DEUXIÈME PARTIE

Adresser au Secrétaire, M. DELCOURT, 21, avenue de Châtillon, Paris, 14e, toute communication relative à la rédaction de la deuxième partie du *Bulletin*.

Il remercie les membres de l'Association qui ont bien voulu lui envoyer dès leur apparition des énoncés de problèmes d'examens ou de concours ou lui signaler des articles de pédagogie ou d'enseignement mathématique publiés par des Revues françaises ou étrangères.

A la recherche d'une méthode

II. DE LA COLLECTION AU NOMBRE ENTIER

J'ai fait allusion, à la fin de mon premier article (voir *Bulletin* n° 33, p. 65), aux difficultés que peut susciter une famille bien intentionnée, lorsqu'elle apporte à l'enseignement une collaboration peu éclairée. Le danger me paraît d'autant plus sérieux que cette étude prétend viser une sorte de rénovation des méthodes. Or, beaucoup parmi nous, sont tentés de croire que la meilleure est celle qui les a formés ! C'est humain et il n'y a pas de raison pour que les parents échappent à cette loi naturelle. Désireux de réduire au minimum l'effort de leurs enfants, certains accepteraient volontiers de les voir conduire dans des sentiers où ils n'ont pas eux-mêmes trébuché trop souvent et où ils pourraient les soutenir à l'occasion. De ce point de vue, ils sont enclins à critiquer les exigences d'un maître qui, mieux informé, cherche à exercer le raisonnement du jeune élève et ne se contente pas de lui faire appliquer les règles traditionnelles. Il n'y a qu'à résister poliment, si l'on ne peut ramener les intéressés à une conception plus saine des droits de l'élève aussi bien que des devoirs du maître.

J'ai parlé aussi du passage des enfants par les mains d'un grand nombre de maîtres ou de maîtresses. Je ne voudrais pas qu'il y eût là l'occasion d'un malentendu. Je connais trop les difficultés rencontrées par ceux qui enseignent les éléments de l'arithmétique, dans les classes primaires ou élémentaires, pour leur adresser la moindre critique. Ils doivent se soumettre aux horaires et aux programmes ; on peut d'ailleurs se demander si l'étendue de ces derniers n'est pas exagérée par le souci de nécessités d'ordre soi-disant pratique et si l'on n'impose pas aux enfants des règles qu'ils seront fort empêchés d'appliquer dans la suite, faute d'en avoir bien vu l'origine. Enfin, là aussi, il faut compter avec les exigences des examens.

Tout au plus pourrais-je signaler à ces maîtres une tentation à laquelle ils échappent d'autant moins qu'ils se font une idée plus haute de cette partie de leur enseignement : les conséquences d'une anticipation peuvent être graves ; elles n'apparaissent guère que plus tard, à ceux dont la tâche s'en trouve compliquée.

C'est surtout aux professseurs de l'enseignement secondaire que je m'adresse. Les études qui les ont conduits à la licence ou à l'agrégation leur ont donné la science nécessaire et la plupart dominent la matière qu'ils sont chargés d'exposer. Des empreintes successives qu'ils ont reçues, les plus profondes sont presque toujours les dernières et on peut affirmer, sans leur faire tort, qu'ils sont beaucoup plus près des élèves des hautes classes que des enfants de Sixième ou de Cinquième

L'effort qu'ils doivent faire, pour s'adapter à ces derniers, est considérable. Mais il n'est pas douteux que, s'ils consentent à le donner, leur valeur scientifique viendra faciliter l'exercice de qualités pédagogiques dont le complet développement est conditionné par un contact prolongé avec les élèves. Je pense que le meilleur moyen de leur faciliter la tâche est de remettre les débutants bien en face d'un problème que la plupart ont sans doute perdu de vue depuis longtemps, si tant est qu'ils aient eu l'occasion d'y réfléchir sérieusement. Ceci me ramène à la notion du nombre et d'abord à celle du nombre entier.

Je ne surprendrai personne en affirmant que cette notion repose sur l'existence d'objets auxquels l'homme attribue l'identité ou tout au moins un caractère commun qui les différencie de tous les autres.

Cette notion existe indépendamment de tout symbolisme et de toute connaissance acquise en arithmétique. Pour constater que deux collections d'objets, de même nature ou non, en contiennent le même nombre, il suffit de confronter les unités de chacune. Ce rapprochement donne l'idée d'égalité de deux nombres et aussi celle de nombre plus grand ou plus petit qu'un autre.

Le groupement de deux collections d'objets de *même nature*, ou l'addition de ces collections, conduit à l'addition des nombres attachés à chacune. Cette simple opération donne au nombre des propriétés que possèdent les collections correspondantes, propriétés indépendantes de la nature particulière, mais commune aux objets rassemblés.

L'arithmétique des nombres abstraits peut prendre naissance, à cette occasion, et c'est ce point de départ que l'on adopte souvent, avec des succès divers, pour un enseignement rationnel.

On revient encore, dans l'étude des opérations consécutives à l'addition, à des groupements convenables d'objets. Mais il est assez rare qu'on le fasse d'une façon systématique, tant est grande la hâte d'aboutir à des règles qu'on cherche à fixer dans la mémoire des élèves par les procédés habituels : savoir la répétition et l'application.

N'est-ce pas là l'origine du malentendu que je signalais et de la confusion qui s'établit, au jugement de l'élève, dans les positions respectives du concret et de l'abstrait ?

On aurait de grandes chances d'y échapper si le contact avec le concret durait assez longtemps pour que la règle apparût simplement comme la traduction d'un état d'esprit. On ne verrait plus alors, au même degré, les hésitations et les tâtonnements que l'on constate si souvent dans l'application de la règle abstraite au problème concret.

J'y vois un autre avantage. Les propriétés dégagées des groupements d'objets peuvent être rendues sensibles à l'enfant, soit par la vision directe, soit par le dessin, soit par l'appel à l'imagination convenablement aidée. Elles se graveront profondément dans son esprit. Ce n'est pas à dire qu'il sera toujours facile de lui faire abstraire l'idée générale ; mais la conclusion découverte de cette façon reposera sur des bases solides et non pas seulement sur la mémoire verbale : on aura fait de l'élève autre chose qu'une sorte de technicien en herbe.

Mais est-il possible d'associer aux diverses opérations de l'arithmétique, des groupements concrets qui puissent intéresser les enfants et retenir leur attention ? De nombreux exemples — la plupart n'ont aucune prétention à l'originalité — permetttont d'élucider cette question.

Tout d'abord, il est nécessaire de distinguer, parmi les propriétés des nombres, celles qui s'attachent aux nombres en général et celles qui sont inhérentes aux nombres figurés dans un système de numération.

Il suffit de se reporter à la signification des symboles utilisés et à la façon dont ils sont associés, pour se représenter la complication de tels systèmes. Toutes les opérations élémentaires, addition, multiplication, puissances, quotients et restes de divisions, y sont mises à contribution. Une telle notation, indispensable à l'emploi du nombre dans la pratique, est d'un maniement délicat, voire dangereux, quand il s'agit de découvrir des propriétés qui n'en dépendent pas. Si l'on revient alors à l'idée de collection, on peut, sans réelles difficultés, faire trouver aux enfants des propositions qu'on serait tenté de croire hors de leur portée.

En principe, les propriétés relatives aux nombres figurés sont plus cachées et on s'explique les déboires éprouvés par les maîtres qui veulent faire comprendre la théorie des opérations à de jeunes élèves ; je reviendrai sur ce point.

A voir la façon machinale dont les enfants utilisent la numération — ils ne sont pas seuls —, il est manifeste qu'ils ne songent guère à son origine et à sa signification. Il m'est arrivé assez souvent de leur demander un diviseur de quatre-vingt-seize, en attirant leur attention sur l'impression qu'ils éprouvent en entendant énoncer le nombre ; ce n'est qu'après bien des efforts qu'on m'a répondu « quatre » et plus difficilement encore « seize ». Il y a cependant là une mine d'exercices de calcul mental, propres à développer l'esprit d'observation, en marge de la mémoire et des règles. Un élève qui analyse l'écriture ou l'audition de 22, 33, 44, ..., 99, doit reconnaître que ce sont des multiples de 11 ; il peut donc donner de suite le quotient et le reste de la division par 11, d'un nombre inférieur à 100 : de là à trouver rapidement le quotient et le reste de la division d'un nombre figuré quelconque, par 11, il n'y a qu'un pas et il est bien inutile de résumer, sous forme de règle, les opérations auxquelles cela conduit. On pourrait faire des remarques analogues pour les nombres 222, 333, ..., 999, par rapport à 111.

Pour mieux faire saisir les services que l'on peut demander à l'idée originelle du nombre, j'examinerai successivement les opérations élémentaires.

Addition.

Le groupement de plusieurs collections d'objets de même nature en donne de suite la notion. Il semble qu'il suffise de mentionner l'invariabilité de la somme, lorsqu'on intervertit l'ordre des termes, qu'on les additionne ou qu'on les fractionne. La confusion signalée à ce propos (loc. cit.) montre qu'il faut insister.

L'appel à divers dénombrements des élèves de la classe est un moyen naturel de fixer l'attention sur ce point. J'en ai souvent utilisé un autre. J'imagine trois corbeilles de billes, placées devant moi, et, pour faciliter le langage, j'invite les élèves à leur donner des noms. Ils prennent le jeu au sérieux et j'obtiens parfois des réponses touchantes : « Jeanne..., Rose..., Andrée », me disent des petits garçons. Nous nous arrêtons à des désignations plus courtes et moins personnelles en prenant les lettres A, B, C. Je m'assure que personne n'ignore la lettre accolée à chaque corbeille. Puis je demande combien on voit de billes dans A : l'un me dit 14, un autre 9, un troisième 17. Je propose de satisfaire tout le monde en adoptant une lettre qui rappelle le nom de la corbeille ; on me donne vite a, puis b et c. Je vérifie d'ailleurs que tous attribuent les mêmes nombres symbolisés aux différentes corbeilles, selon leurs positions respectives. Je fais alors le geste de verser le contenu de B dans A et je demande combien il y a maintenant de billes dans cette dernière ; j'obtiens généralement $a+b$ et $b+a$. J'évite de donner mon opinion ; je recommence et l'accord se fait sur $a+b$ que j'écris au tableau. C'est le moment de simuler le transport du contenu de C dans A : la somme $a+b+c$ est indiquée par tous et je la note. Je suppose ensuite que les choses soient remises dans l'état primitif et j'imagine d'autres façons de rassembler toutes les billes dans l'une des corbeilles ; je me borne à trois, mais je demande si l'on pourrait procéder autrement : il est rare que je n'obtienne pas de réponse justifiée. Je m'assure ainsi que l'attention n'a pas faibli. La question habituelle : « Y a-t-il le même nombre de billes, après chaque opération ? » conduit toujours au même résultat ; l'affirmation est nette, nullement influencée par mon intonation. J'écris alors :

$(a+b+c)$ billes $=(b+c+a)$ billes $=(c+a+b)$ billes $=\ldots\ldots$

La substitution d'autres objets aux billes n'arrête personne et on conclut :

$$a+b+c=b+c+a=c+a+b=\ldots\ldots$$

Il semble que tout soit terminé ; or, c'est à cet endroit précis que j'éprouve des résistances. Le plus souvent, j'ai beaucoup de peine à faire dire aux élèves que la valeur d'une somme ne change pas quand on intervertit l'ordre de ses termes. Pourtant la plupart ont déjà entendu prononcer cette phrase : la stupéfaction du maître m'en est presque toujours un sûr garant. Puisqu'ils sont incapables de la répéter, au moment où elle s'impose, c'est qu'ils n'en avaient pas compris le sens. De pareilles constatations ne devraient pas laisser d'illusion sur la pénétration des idées qui n'auront pas été imposées par une longue préparation.

Du point de vue que j'ai signalé plus haut, le problème de l'addition des nombres figurés — c'est celui dont on se préoccupe le plus — peut se formuler ainsi : étant donné les nombres figurés, attachés à plusieurs collections d'objets de même nature, trouver le nombre figuré qui correspond à la collection unique, résultant de leur réunion. On en peut donner la solution de bonne heure ; voici celle que j'ai développée dans plusieurs classes de Sixième.

Je demande aux élèves de se représenter trois groupes de soldats, placés sur un terrain de manœuvres et contenant respectivement 287, 96 et 358 hommes, par exemple. Comme ceux-ci sont astreints à l'ordre qu'impose la discipline, ils sont rangés, dans chaque groupe, par escouades de 10 hommes et par compagnies de 10 escouades. Je m'assure que ces conventions sont adoptées par tout le monde et, m'adressant au hasard dans la classe, je fais dire les nombres de compagnies, d'escouades et d'hommes qui figurent dans chaque groupe. Puis je propose de réunir les trois groupes, en observant toujours la discipline. On commence généralement par la réunion des compagnies, on continue par les escouades et les hommes ; le report d'une compagnie au lieu de 10 escouades et d'une escouade au lieu de 10 hommes s'effectue sans mon intervention. Le groupement terminé, je demande aux élèves s'ils ont déjà entendu parler de cela. Le plus souvent, la réponse est affirmative et, bien que l'ordre suivi ne soit pas celui qui est adopté dans la pratique, on reconnaît l'addition ; je marque la nuance en complimentant les enfants d'avoir commencé par les unités les plus importantes. Il m'est arrivé pourtant, dans une bonne classe d'un lycée parisien, de recueillir une dénégation dont l'accent ne me permettait pas de suspecter la sincérité. Les élèves s'étaient d'ailleurs vivement intéressés à l'épreuve et avaient montré une satisfaction indéniable en constatant que la réunion des trois groupes leur donnait un nombre exact de compagnies. Il me suffit d'écrire les trois nombres les uns au-dessous des autres pour que le rapprochement se fît dans leur esprit et j'assistai aux manifestations d'une joie véritable. L'enfant ne dissimule pas son plaisir et récompense à sa façon le maître qui a su lui donner l'impression de la découverte.

Il va de soi qu'avec l'aide des bataillons, régiments, etc., on peut pousser l'expérience aussi loin qu'il est utile de le faire.

Soustraction.

Du point de vue concret, cette opération se présente sous divers aspects. On peut enlever une partie d'une collection d'objets ; l'addition de la partie restante et de la partie enlevée reproduit la collection primitive. Chacune des collections mises en jeu peut être répartie en groupes moins importants ce qui conduit à la différence de deux sommes.

On peut aussi envisager deux collections d'objets de même nature et s'en représenter une troisième dont l'addition à l'une des proposées reproduit l'autre. Pour s'en rendre compte, il suffit de confronter les objets des deux collections, en les alignant sur deux files parallèles, à partir de la gauche par exemple : la différence est représentée par la portion de l'une, qui déborde l'autre sur la droite. On voit de suite que si l'on ajoute ou retranche le même nombre d'objets aux deux collections, vers la gauche naturellement, la différence n'est pas altérée. On découvre ainsi les égalités :

$$a - b = a + c - (b + c), \qquad a - b = a - c - (b - c).$$

On voit tout aussi bien ce qui se passe si l'on ajoute à la collection la plus importante, vers la droite, un certain nombre d'objets, ou si cette addition porte sur la moins importante, à condition que l'ordre de grandeurs des collections confrontées ne soit pas modifié. On aboutit aux égalités :

$$a + c - b = a - b + c, \qquad a - (b + c) = a - b - c,$$

qui permettent de transformer un polynome arithmétique, tel que $a - b - c + d + e - f$, sans en altérer la valeur. Mais on peut aussi recourir à une représentation concrète des opérations qui sont indiquées par la structure de ce polynome. Pour cela, on aligne a objets de gauche à droite, puis on enlève b objets et c sur la gauche ; on dispose d objets sur la droite de la collection restante, puis e ; enfin on enlève f objets à gauche : toutes les opérations voulues sont réalisées. En fait, on a disposé $(a + d + e)$ objets de gauche à droite et supprimé $(b + c + f)$ objets sur la gauche et il en reste $a + d + e - (b + c + f)$. Un polynome arithmétique de la forme indiquée équivaut donc à la différence de deux sommes dont la constitution est visible ; la réduction des termes semblables s'en déduit. Ce raisonnement, à peine modifié, conduirait aux principales propriétés des sommes algébriques.

L'appel à des mouvements d'élèves est encore un excellent moyen de fixer l'attention. On propose de faire sortir b élèves d'une classe qui en contient a ; il en restera $a - b$. Si on en faisait rentrer c, le nombre des présents serait $a - b + c$ et celui des absents $b - c$. L'accord s'établit vite sur l'égalité :

$$a - b + c = a - (b - c)$$

qu'on énonce habituellement dans l'ordre inverse ; mais il est extrêmement difficile de faire traduire la règle correspondante, sous forme générale et abstraite, en langage ordinaire.

La soustraction des nombres figurés est acceptée aussi aisément que l'addition, si l'on fait appel aux conventions utilisées pour l'addition. On retranchera 3468 de 5849 en extrayant d'un groupe constitué par 5 régiments, 8 compagnies, 4 escouades et 9 hommes, un autre groupe formé de 3 régiments, 4 compagnies, 6 escouades et 8 hommes ; les élèves seront naturellement tentés de remplacer une compagnie du groupe initial par 10 escouades, pour rendre possible l'extraction des 6 escouades. Cette façon de procéder est employée parfois dans l'exercice de la soustraction.

Multiplication.

Si l'on veut obtenir une représentation concrète du produit de deux nombres entiers, il convient de bien marquer l'égalité des collections d'objets de même nature, dont on réalise l'addition. On est ainsi conduit à aligner les a objets d'une collection et à placer en regard, sur des lignes parallèles, les objets des autres ; le nombre b des files indique le nombre des collections additionnées. Le nombre total des objets est représenté par $a \times b$.

Mais on voit de suite que l'ensemble constitué de cette manière est aussi formé par a files de b objets, d'où vient l'égalité $a \times b = b \times a$.

Supposons que l'on ait réparti les objets d'une collection en plusieurs groupes qui en contiennent respectivement a_1, a_2, a_3, a_4 et décomposé le nombre des collections — par suite celui des files — en d'autres b_1, b_2, b_3. Si l'on réalise ces hypothèses, dans la distribution primitive de l'ensemble des objets, on voit apparaître l'égalité :

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(b_1 + b_2 + b_3) = \Sigma a_i b_j .$$

Lorsque a et b sont égaux, la configuration correspondante est un carré. La symétrie de ce carré par rapport à l'une de ses diagonales (celle qui descend de gauche à droite, par exemple), conduit à un groupement qui utilise à la fois des lignes et des colonnes de même rang, du tableau des objets. C'est ainsi qu'on passe du carré qui porte n objets au côté, à celui qui en a $n + 1$, en bordant le premier, à droite, par une colonne de n objets, en avant par une ligne de n objets, à condition de placer un objet, sur la diagonale principale, au point de croisement de la ligne et de la colonne ajoutées. L'égalité

$$(n + 1)^2 = n^2 + (2n + 1)$$

en résulte. On intrigue beaucoup les élèves en leur proposant de se former en carré sans s'être comptés au préalable ; on les y amène aisément et on leur fait découvrir la loi de formation des carrés des nombres entiers successifs, en amorçant l'extraction de la racine carrée.

L'application de la même idée, en constituant des groupements avec plusieurs lignes et plusieurs colonnes de même rang, arrêtées à leurs points de croisement sur la diagonale principale, conduit à l'égalité :

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + (2a+b)\,b + (2a+2b+c)\,c + (2a+2b+2c+d)\,d$$

qui contient en germe une méthode abrégée d'extraction de la racine carrée.

Une digression fera saisir toute l'importance des groupements dus à l'idée de symétrie. On a imaginé un tableau carré, constitué sur le modèle de la table de PYTHAGORE. A l'intersection de la ligne de rang a et de la colonne de rang b, on suppose placé, soit le nombre $a \times b$, soit le nombre $a^\alpha \times b^\alpha$ (α est un nombre entier quelconque fixe). En effectuant la somme des nombres contenus dans ce tableau, par lignes ou colonnes d'une part, par groupements symétriques d'autre part, on a été conduit à des relations intéressantes, concernant les sommes de puissances semblables des n premiers nombres entiers.

Si, dans un tableau d'objets constitué par a colonnes et c lignes, on enlève b colonnes, le tableau restant ne contient plus que $(a-b) \times c$ objets ; comme le tableau primitif en contenait $a \times c$ et qu'on en a écarté $b \times c$, on est conduit à l'égalité $(a-b)\,c = ac - bc$. Il en résulte

$$(a-b)(c+d) = a(c+d) - b(c+d) = ac + ad - bc - bd$$

et $$(a-b)(c-d) = a(c-d) - b(c-d)$$
$$= ac - ad + bd - bc = ac + bd - ad - bc.$$

La règle des signes, pour la multiplication de deux polynomes arithmétiques, se trouve amorcée ; elle est même complètement établie si l'on a pris la précaution de ramener chacun des polynomes à une différence de deux sommes.

L'emploi de l'espace, au lieu du plan, permet de se représenter un produit de 3 facteurs a, b, c. Il est commode d'utiliser comme objets des cubes égaux que l'on dispose dans c assises superposées, chaque assise ayant a cubes sur l'un de ses côtés et b sur l'autre. A la décomposition du bloc en assises, on peut adjoindre une répartition des cubes élémentaires en murs parallèles de face ou de profil, un seul cube entrant dans l'épaisseur de chaque mur. Les égalités

$$a \times b \times c = a \times c \times b = b \times c \times a,$$

résultent de ces trois distributions. L'échange des deux premiers facteurs étant permis, on démontre ainsi l'égalité des 6 formes d'un produit de trois facteurs. Des groupements convenables, effectués simultanément sur les murs de face, les murs de profil et les assises, conduisent de même à l'égalité :

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)\,(b_1 + b_2 + b_3)\,(c_1 + c_2) = \Sigma\, a_i b_j c_k\,.$$

Le cas où a, b, c sont égaux mène, comme précédemment, à des associations de portions de murs et d'assises de même rang, à des sortes d'emboîtements partiels, remplaçant les encadrements analogues utilisés dans le plan. En particulier, on passe du solide qui porte n cubes sur chaque arête, à celui qui en a $n+1$ en ajoutant une assise, un mur de face et un mur de profil, formés chacun de n^2 cubes élémentaires, à condition de remplir les trois cavités prismatiques avec trois files de n cubes, qu'on réunit au moyen d'un cube d'angle. On réalise ainsi l'égalité :

$$(n+1)^3 = n^3 + (3n^2 + 3n + 1),$$

et plus généralement l'égalité :

$$(a+b+c)^3 = a^3 + [3a^2 + 3ab + b^2]\,b + [3\,(a+b)^2 + 3\,(a+b)\,c + c^2]\,c,$$

égalités qui sont à l'origine des méthodes d'extraction de la racine cubique.

On pourrait, à cette occasion, reprendre la digression faite plus haut, à propos des tableaux carrés.

Lorsque le nombre des facteurs d'un produit est supérieur à 3, la vision directe des faits n'est plus possible, avec le mode de figuration adopté jusqu'ici.

Mais on peut se tirer d'affaire et généraliser, dans une autre voie. Une collection du 1er ordre, contenant a objets, sert de base ; en associant b de ces collections, on a une collection du second ordre ; l'assemblage de c collections du second ordre constitue une collection du 3e et ainsi de suite. Bornons-nous d'abord à l'étude d'une collection du 3e ordre. On peut imaginer différents modes de distribution des objets qui la constituent.

Les a objets d'une collection de base étant alignés, on peut placer tous ceux de la collection du second ordre sur une seule file, ce qui donne $a \times b$ objets alignés ; en disposant les autres collections du second ordre sur des files parallèles, on constitue un tableau rectangulaire qui porte $a \times b$ objets sur l'un de ses côtés et c sur l'autre.

On peut aussi disposer les collections du premier ordre sur des files parallèles et constituer une collection du second ordre, sous forme d'un tableau qui porte a objets sur l'un de ses côtés et b sur l'autre ; la juxtaposition de c de ces tableaux, des deux façons possibles, donne deux nouveaux tableaux qui ont respectivement $b \times c$ et a objets, ou bien $a \times c$ et b objets sur chaque côté. Ces trois dispositions donnent l'égalité des produits $a \times b \times c$, $b \times c \times a$, $a \times c \times b$ et de ceux qui s'en déduisent par l'interversion des deux premiers facteurs, c'est-à-dire l'égalité des divers produits formés avec les trois facteurs.

On pourrait généraliser de cette façon ; ce serait assez compliqué et il n'y a pas d'intérêt sérieux à le faire. L'interversion des deux derniers facteurs d'un produit qui en contient trois étant permise, celle de deux facteurs consécutifs d'un produit quelconque se trouve légitimée et par suite aussi une interversion arbitraire. L'association des facteurs en résulte, puisqu'elle s'applique naturellement aux p premiers.

On pourrait également étendre la multiplication des polynomes arithmétiques susvisés, au cas où le nombre des facteurs est plus grand que 2.

La représentation d'un produit de nombres figurés, au point de vue concret, est beaucoup plus difficile que celle d'une somme, même si l'on se borne au cas de deux facteurs. En voici un essai qui n'innove guère quant à la marche suivie.

La multiplication par 10 d'un groupe du premier ordre, formé par des compagnies, des escouades et des hommes, donne un groupe du second ordre, constitué par autant de bataillons, compagnies et escouades ; la multiplication par 100 fournit un groupe du 3e ordre, formé d'autant de régiments, bataillons et compagnies. La multiplication par 347 revient à l'addition de 7 groupes du premier ordre, 4 du second ordre et 3 du troisième ordre ; la disposition habituelle est ainsi préparée.

Signalons une difficulté à laquelle se heurtent tous ceux qui enseignent l'arithmétique et qui provient de l'insuffisance du contact avec le concret. Lorsqu'on applique la multiplication à des opérations de dénombrement, il faut avoir grand soin de mettre en évidence la nature des objets que l'on dénombre. Les données d'un problème font souvent intervenir des objets de différentes natures ; les nombres correspondants ne jouent pas le même rôle et il faut, *avant tout*, dégager les objets, dont le nombre doit conserver un caractère concret. Tant que l'enfant indique un produit où plusieurs facteurs ont ce caractère, on peut être certain qu'il ne se représente pas ce qu'il fait.

Division.

Du point de vue concret, cette opération se présente sous deux aspects principaux. Deux collections A et B, d'objets de même nature, étant données, la plus grande A en contenant a et l'autre b, on demande d'extraire de la première le plus grand nombre possible de collections égales à la seconde.

A cet effet, on constitue une file de b objets tirés de A, puis une seconde file identique, qu'on place en regard de la première, et ainsi de suite, tant que le nombre des objets inutilisés est supérieur à b ; on forme ainsi un tableau qui a b lignes et q colonnes et il reste r objets non rangés ; r est inférieur à b et peut être nul. L'égalité

$$a = b \times q + r, \quad (r < b),$$

en résulte. On peut fort bien dire qu'on a divisé la collection A par la collection B ; q est abstrait et r concret.

On peut essayer encore de répartir également les a objets de A dans b collections qui en contiennent le plus possible. Pour cela, on extrait b objets de A et on les aligne en amorçant les b collections par l'attribution d'un objet à chacune. On continue la distribution en disposant chaque fois les objets sur des lignes parallèles à la première, tant qu'il en reste assez pour que l'attribution d'un objet aux b collections en formation soit possible. Cette distribution est manifestement identique à la précédente. Elle conduit aux mêmes résultats et on obtient encore $a = q \times b + r$, q et r étant les nombres déjà signalés. Mais cette fois q est concret, r restant abstrait. On dit que la collection A a été divisée par le nombre b.

Toute modification apportée à l'un ou à l'autre des nombres donnés a, b, ou à tous deux, emporte des modifications correspondantes pour q et r. Une étude détaillée m'entraînerait trop loin et je me bornerai à rappeler celles dont l'intérêt pratique est le plus grand ; j'utiliserai de préférence la première définition concrète de la division.

Le problème le plus simple est celui qui se pose lorsque a et b ont un facteur commun. Soit donc $a = a_1 \times c$, $b = b_1 \times c$. La collection A peut être constituée avec a_1 files de c objets et la collection B avec b_1 files identiques. On voit de suite que si q et r sont le quotient et le reste de la division de a_1 par b_1, le groupe A est décomposable en q groupes B et en un groupe qui contient r files et par suite moins d'objets que B. L'égalité $a_1 \times c = b_1 \times c \times q + r \times c$, avec $r \times c < b_1 \times c$, en résulte de suite et on aperçoit les conclusions habituelles, relatives au quotient et au reste.

Supposons que la collection A soit constituée par des groupes partiels A_1, A_2, A_3, de sorte que $a = a_1 + a_2 + a_3$. Pour distribuer A en groupes B, contenant b objets, il est tout naturel d'opérer d'abord sur chacun des groupes qui la constituent. On obtient ainsi des quotients q_1, q_2, q_3 et des restes r_1, r_2, r_3. A se trouve décomposée en $(q_1 + q_2 + q_3)$ groupes B et en un groupe qui contient $(r_1 + r_2 + r_3)$ objets.

Le cas le plus simple est celui où $r_1 + r_2 + r_3$ est inférieur à b ; dans ce cas, on obtient le quotient et le reste de la division de A par B, sans autres opérations nouvelles que les deux additions indiquées ; cela arrive, en particulier, si r_1, r_2, r_3 sont nuls.

Sinon, la distribution des $(r_1 + r_2 + r_3)$ objets en groupes B donnera le complément du quotient et le reste de la division de a par b : ce reste est le même que celui de la division de $r_1 + r_2 + r_3$ par b, et si $r_1 + r_2 + r_3$ est un multiple de b, il en est de même de a.

Une étude analogue s'applique aisément au cas où le groupe A résulte de la différence de deux groupes A_1 et A_2 ; en particulier, si la division de a_1 et a_2 par b donne le même reste, a est un multiple de b.

Le cas où a est un produit $a_1 \times a_2$, n'est autre que celui où a est une somme de a_2 nombres égaux à a_1. En utilisant les résultats obtenus plus haut, on voit que si q_1 et r_1 sont le quotient et le reste de la division de a_1 par b, le groupe A est décomposable en $q_1 \times a_2$ groupes B et un groupe qui contient $r_1 \times a_2$ objets. r_1 est inférieur à b, mais il n'en est pas de même, en général, du produit $r_1 \times a_2$. La division de a par b n'est donc pas terminée ; le quotient complémentaire et le reste s'obtiendront en divisant $r_1 \times a_2$ par b. Dans tous les cas, les restes des divisions de $a_1 \times a_2$ et de $r_1 \times a_2$, par b, sont les mêmes. On peut donc, dans la recherche du premier, remplacer le facteur a_1 par le reste r_1 correspondant ; la généralisation est immédiate.

Supposons maintenant que b soit un produit $b_1 \times b_2$. Associons au nombre a un groupe A d'hommes que nous distribuons d'abord en escouades de b_1 hommes, puis en compagnies de b_2 escouades ou de $b_1 \times b_2$ hommes. La première distribution donne e escouades — e est le quotient de a par b_1 — et un nombre d'hommes r_1 insuffisant pour constituer une escouade. La répartition des escouades par compagnies en donne c — c étant le quotient de e par b_2 —, et il reste un nombre d'escouades r_2 inférieur à b_2. Avec ces escouades inutilisées et les r_1 hommes laissés de côté tout d'abord, on n'arrive pas à constituer b_2 escouades ou une compagnie. Il en résulte que c est bien le nombre des compagnies déduites du groupe A, c'est-à-dire le quotient de a par $b_1 \times b_2$. La conclusion s'impose.

J'ai répété cette expérience dans beaucoup de classes de Sixième et de Cinquième ; j'ai naturellement associé l'ensemble des élèves à ces groupements, en cherchant à leur faire imaginer les manœuvres correspondantes, et j'ai toujours été satisfait des résultats. Mais il faut avoir grand soin de ne jamais laisser deviner la conclusion avant le moment où elle apparaît à tous, sous peine de voir les élèves brûler les étapes.

L'emploi des bataillons permet de traiter le cas où b est un produit de trois facteurs, et ainsi de suite.

La division des nombres figurés pourrait être présentée à partir de là, à l'aide d'une représentation concrète du dividende et du diviseur ; il n'y a pas intérêt à le faire, à cause des difficultés du langage. D'ailleurs, la règle à laquelle on arrive est assez compliquée pour que les enfants n'aient pas l'illusion d'en comprendre l'origine, lorsqu'on n'a pas tenté de la leur faire saisir ; le besoin d'une démonstration ne sera pas sensiblement diminué chez eux par une application préalable et répétée. J'indiquerai simplement une façon de présenter la preuve, qui a toute la valeur d'une démonstration.

Le maître effectue la division en suivant la marche habituelle. Il écrit soigneusement au tableau les produits partiels, avec de la craie ordinaire ; les dividendes partiels sont transcrits avec de la craie de couleur et le reste final avec de la craie ordinaire ; un seul trait est tiré au-dessous du dividende donné. Les élèves sont invités à faire la preuve de l'opération en multipliant le diviseur par le quotient, suivant le procédé habituel, avec addition du reste ; le maître les aide en leur disant de faire abstraction des nombres écrits avec la craie de couleur et de poser la craie. Ils voient alors que toutes les multiplications partielles sont effectuées et que les produits partiels sont disposés de bas en haut. L'addition du reste et de ces produits, se substituant aux soustractions successives auxquelles a conduit l'application de la règle, vient justifier celle-ci.

Je pourrais donner beaucoup d'autres exemples à propos de la divisibilité des nombres figurés ou non. Ceux que j'ai produits ouvrent la voie au calcul algébrique et en amorcent les méthodes. Ils suffiront à montrer les services que peut rendre l'étude préalable du concret pour arriver aux propriétés abstraites du nombre entier. La façon de les présenter a une importance capitale. La pénétration de l'idée ne peut être contrôlée que par un emploi systématique des méthodes actives. Ce sont les réponses des élèves qui indiqueront au maître l'opportunité du choix des images ou des notations. J'ai représenté le plus souvent par des lettres les nombres utilisés ; c'est un moyen d'éviter les opérations intempestives que suggère fréquemment l'emploi des nombres figurés. On échappe quelquefois à ce danger en présentant aux élèves des nombres assez grands pour qu'ils reculent devant la tentation d'effectuer ; cette façon de faire est plus longue, je ne crois pas qu'elle assure davantage la compréhension. Il m'a semblé que la notation littérale, convenablement amenée, pouvait être acceptée de bonne heure ; mais c'est au maître à s'en assurer.

Le travail de découverte en commun ne donne pas complète satisfaction au besoin d'action des enfants ; il faudra en tenir compte et entrecouper l'exposition théorique d'exercices et d'applications qui s'y encadrent naturellement, ou bien lui consacrer un temps soigneusement limité. Des exercices de calcul mental ou écrits constituent un excellent adjuvant. Mais il sera bon d'exercer en même temps les élèves à l'observation des nombres employés, afin d'en utiliser les particularités ; il faudra naturellement les mettre souvent sur la voie. Ce sera un moyen de renouveler l'intérêt émoussé par une application répétée des règles générales. Là aussi, le retour au concret apportera souvent une aide appréciable. Sur ce terrain, je signale l'utilité d'étendre la table de PYTHAGORE aux produits de nombres compris entre 10 et 30, par les 9 premiers nombres ; on facilitera beaucoup la recherche des chiffres successifs du quotient, dans une division, lorsque les deux premiers chiffres du diviseur forment un nombre compris entre 10 et 30.

Ceux qui me liront avec soin seront sans doute étonnés de constater que je n'ai jamais utilisé le mot « fois », dont l'usage est si répandu, au début de l'arithmétique ; c'est avec l'intention de serrer la réalité de plus près que je l'ai écarté. L'emploi de ce mot est souvent commode, il n'est pas toujours sans danger ; j'aurai l'occasion de le montrer dans un article consacré à l'édification d'une théorie des fractions abstraites, à partir des grandeurs mesurables.

E. BLUTEL.