raisons je vais en ajouter une autre.

Je remarquerai d'abord qu'il propose un certain nombre de définitions dont la suivante : « *Rapport de deux grandeurs de même espèce : nombre indiquant les opérations (multiplication et division) à faire subir* *à la seconde pour obtenir la première.* » Cette définition suppose évidemment que l'on a défini auparavant les opérations sur les grandeurs, chose que l'on ne trouve pas habituellement dans les traités d'arithmétique (ni dans les programmes).

Je crois, d'ailleurs, que c'est à tort. L'arithmétique, bien certainement, est « la science des nombres » ; mais, dans la plupart de ses applications à la vie courante, elle sert à résoudre des problèmes sur les grandeurs. Qu'on veuille simplement, par exemple, trouver le périmètre d'un carré de 12 m. 50 de côté : on multiplie 12,5 par 4, ou 4 par 12,5, ou 125 par 4, ou etc... ; on trouve comme produit 50, ou 500, ou etc..., et on conclut : 50 m. On applique donc la propriété suivante : *le nombre qui mesure (relativement à une certaine unité) le produit d'une valeur d'une grandeur par un nombre est égal au produit du nombre qui mesure la valeur de grandeur multiplicande (relativement à cette même unité) par le multiplicateur.*

Il me semble que cette proposition n'est pas évidente *a priori*, et qu'il y a lieu de la démontrer et par suite de définir le produit d'une valeur de grandeur par un nombre.

Ainsi, si l'on ne veut pas donner à ses élèves l'idée qu'il faut beaucoup de *rigueur* quand il s'agit de théorie arithmétique mais qu'on peut se contenter *d'intuition* quand on fait des problèmes sur les grandeurs, est-on amené à définir, parallèlement aux opérations sur les nombres, des opérations sur les grandeurs. Il m'a semblé que les futurs instituteurs qui sont mes élèves ne doivent pas se contenter d'à peu près et voici, par exemple, le plan que j'ai été amené à suivre pour l'étude de la multiplication par un nombre entier.

A. Grandeurs. — a) *Exemple :*

15 mètres + 15 mètres + 15 mètres + 15 mètres = 50 aunes.

b) *Vocabulaire.* — Ce fait s'exprime des 5 façons suivantes :

1° 50 aunes est un *multiple* de 15 mètres ;

2° 50 aunes vaut 4 *fois* 15 mètres ;

3° 50 aunes est le *produit* de 15 mètres par 4 ; $\left\{\begin{array}{ll}\text{15 m.} & : \textit{multiplicande.}\\ \text{4} & : \textit{multiplicateur.}\end{array}\right.$

4° 50 aunes s'obtient en *multipliant* 15 mètres par 4 ;

5° 50 aunes est le résultat de la *multiplication* de 15 mètres par 4.

(On peut généraliser en remplaçant 50 aunes par A, 15 mètres par B et 4 par n).

c) *Définition.* — Multiplier une valeur de grandeur B par un nombre entier n, c'est trouver la valeur A de cette grandeur qui est la somme de n valeurs de grandeur égales à B.

B. Nombres. — Plan tout à fait analogue à celui ci-dessus.

C. Conséquence. — Si une valeur de grandeur B est mesurée avec une certaine unité par le nombre b, le produit de B par le nombre entier n qui est égal à :

$$B + B + \ldots\ldots + B \qquad (n \text{ termes})$$

est mesuré, relativement à cette même unité, par la somme :

$$b + b + \ldots\ldots + b \qquad (n \text{ termes})$$

c'est-à-dire par le produit de b par n. (Définition de la somme de plusieurs nombres).

Donc pour trouver le produit d'une valeur de grandeur B par un nombre entier n on peut :

1° chercher le nombre b qui mesure B avec une certaine unité ;
2° multiplier b par n.

Le produit de b par n mesure la valeur de grandeur cherchée relativement à l'unité qui a servi à mesurer B.

Ainsi pour savoir quel est le périmètre d'un carré de 12 m. 50 de côté au lieu de mesurer ce périmètre avec une chaîne d'arpenteur on peut multiplier 12,5 par 4 ; le résultat, 50, mesure le périmètre avec le mètre comme unité.

Cela suppose évidemment qu'on sait trouver le produit d'un nombre par un nombre entier, sans avoir recours aux grandeurs.

On est ainsi amené à donner pour les grandeurs d'une part, et pour les nombres d'autre part, des définitions analogues et notamment les suivantes :

1° *Fraction de grandeur* et *fraction de nombre ;*
2° *Rapport de deux grandeurs* et *rapport de deux nombres.*

Et voilà pourquoi à la définition :

Rapport de deux grandeurs : nombre qui exprime combien de fois la première contient la seconde ou à quelle fraction de la seconde est égale la première ;

il y a lieu de faire correspondre la suivante :

Rapport de deux nombres : nombre qui exprime combien de fois le premier contient le second, ou à quelle fraction du second est égal le premier.

Avec cette définition : $\left(\frac{6}{5}\right) : \left(\frac{2}{5}\right)$ serait le *symbole* d'un rapport qui *est* égal à 3 ; de même que $\frac{50 \text{ aunes}}{15 \text{ mètres}}$ est le *symbole* d'un rapport qui *est* égal à 4.

J. Ribeyre,
Professeur à l'Ecole Normale d'Instituteurs de Moulins.

18. Sur le mot « rapport »

Bien que je reconnaisse, avec M. Weber (voir le *Bulletin* n° 33, page 74) la nécessité de distinguer entre l'indication d'un quotient et le résultat de l'opération, je crois devoir indiquer comment je reste cependant d'accord avec la décision de l'Assemblée générale de 1922.

Tout repose sur l'emploi de deux mots très simples : *opération indiquée, opération effectuée.* Par exemple, dans $3 + 5 = 8$, $3 + 5$ est la somme indiquée, 8 est la somme effectuée.

Prenons la division des nombres entiers. Je donne la définition habituelle : on appelle quotient (exact) de a par b le nombre q tel que $a = bq$. Si a est multiple de b, ce nombre existe :

$$\frac{15}{3} \text{ (quotient indiqué)} = 5 \text{ (quotient effectué).}$$

Si a n'est pas multiple de b, le nombre q n'existe pas (nous sommes toujours avec les nombres entiers), d'où nécessité de définir un nouveau nombre pour écrire ce quotient. Ce nouveau nombre s'appelle *fraction*. On garde la notation du quotient pour le représenter :

$$\frac{7}{3} \text{ (quotient indiqué) } = \frac{7}{3} \text{ (fraction).}$$

La confusion possible avec le trait de fraction pour indiquer une division cesse d'ailleurs par l'emploi du signe : (divisé par)

$$7 : 3 = \frac{7}{3}.$$

La Théorie des fractions est la Théorie du quotient indiqué de deux nombres, basée sur la définition suivante : $\frac{7}{3}$ (fraction) est un nombre qui multiplié par 3 donne pour produit 7.

Nous voici en possession de nouveaux nombres (les fractions, et par suite, les nombres décimaux qui sont des fractions particulières). Répétons sur ces nombres les mêmes opérations que sur les nombres entiers. Arrivés à la division, une différence existe avec les nombres entiers : un théorème facile à démontrer dit que si f et f' sont deux fractions (toujours définies par $a = bf$ et $a' = b'f'$) il existe *toujours* un nombre q (fraction ou exceptionnellement nombre entier) tel que $f = f'q$. Il n'est donc plus nécessaire de définir un nouveau nombre pour représenter le quotient effectué. Exemple :

$$\frac{\left(\frac{3}{5}\right)}{\left(\frac{7}{5}\right)} \text{ (quotient indiqué) } = \frac{3}{7} \text{ (quotient effectué).}$$

Avec ces notations, la Théorie des rapports devient la Théorie des *quotients indiqués*, tout à fait analogue à celle des fractions ; elle se déduit aussi de la définition $a = bq$ où a et b sont des fractions.

Il est clair que le mot *rapport* est tout à fait inutile ici, et je ne l'emploie plus qu'en géométrie. Les élèves, habitués dès le début à la différence entre les mots « *indiqué* » et « *effectué* » ne font plus de confusion (1) ; ils comprennent rapidement la différence entre un calcul théorique et une application numérique.

J'ajouterai que j'ai mis plus haut le mot « exact » entre parenthèses dans « quotient exact » parce que ce mot devient inutile ; l'expression « quotient approché » marquant, par son adjectif, la différence avec le quotient exact ; d'ailleurs, l'emploi du signe # (approximativement égal à) que j'exige dans toute application numérique, habitue les élèves à distinguer un calcul théorique (qui est toujours exact) d'un calcul pratique (qui conduit le plus souvent à un résultat approché).

G. Thovert,
Professeur au Lycée de Tunis.

(1) Bien entendu, j'emploie les mots « indiqué » et « effectué » pour les autres opérations, en particulier l'addition et la soustraction ; cela m'a permis dans les petites classes, de faire comprendre très facilement l'emploi des parenthèses.