A la recherche d'une méthode

III. De la grandeur au nombre (1)

Il ne viendrait à l'esprit de personne de contester l'origine du nombre entier, qu'il soit abstrait ou concret. Je ne suis pas sûr que l'accord se ferait aussi aisément sur celle de la fraction utilisée en arithmétique.

On pourrait être tenté de relier la fraction abstraite au nombre entier au moyen de la division, lorsque celle-ci est possible exactement. Le quotient de 12 par 2 serait dit la moitié de 12, comme 12 est le double de 6 ; d'une façon générale, à un multiple d'un nombre correspondrait une partie aliquote du multiple. On pourrait même concevoir des opérations sur les fractions ainsi conçues ; mais on voit de suite les difficultés se présenter en masse, ne fût-ce que pour définir l'égalité. On dirait en effet que la moitié, les deux quarts, les trois sixièmes, les six douzièmes de 12 ont la même valeur ; mais il ne serait pas permis de parler des quatre huitièmes, des cinq dixièmes, etc..., à moins de s'adresser à des nombres multiples de 8, 10, etc... Ce serait bien autre chose si l'on revenait au concret et il y aurait quelque ridicule à dire

(1) Voir les *Bulletins* n° 33, page 65, et n° 34, page 92.

que la moitié, les deux quarts, les trois sixièmes, les quatre huitièmes, d'une pile de 12 assiettes conduisent au même nombre d'objets. La règle de trois. sous sa forme mécanique générale, n'échappe pas à ce grave inconvénient.

Certains ont voulu voir, dans l'introduction de la fraction, un moyen de réaliser des divisions impossibles et j'ai connu un maître qui piquait la curiosité de ses petits élèves de Sixième, en leur donnant cet espoir. Il est vrai que la fraction $\frac{5}{7}$, par exemple, sera regardée, à partir d'un certain moment, comme le quotient de son numérateur par son dénominateur, mais cela n'a pas de sens *a priori* et il n'y a rien à tirer de là, au premier abord tout au moins. D'ailleurs, la notation adoptée, pour figurer une fraction, se relie manifestement à cette idée et on peut regretter que le symbole $\frac{a}{b}$ représente trop tôt pour les jeunes élèves, soit une division et par suite un quotient, soit une fraction. Il y a là une source de confusion.

La notion concrète de fraction ne peut acquérir toute sa généralité qu'au départ des grandeurs dites mesurables, c'est-à-dire des grandeurs dont on peut définir ou concevoir l'égalité et l'addition : on ne pourrait parler de la fraction $\frac{p}{q}$ d'une grandeur à laquelle on ne saurait attribuer ces deux caractères. Il faut que cette grandeur puisse se laisser morceler sans perdre sa qualité première ; lui accoler une fraction sans avoir élucidé ces différents points serait faire œuvre vaine.

Mais, dira-t-on, cette question dépasse les enfants ! Est-ce bien sûr ? Est-ce que les gestes du vendeur qui présente le bord d'une étoffe au regard du mètre et qui jette chaque fois de côté la partie confrontée, ceux du marchand qui puise successivement dans un récipient, avec une mesure dont il verse le contenu dans le vase apporté par le client, ne réalisent pas ces conditions, pour les longueurs et les capacités, de la façon la plus frappante ? C'est moins immédiat pour d'autres grandeurs que l'on ne mesure pas à proprement parler, sous leurs formes générales, comme les surfaces planes (il ne peut être question de la plupart des autres qui ont besoin d'être définies) ou les volumes ; mais l'égalité et l'addition de ces grandeurs prises sous des formes géométriques particulières, ne présentent aucune difficulté et il suffit d'en choisir dont le groupement permette de recouvrir le plan ou de remplir l'espace, sans solution de continuité, autant ou aussi peu que l'on veut.

La balance donne naturellement la notion pratique de l'égalité des masses ou des poids ; quant à leur addition, elle va de soi.

Il ne peut être question, avec des enfants, des difficultés que suscite l'étude de ces caractères, à propos du temps.

Relativement aux angles, dans le plan, et aux arcs portés sur une même circonférence, la mise en évidence de ces propriétés résulte de déplacements convenables.

Faut-il insister sur les signes monétaires ? Le caractère conventionnel de l'égalité ne fait plus de doute pour personne à une époque où sa définition change d'heure en heure ; l'addition est une notion familière à tous.

Je ne parle pas des quantités de chaleur qui se présentent plus tard, encore moins des températures dont on conçoit l'égalité mais non l'addition, ni des grandeurs introduites par l'étude des phénomènes électriques ou magnétiques ; tout cela sort du cadre de cet article et nécessiterait de longs développements : il n'est pas douteux que l'enseignement n'est pas complètement au point sur toutes ces questions dont l'exposition gagnerait au retour plus fréquent aux caractères essentiels des grandeurs mesurables.

Les explications données aux élèves et les problèmes qui leur sont proposés tiennent-ils toujours compte de ces notions fondamentales ?

Combien de fois n'ai-je pas vu, en lisant des publications pédagogiques, raisonner sur des grandeurs quelconques, qu'on représentait de prime abord par des longueurs !

J'ai assisté à des corrections de devoirs dont le sujet n'avait pas été compris par la plupart des élèves. Un jour, il était question d'un réservoir rempli aux trois quarts ; l'attitude de la classe dénotant de l'embarras, je demandai ce qu'il fallait entendre par là. Un grand nombre n'y attachaient aucun sens ; quelques-uns se représentaient un cylindre portant une graduation sur une génératrice et faisaient appel, sans s'en rendre compte, à la formule qui fournit le volume de ce corps. Tous furent déconcertés quand je donnai au réservoir la forme d'une barrique renflée dans sa partie médiane. Je fus obligé d'imaginer un réservoir auxiliaire dont le contenu versé quatre fois successivement dans le premier remplirait exactement celui-ci (1). Dès que la signification du terme embarrassant fut comprise, la solution du problème posé se déroula tout naturellement et lorsqu'on fut arrivé au résultat, un de mes voisins que mes réflexions avaient particulièrement surexcité s'écria : « Ah, comme c'était facile ! »

Il serait exagéré de présenter ces caractères essentiels sous une forme générale et abstraite qui déconcerterait les enfants ; mais il faut les leur faire sentir et comprendre, à propos de chaque grandeur nouvelle, si l'on veut qu'ils puissent utiliser les propriétés des fractions.

A l'inverse de ceux qui font trop aisément crédit aux débutants sur ce terrain, il existe encore des maîtres qui croient que l'observation des grandeurs est trop difficile et qui répugnent à s'en servir pour justifier des opérations dont ils font apprendre soigneusement les règles. De nombreuses expériences me font croire que tout dépend de la façon dont les exemples sont présentés.

(1) Je dis imaginer et cela suffit. Les maîtres qui demandent d'emblée à leurs élèves comment ils s'y prendraient pour diviser une longueur en 6 parties égales posent une question hors de portée et ceux qui font remarquer que $6 = 2 \times 3$ ne font que reculer la difficulté.

Je n'ai guère obtenu de réponses satisfaisantes à propos de l'égalité des fractions. Le plus souvent, on me dit que $\frac{1}{2}$ est égal à $\frac{3}{6}$ parce qu'une fraction ne change pas de valeur quand on multiplie ses deux termes par un même nombre : c'est le phénomène habituel de la soumission à la règle imposée par l'autorité du maître. Je me risque à faire remarquer que la valeur d'une fraction aurait besoin d'être définie pour qu'on sût si elle a changé ou non ; ma réflexion tombe dans le vide, ce qui n'a rien de surprenant. Je pousse mon enquête et demande pourquoi une fraction ne change pas de valeur quand on multiplie ses deux termes par un même nombre, 3 dans l'espèce. Généralement on me répond que la multiplication du numérateur par 3 la rend trois fois plus grande et celle du dénominateur par 3 la rend trois fois plus petite et par suite que sa valeur n'est pas altérée. Il y aurait beaucoup à dire sur la logique d'un raisonnement qui passe par la notion de trois fois plus grande pour arriver à celle d'égalité. Je n'en veux retenir que les termes.

Le mot « fois » a une signification précise que l'on devrait respecter. Sans parler de ceux qui ne craignent pas de dire une demi-fois et une fois et demie — ils sont nombreux —, n'y a-t-il pas un abus à remplacer une multiplication ou une division par 3, par les expressions « trois fois plus grande » ou « trois fois plus petite » ? Il semble qu'il y ait là une sorte de mécanisme verbal, tiré de la règle de trois, et dont l'emploi permet aux élèves d'appliquer les règles sans se tromper : ici encore c'est le souci d'une technique qui l'emporte. J'embarrasse beaucoup les élèves en leur demandant de comparer les expressions « deux fois plus grand » et « une fois plus grand » : ils me répondent généralement que c'est la même chose. Je n'en suis pas surpris car c'est ainsi que le comprennent la plupart de ceux qui ignorent les précisions (?) du langage arithmétique. Pour être logique, il faudrait dire que « une fois plus grand » n'a pas de sens ou bien que cela qualifie l'égalité ; mais alors « une fois plus grand » et « une fois plus petit » seraient équivalents ! Il serait cruel d'insister.

Quelquefois l'essai de justification prend une forme plus cohérente et on me répond que la moitié de l'unité en contient les trois sixièmes ; c'est inattaquable au point de vue du langage. Mais quelle idée un débutant peut-il se faire de parties égales, ou même simplement de parties de l'unité, s'il ne voit pas derrière cette unité une grandeur concrète ? Les confusions qui se produisent si souvent, dans l'esprit des élèves, quand les fractions qu'ils utilisent s'appliquent à des unités différentes devraient éclairer les maîtres sur le peu de pénétration de cette notion. La difficulté est telle qu'il ne faut pas craindre, pour se faire comprendre, de choisir des exemples parmi les plus familiers, dussent-ils paraître un peu gros ! Le gâteau est celui qui intéresse le plus, qu'il s'agisse de fillettes ou de jeunes garçons, et on peut en tirer beaucoup. Lorsque je demande ce que l'on préfère de la moitié ou des cinq dixièmes d'un gâteau, je vois apparaître des sourires sur un grand nombre de visages et on me répond que c'est « pareil » ; mais il ne faut pas croire que ce soit général et il m'est arrivé trop souvent de voir préférer la moitié aux trois sixièmes parce que l'élève se rendait compte de ce qu'on lui offrait avec la moitié, nullement avec les trois sixièmes et « qu'un tiens vaut mieux que deux tu l'auras. » J'ai naturellement essayé de montrer deux gâteaux identiques, partagés l'un en deux parties égales, l'autre en six parties égales et de réaliser la moitié du second par l'addition de trois de ses parties. L'élève convaincu par cet exemple ne l'était pas toujours par un autre où les grandeurs de comparaison étaient conservées, ainsi que la fraction $\frac{1}{2}$, mais où l'on remplaçait $\frac{3}{6}$ par $\frac{8}{16}$; il l'était moins encore si l'on changeait les grandeurs de base. Il y a là une preuve irréfutable de la lenteur d'accès de certains cerveaux à une idée de quelque généralité et du danger de supprimer l'effort de compréhension en formulant trop tôt cette idée dans une règle.

Chaque fois que je demande de comparer les fractions $\frac{11}{16}$ et $\frac{13}{15}$, ou me propose de les réduire au même dénominateur ; si je dis : « que préférez-vous des $\frac{11}{16}$ d'un gâteau ou des $\frac{13}{15}$ d'un gâteau identique », on me donne fréquemment une réponse correcte et immédiate ; qui plus est, on la justifie nettement : les hésitations du langage ne laissent aucun doute sur la possession des deux idées qui entrent en jeu.

Je répète parfois l'expérience avec les fractions $\frac{2}{5}$ et $\frac{5}{7}$ et si j'ai soin d'ajouter qu'il s'agit de fractions de gâteau, des élèves songent de suite à la moitié d'un gâteau comme terme de comparaison.

Une observation non désintéressée du partage d'un gâteau en parties égales permet de conduire l'enfant à d'autres conséquences ; proposez-lui les $\frac{2}{7}$ d'un gâteau ou les $\frac{4}{9}$ d'un gâteau identique, placé sur une autre assiette, en lui demandant ce qui reste de chacun, et son choix sera vite fait. La justification sera moins aisée que dans les exemples précédents, par suite des difficultés d'expression et parfois aussi d'une confusion qui s'établit dans son esprit entre une soustraction et une addition. On peut le mener ainsi à la comparaison des fractions dont les deux termes diffèrent d'un même nombre, mais il vaut mieux encore multiplier les observations, avant de dégager la règle.

Le rapprochement des deux morceaux enlevés du premier gâteau et des 5 parties qui restent conduirait à remarquer que la partie soustraite est les $\frac{2}{5}$ de la partie conservée et que celle-ci est les $\frac{5}{2}$ de la partie enlevée ; je pense préférable de différer cette constatation et de la présenter sur d'autres exemples, la comparaison simultanée de trois grandeurs pouvant déconcerter des débutants.

L'origine de la fraction abstraite est présentée souvent encore, dans l'enseignement, comme résultant de la comparaison de deux grandeurs mesurables de même espèce. J'ai parfois entendu affirmer que, deux longueurs quelconques étant données, on peut toujours trouver une partie aliquote de l'une, assez petite pour que l'autre la contienne un nombre exact de fois, ce qui revient à affirmer que deux longueurs prises au hasard sont commensurables. Je n'ai jamais voulu voir là qu'une étourderie. On ajoute souvent que cela est vrai à condition de négliger dans l'une une partie aussi petite que l'on veut. Mais la fraction se présente alors comme valeur approchée du rapport des longueurs et l'arbitraire qui préside à sa formation en diminue singulièrement l'intérêt et les applications. Si on se plaçait simplement au point de vue pratique des valeurs approchées, mieux vaudrait se contenter d'utiliser les nombres décimaux, comme on le fait avec le système métrique ; ils suffisent pour atteindre une approximation aussi grande qu'on la désire et leur liaison avec le système de numération permet de les manier comme des nombres entiers, en ce qui touche les opérations, la division exceptée.

En fait, si l'on veut comparer deux grandeurs mesurables de même espèce, A et B (il ne faut voir là que des dénominations), on est amené naturellement à retrancher la plus petite de la plus grande un nombre a_1 de fois assez grand pour que le reste B_1 soit inférieur à B, c'est-à-dire *à diviser la grandeur A par la grandeur B* ; il n'y a aucune raison *à priori* pour que B_1 soit nul. On est conduit ensuite à diviser B par B_1, ce qui donne un quotient a_2 abstrait comme a_1 et un reste B_2, etc. Si les opérations se terminent — la probabilité de cet événement est nulle — le dernier reste B_n est une partie aliquote commune à A et à B. Il est aisé de montrer que c'est la plus grande et que toutes les parties aliquotes communes à A et à B, en nombre illimité d'ailleurs, sont les parties aliquotes de B_n. Du point de vue qui nous occupe, on trouve alors une fraction $\frac{a}{b}$ dont les termes sont premiers entre eux et qui peut servir de mesure à A quand on prend B comme unité. Si les opérations ne se terminent pas, on obtient des mesures de grandeurs qui approchent de plus en plus de A, les unes par défaut, les autres par excès, sous forme des réduites d'une fraction continue. Tout cela est inaccessible aux enfants, et il faut se résigner à un acte d'autorité en imaginant, dès le début, des fractions de grandeur.

L'accord s'étant fait sur ce point, va-t-on définir l'égalité de deux fractions abstraites par l'égalité des grandeurs qu'elles mesurent à partir d'une même unité ? Ceux qui l'ont tenté n'ont guère sujet, je crois, d'être satisfaits de la durée des résultats. Le mot *mesure* prête d'ailleurs à bien des confusions. Il désigne à la fois un instrument, une opération, un nombre ; les acceptions qui nous intéressent pourraient être réunies dans une phrase : « Les mesures effectuées à l'aide d'une mesure donnent les mesures des grandeurs mesurées. » Le sens précis de ce mot ne peut venir que du contexte, et il me paraît préférable d'en retarder l'emploi jusqu'au jour où l'idée apparaîtra nettement.

Le mot *rapport* n'a guère plus de précision pour des débutants, et tous les maîtres connaissent les résistances que suscite son emploi, même en Quatrième et en Troisième.

Faut-il renoncer à définir l'égalité de deux fractions, au début tout au moins ? En aucune façon. Ayant remarqué que la fraction $\frac{na}{nb}$ d'une grandeur est égale à la fraction $\frac{a}{b}$ de cette grandeur, on convient de dire que les fractions $\frac{na}{nb}$ et $\frac{a}{b}$ sont égales. Plus généralement, on dira que les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ sont égales, si les deux fractions de grandeur obtenues par leur intermédiaire, au départ d'une grandeur quelconque, sont des grandeurs égales. C'est une première manifestation de la fraction abstraite. Un mode de simplification en résulte par la division des deux termes soit par un diviseur commun, soit par leur p. g. c. d. Mais il est bon de remarquer, à ce propos, que le passage d'une fraction à une fraction égale ne se fait pas nécessairement par la multiplication ou la division de ses termes par un même nombre : l'exemple de $\frac{2}{4}$ et $\frac{3}{6}$ est suffisant. Il est préférable aussi de ne pas parler de fraction *irréductible* à cette occasion. On rencontre fréquemment de grosses résistances, même dans la classe de Mathématiques, quand on veut faire comprendre aux élèves que l'irréductibilité d'une fraction, dont les termes sont premiers entre eux, a besoin d'être démontrée. Pour la même raison, il vaut mieux s'abstenir de dire qu'une telle fraction ne peut plus être simplifiée : le fait est exact, mais, à force de le répéter, on finit par le croire évident. Pour ce motif encore, il convient de différer la recherche de toutes les fractions égales à une fraction donnée.

La comparaison des deux grandeurs A et B obtenues en prenant deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ d'une même grandeur G, exige le plus souvent qu'on les constitue de morceaux équivalents et qu'on reconnaisse celle qui en contient le plus grand nombre ; on est donc amené à trouver une partie aliquote commune aux parties qui constituent A et B. Une première idée conduit à décomposer G en $b \times b'$ parties égales, plus généralement en p parties égales, p étant un multiple commun à b et b' et enfin en m parties égales, m étant le p. p. m. c. de b et b'. Pratiquement, on simplifiera les deux fractions, s'il y a lieu, et on verra de proche en proche quel est celui des multiples du plus petit des dénominateurs réduits, qui est un multiple de l'autre ; cette recherche d'un multiple commun à deux nombres, par tâtonnements, conduit naturellement au p. p. m. c. : c'est un excellent exercice pour des débutants. Là encore il faudra se garder de dire que les deux fractions sont réduites au plus petit dénominateur commun ; si un élève pose la question, il faudra lui répondre affirmativement et ajouter que la démonstration viendra plus tard. Si la grandeur A est plus grande que B, on dira que la fraction $\frac{a}{b}$ est plus grande que $\frac{a'}{b'}$; on s'en rendra compte en comparant les numérateurs des fractions réduites au même dénominateur. Si ces numérateurs sont égaux, les fractions sont égales et le critérium d'égalité, sous la forme $ab' = ba'$ se trouve établi.

Je laisse de côté la comparaison d'un nombre quelconque de fractions abstraites. La réduction des fractions au même dénominateur s'impose aussi dans l'addition des fractions de grandeur. Proposons à un enfant de réunir sur une assiette la moitié et le sixième d'un gâteau et de chercher à se rendre compte du résultat de cette addition ; il songera à couper la moitié en trois parties égales qui constitueront trois sixièmes du gâteau. Il obtiendra ainsi quatre sixièmes de ce gâteau. Compliquons le problème en prenant deux autres fractions : nous l'amènerons de proche en proche à constater que la somme de deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ du gâteau est une fraction de ce gâteau (on fera appel à des gâteaux identiques, s'il est nécessaire). Pour l'obtenir, il réduira les fractions abstraites au même dénominateur et s'il trouve $\frac{a_1}{p}$ et $\frac{a_1'}{p}$, il verra que la fraction résultante du gâteau est $\frac{a_1 + a_1'}{p}$. La fraction $\frac{a_1 + a_1'}{p}$ s'appellera naturellement *somme* des deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ et l'opération qui l'a fournie, *addition* des deux fractions. En étendant la chose à l'addition d'un nombre quelconque de fractions de grandeur, il arrivera à constater qu'une telle somme est une fraction de la même grandeur, dont les termes s'obtiennent par une règle facile à dégager. Il vaudra mieux attendre, pour la lui faire énoncer, que son origine et sa signification se soient bien imposées à l'esprit de l'élève. En particulier, l'addition de q fractions $\frac{a}{b}$ d'une grandeur A, donne une grandeur qui est la fraction $\frac{a.q}{b}$ de A.

L'addition des fractions abstraites sortira de là et les propriétés commutatives et associatives de la somme résultent soit de la règle, par un rappel des propriétés correspondantes des nombres entiers, soit mieux par un retour aux opérations concrètes qui ont une allure plus générale. Aussi, je crois préférable de revenir aux grandeurs mesurables, sans idée préconçue, et de montrer comment l'appel à leurs propriétés caractéristiques conduit à un système cohérent d'opérations d'où résultent les opérations propres aux fractions.

L'addition de grandeurs données, de même espèce, en est une conséquence immédiate. La critique des propriétés commutatives et associatives de telles sommes est sans intérêt pratique. Il suffit d'en constater l'existence en prenant l'exemple de trois vases de capacités quelconques, dont on verse le contenu dans un autre vase, successivement ou simultanément, dans un ordre arbitraire.

Les vases étant de forme cubique et l'arête de l'un d'eux étant choisie, on peut imaginer que les arêtes des deux autres sont respectivement la diagonale d'une face et la diagonale proprement dite du premier : les propriétés de la somme de leurs capacités, au sens visé ci-dessus, n'ont rien à voir avec le fait que ces capacités sont incommensurables deux à deux.

De même, l'appel aux propriétés des nombres entiers ne permettrait pas d'expliquer pourquoi deux quadrilatères dont on obtient les sommets, sur une circonférence, en portant bout à bout, à partir d'un point, des arcs respectivement égaux au quart, au cinquième, au sixième de cette circonférence, ou bien au sixième, au quart, au cinquième de cette circonférence, ont même périmètre.

La soustraction de grandeurs de même espèce se conçoit sans peine et, en représentant par les signes $+$ et $-$ habituels, les opérations d'addition et de soustraction, on arrive à la notion d'un polynôme $A - B - C + D - E$, dont les termes sont constitués par ces grandeurs, sans qu'aucune idée de mesure s'y trouve attachée. Si ces grandeurs sont des longueurs, on peut réaliser la longueur définie par le polynôme, de la façon suivante :

Sur une droite, à partir d'un point O, de gauche à droite, on porte la longueur A ; soit Oa. A partir de la même origine, dans le même sens, on porte la longueur B qui est inférieure à A ; soit b son extrémité. La longueur $A - B$ est représentée par le segment ba. A partir de b, toujours dans le même sens, on porte la longueur C qui est inférieure à ba ; soit b' son extrémité. La longueur $A - B - C$ est figurée en $b'a$. A partir de a et vers la droite, on porte la longueur D ; soit a' son extrémité. La longueur $A - B - C + D$ est représentée par $b'a'$; etc. On obtient finalement un segment $b''a'$ qui réalise $A - B - C + D - E$. Or le point a' a été obtenu en portant bout à bout, à partir de O et vers la droite, deux segments respectivement égaux à A et à D ; le point b'' qui est à gauche de a', a été construit en juxtaposant, à partir de O et dans le même sens, trois segments respectivement égaux à B, C, E. On en conclut aisément l'égalité :

$$A - B - C + D - E = A + D - (B + C + E)$$

et toutes les propriétés commutatives et associatives qui en résultent, à condition que les opérations indiquées restent possibles.

Si l'on suppose que A, B, C, D, E, sont des fractions $\frac{a}{a'}, \frac{b}{b'}, \frac{c}{c'}, \frac{d}{d'}, \frac{e}{e'}$ d'une même grandeur, on aboutit ainsi aux propriétés des polynomes de fractions abstraites.

Le cas où les grandeurs ajoutées sont égales donne la notion de produit d'une grandeur par un nombre entier et inversement celle du quotient de la division d'une grandeur par un nombre entier, utilisées au départ pour la fraction de grandeur.

La signification de l'expression (A—B - C+D—E) × ($a+b-c+d$), où A, B, C, D, E représentent des grandeurs de même espèce, et a, b, c, d, des entiers, apparaît aisément, ainsi que les propriétés distributives correspondantes. Ces opérations sont identiques à celles qui ont été faites sur les collections d'objets et les nombres entiers.

Le fait de voir une fraction de grandeur comme le résultat de la division de cette grandeur par le dénominateur, suivie de la multiplication de la grandeur obtenue par le numérateur de la fraction considérée, est susceptible de généralisation. On peut envisager une suite de divisions et de multiplications successives d'une grandeur par deux séries de nombres entiers, dans un ordre déterminé. Si l'on remarque que le quotient par b de la grandeur A × a est égal au produit de $\frac{A}{b}$ par a, on conclut aisément que les multiplications et les divisions peuvent être groupées et que la grandeur finale résulte de A : 1° par une multiplication dont le multiplicateur est le produit des multiplicateurs donnés, 2° par une division dont le diviseur est le produit des diviseurs donnés ; les propriétés commutatives et associatives de telles opérations en résultent de suite.

On peut grouper ces opérations d'une autre façon et passer de la grandeur primitive à la grandeur finale par la formation d'une série de fractions de grandeurs, le numérateur ou le dénominateur de ces fractions successives pouvant être égal à l'unité. Or si l'une de ces fractions a pour dénominateur l'unité ou si son numérateur est divisible par son dénominateur, la fraction de grandeur correspondante est le résultat de la multiplication de la grandeur précédente par la valeur de la fraction abstraite. On est dônc conduit à regarder une fraction de grandeur comme le produit de cette grandeur par la fraction abstraite. En particulier, le quotient d'une grandeur par b est aussi le produit de cette grandeur par $\frac{1}{b}$. Cette analyse montre que les multiplications successives d'une grandeur par une suite de fractions abstraites, équivalent à une seule multiplication. Le multiplicateur de cette dernière opération s'appellera naturellement le produit des multiplicateurs composants et on arrive à la notion du produit de fractions abstraites, à la règle qui permet de l'évaluer, à ses propriétés.

La multiplication d'un polynôme de grandeurs, par un polynôme de fractions, résulte de ce qui précède, ainsi que les propriétés distributives corrrespondantes.

Si l'on veut remplacer un polynôme de grandeurs par une fraction de grandeur, il faut substituer une telle fraction à chacune des grandeurs qui le constituent, ce qui exige que tous ses termes soient des grandeurs commensurables. La mesure et le choix de l'unité s'imposent alors. Les mesures étant des fractions, un polynôme de grandeurs de l'espèce visée apparait comme le produit d'une grandeur unité par un polynôme de fractions, dont les termes sont les mesures en question. Le produit d'un semblable polynome de grandeurs par un polynôme de fractions est alors le produit de l'unité par deux polynômes de fractions et on est conduit aux propriétés distributives du produit de deux polynômes dont les termes sont des fractions.

Il paraît superflu de poursuivre les développements relatifs à la multiplication. Quand à la division, elle se présente sous divers aspects. Tout d'abord, si B désigne la fraction $\frac{a}{b}$ de la grandeur A, inversement A est la fraction $\frac{b}{a}$ de la grandeur B, c'est-à-dire que si B est le produit de A par $\frac{a}{b}$, A est le produit de B par $\frac{b}{a}$ et par suite B est le quotient de la division de A par $\frac{b}{a}$. Ainsi, la multiplication d'une grandeur par $\frac{a}{b}$ et sa division par $\frac{b}{a}$ sont deux opérations équivalentes. Les deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{b}{a}$ qui se présentent ainsi sont dites inverses ; leur produit est d'ailleurs l'unité.

Cette remarque permet de résoudre un certain nombre de problèmes où ne figurent que des grandeurs de même espèce. Elle est insuffisante lorsque des grandeurs de même espèce A et B interviennent par leur rapport et que ce rapport n'est pas donné directement ; c'est ce qui arrive dans les problèmes dont les données ou les inconnues font intervenir des grandeurs d'espèces différentes. Supposons que A et B aient été tout d'abord comparées à une grandeur auxiliaire U dont elles sont respectivement les fractions $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$. La grandeur $\frac{U}{qq'}$ étant contenue $p.q'$ fois dans A et $p'.q$ fois dans B, le quotient de A par B ou le rapport de A à B est $\frac{pq'}{qp'}$. Le produit de $\frac{pq'}{qp'}$ par $\frac{p'}{q'}$ étant précisément $\frac{p}{q}$, s'appellera quotient de la division de $\frac{p}{q}$ par $\frac{p'}{q'}$. On arrive en même temps à la proposition fondamentale, relative au rapport de deux grandeurs comparées à une troisième ou mesurées avec la même unité.

On pourrait manifestement abréger, à condition de s'en tenir aux points essentiels. Je pense que, dans la pratique, il est préférable de maintenir longtemps l'élève au contact des grandeurs, en s'efforçant de les lui faire voir ou imaginer, plutôt que d'énoncer prématurément des règles en lui donnant la tentation de s'y soumettre avant de les avoir comprises : un instant de réflexion fatigue beaucoup plus qu'un long effort de mémoire.

En mettant en lumière, chaque fois que l'occasion s'en présente, les propriétés essentielles des grandeurs mesurables, on le prépare à la notion des grandeurs proportionnelles dont l'accès ne rencontre tant de difficultés que parce que les choses dont on parle ne se réalisent pas dans sa pensée. En fait, la proportionnalité de deux séries de grandeurs associées, de même espèce ou d'espèces différentes, est établie quand on a constaté que l'égalité des unes entraîne l'égalité des autres et que l'addition des unes s'accompagne de l'addition des autres. Pour n'en citer qu'un exemple on ne peut plus actuel, la formule « à travail égal, salaire égal » prépare la proportionnalité des quantités de travail effectuées et des salaires afférents ; l'addition simultanée des quantités de travail d'une part, des salaires correspondants d'autre part, en achève la réalisation.

Dans la pratique, on masque parfois ces idées capitales par une sorte de dénombrement simultané des grandeurs proportionnelles. C'est ce qu'on fait au début de la géométrie, quand on place en regard de la 360e partie d'un tour complet, un arc d'un rapporteur semi-circulaire. Cela paraît très simple, tout d'abord, à l'élève qui voit un arc en face d'un angle. Il est d'autant plus satisfait que le même nom, le *degré* dans l'espèce, est donné aux grandeurs associés. Au point de vue logique, il y a une complication à mesurer des angles au moyen d'arcs, alors qu'on peut s'en passer, d'autant plus que les arcs en question dépendent du rayon de la circonférence sur laquelle ils sont tracés. On prépare ainsi des confusions, soit dans le langage, soit dans l'écriture et on ne compte plus les élèves, ni même les maîtres, qui disent ou écrivent qu'un angle est égal à un arc ; je reconnais d'ailleurs que ceux qui emploient ce langage ne se méprennent pas en général sur la signification qu'il faut en dégager. Je ne suis pourtant pas bien sûr que des pétitions de principes ne soient parfois amorcées sur ce terrain. Mais, ce qui est plus grave, c'est qu'on prend l'habitude d'utiliser des intermédiaires inutiles et qu'on complique à loisir des choses parfois très simples.

Combien d'élèves arrivent à oublier la définition de l'égalité et de l'addition des angles et voient derrière des actes relevant uniquement de la géométrie, des opérations purement numériques !

Combien de fois ai-je entendu exposer, dans la première année de géométrie, sous la désignation de mesure des angles au centre, des angles inscrits, des angles quelconques, la correspondance qui existe entre ces angles et les arcs interceptés par leurs côtés prolongés ou non, sur une circonférence ! On énonce, à cette occasion, une proposition qui rebute la plupart des élèves et je ne suis pas bien sûr que ceux-ci se rendent vraiment compte de la proportionnalité des grandeurs comparées. Comprennent-ils que l'égalité des mesures, sous certaines conditions, n'est pas particulière à ces grandeurs, mais que c'est là une propriété commune à toutes les grandeurs proportionnelles ? Ils sont d'autant plus portés à en douter que l'on dit même mesure quand il s'agit des angles au centre, mesure moitié quand il s'agit des angles inscrits : c'est la double signification du mot degré qui continue à peser sur la forme des conclusions.

Aussi, ne faut-il pas s'étonner des difficultés rencontrées par les débutants sur ce terrain. Or, on peut fort bien se passer de cette association, pour l'étude des applications qu'on leur propose. Il suffit de remarquer qu'un angle inscrit est la moitié de l'angle au centre correspondant. On aperçoit de suite l'égalité des angles inscrits dans un même segment. On voit non moins bien la somme de deux angles inscrits dont les sommets sont situés sur deux arcs qui ont même corde, mais qui sont placés de part et d'autre de cette corde : l'examen d'un angle rentrant et d'un angle saillant y conduit. On évite ainsi des démonstrations boiteuses comme celles que l'on donne trop souvent encore, à propos du lieu des points M qui sont placés d'un certain côté du support d'un segment rectiligne AB et d'où l'on voit ce segment sous un angle donné. J'ai toujours embarrassé les élèves en plaçant le point M en dehors du segment de cercle utile, de telle sorte que l'un des côtés de l'angle AMB rencontrât, non ce segment de cercle, mais celui qui le prolonge, de l'autre côté de AB. Là encore, la considération des angles se suffit à elle-même.

La mesure directe des grandeurs étant plus simple logiquement qu'une mesure indirecte qui fait appel à des grandeurs proportionnelles devrait donc être préférée. Les exemples du contraire sont nombreux et on arrive parfois à des formules qui font image. Un historien dira que tel général disposait de tant de baïonnettes et de tant de sabres, en mettant les instruments à la place de ceux qui les manient.

Au lieu d'apprécier l'égalité de deux quantités de travail, on se contente d'admettre que deux ouvriers en fournissent autant l'un que l'autre, dans le même temps ; ce sont alors les hommes présents sur le chantier et la durée de leur présence, qui servent à la mesure du travail accompli ou tout au moins du salaire correspondant. Si je ne craignais d'employer une formule qui prête à l'équivoque, je dirais qu'on se contente, là aussi, de la solution paresseuse.

Mon intention n'est pas de reprendre la théorie des grandeurs proportionnelles ; je me contenterai de joindre quelques remarques à celles qui précèdent.

J'ai fait allusion aux difficultés que suscite l'emploi de la règle de trois quand, au lieu de grandeurs mesurables, on fait intervenir des objets définis. Il m'est arrivé souvent de poser le problème suivant :

Un entrepreneur ayant constaté que 6 ouvriers occupés dans un premier chantier y font 13 m^3 de maçonnerie par jour, veut ouvrir un second chantier où l'on bâtisse 52 m^3 dans le même temps ; il se demande combien il devra employer d'ouvriers. Si l'élève ne remarque pas que 52 est un multiple de 13 et s'il emploie la méthode de réduction à l'unité, sous sa forme usuelle, il est conduit à dire : « Si 13 m^3 sont l'œuvre de 6 ouvriers, 1 m^3 est le travail de 6 ouvriers divisés par 13... » Je l'arrête à cet instant et, le plus souvent, ses camarades éclatent de rire. Or un examen des données, sans parti pris, montre qu'un ouvrier fait par jour $\frac{13}{6}$ de m^3 et qu'il faudra autant d'ouvriers que $\frac{13}{6}$ est contenu de fois dans 52, c'est-à-dire $\frac{52 \times 6}{13}$ ou 4×6. Si au lieu de 52 on donne 53, le problème n'a pas de solution, mais on constate que le quotient entier de 53×6 par 13 est encore 24 et que le reste est 6 ; par suite 24 ouvriers feront 52 m^3 et il restera 1 m^3 ou les $\frac{6}{13}$ de l'ouvrage d'un ouvrier, etc.

Cette ressource manquerait si la règle de trois ne faisait appel qu'à des objets définis, dont la division ne peut se concevoir. C'est ce qui arrive dans le problème-type que voici : a ouvriers fabriquent b objets dans une journée, a' ouvriers également habiles en fabriquent b' ; quelle relation existe entre a, a', b, b' ?

Il suffit de considérer $a \times a'$ ouvriers : en vertu de la première hypothèse, ils fabriqueront $b \times a'$ objets ; en vertu de la seconde, ils en fabriqueront $b' \times a$.

On en conclut l'égalité $ab' = ba'$ qui permet de calculer l'un des quatre nombres entiers a, a', b, b', quand les trois autres sont donnés, par une division. Si cette division ne se fait pas exactement, le problème n'a pas de solution, mais on peut en trouver une solution approchée.

D'ailleurs, si a et b sont donnés premiers entre eux, ce que l'on peut toujours supposer, a' et b' en sont des équimultiples et l'on reconnaît la possibilité du problème au fait que a' est donné multiple de a ou b' est donné multiple de b. J'ai déjà fait observer que cette propriété n'est guère accessible aux débutants, car on la démontre habituellement en s'aidant des propriétés du p. g. c. d. de deux nombres.

Remarquons encore que cette solution s'applique aussi bien aux règles de trois où figurent d'une part des objets définis, d'autre part des grandeurs mesurables. Sa place naturelle serait d'ailleurs dans la partie de cette étude, qui vise les nombres entiers.

Il arrive parfois que les deux séries de grandeurs proportionnelles sont de même nature ; c'est le cas du théorème de Thalès. On démontre alors que le rapport d'une grandeur prise dans l'une des séries, à la grandeur correspondante de l'autre série est constant ; ce rapport est un nombre abstrait et comme tel il n'est pas conçu d'emblée. C'est ce qui explique les précautions auxquelles on est obligé quand on définit les rapports trigonométriques. S'il s'agit de grandeurs d'espèces différentes, on ne peut plus parler du rapport de deux grandeurs correspondantes. On utilise alors soit le rapport de deux grandeurs quelconques de l'une des séries, qui est le même que celui des grandeurs correspondantes de l'autre série, soit le quotient des nombres qui mesurent deux grandeurs associées, avec des unités de même espèce, arbitrairement choisies. Ce quotient est encore un nombre constant auquel on peut donner une signification concrète, ce qui en facilite l'intelligence et les applications.

Par exemple, les prix de trois pièces d'étoffe de même nature et de même origine étant exprimés en francs par les nombres a, c, e, les longueurs de ces pièces mesurées en mètres étant respectivement b, d, f, chacun des quotients $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ peut être regardé comme la mesure en francs du prix du mètre de cette étoffe. On a naturellement $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$. D'autre part les trois coupons ayant été tirés d'une pièce qui a pour mesure $(b + d + f)$ mètres et qui aurait dû être vendue $(a + c + e)$ francs, le prix du mètre d'étoffe est encore mesuré en francs par $\frac{a + c + e}{b + d + f}$. On rend sensible aux jeunes élèves, de cette façon, une propriété des rapports égaux qui les surprend toujours quand on la leur énonce *a priori* et dont la démonstration abstraite ne les touche guère, car bien peu se rendent compte de ce qu'il faut voir dans l'expression « valeur du rapport $\frac{a}{b}$ » énoncée sans autre explication.

Que faut-il conclure de ces trop longs développements ? C'est que, si l'on veut donner à l'enseignement de l'arithmétique toute sa portée éducative et en préparer des applications raisonnées, il faut constamment se reporter aux origines, à la vision directe de la matière pour laquelle a été créé l'instrument, car ce sont les propriétés de cette matière qui ont conditionné l'outil.

Inversement, chaque fois qu'on en trouvera l'occasion, il faudra chercher à découvrir une propriété concrète sous une abstraction. Il ne faudrait pas croire que la portée de l'idée générale s'en trouve diminuée. Toute représentation peut être le point de départ d'associations et d'inductions que ne suggérerait pas le simple aspect des formules. Les applications géométriques du calcul algébrique et du calcul infinitésimal en donnent des exemples frappants. La géométrie et l'analyse se prêtent un mutuel appui et il n'est pas rare qu'un progrès de l'une entraîne un progrès de l'autre.

On pourrait prétendre, il est vrai, que le nombre se prête à la représentation des grandeurs indépendamment de leur nature et que les liaisons des nombres renferment une infinité de vérités d'ordre mathématique. Encore faut-il les y découvrir par des interprétations ou des combinaisons convenables. Il n'est pas niable que le retour au concret qui a fourni ces liaisons facilite singulièrement la tâche. Sans compter qu'il permet d'éviter souvent des tentatives vouées d'avance à l'insuccès. Un élève qui n'aurait pas égard à la nature des grandeurs figurant dans ses formules, serait tenté de résoudre deux équations symétriques à deux inconnues en prenant comme inconnues auxiliaires la somme et le produit des inconnues primitives. Ses efforts seraient vains s'il s'agissait d'angles, puisque le produit de deux angles n'a pas de sens. Or, s'il cherchait à se représenter ces angles à partir d'une demi-droite origine, il verrait de suite que les inconnues naturelles sont la demi-somme qui permet de placer la bissectrice de l'angle des deux côtés inconnus et la demi-différence qui donne l'écart de chacun de ces côtés par rapport à la bissectrice. Cette simple remarque appliquée à des problèmes classiques de trigonométrie, comme la résolution d'un triangle dont on donne deux côtés et l'angle compris, ou le problème de la carte, conduit à des calculs tout à fait naturels, alors que les procédés usuels sont entachés d'artifice. Qu'on ne dise pas que c'est là un exemple inventé à plaisir ; en pareil cas, des élèves de Première C-D, qui n'étaient pas inférieurs à d'autres, m'ont proposé de résoudre deux équations trigonométriques symétriques, où les deux inconnues étaient des angles, en prenant la somme et le produit comme inconnues auxiliaires.

Je suis convaincu que les problèmes de la technique donneraient des exemples probants de l'utilité du retour aux origines — c'est la thèse de cet article — pour adapter les procédés généraux du calcul aux besoins du moment. Un savant doublé d'un technicien rendrait à l'enseignement et à la science des services inappréciables en reprenant cette question sur un terrain où je ne puis prétendre.

E. Blutel.

Le Gérant : A. COUESLANT.

CAHORS, IMPRIMERIE COUESLANT *(personnel intéressé).* — 2?.458