

VI. Documents officiels

Rapport sur la Composition de Mathématiques (Classe de Mathématiques) au Concours général des Lycées et Collèges en 1922

LA GÉOMÉTRIE AU CONCOURS GÉNÉRAL

Il n'était pas rare, pendant les dernières années qui ont précédé la guerre, d'entendre constater l'affaiblissement des études géométriques, dans l'enseignement secondaire.

La réforme de 1902, attribuant à l'algèbre une part d'une importance toute nouvelle, avait formé des élèves capables d'appliquer les méthodes de calcul avec une sûreté que leurs devanciers ne connaissaient pas au même degré.

La géométrie élémentaire figurait encore aux programmes en bonne place. En particulier, dans la classe terminale de Mathématiques, où devait s'opérer une sorte de synthèse des résultats acquis antérieurement, on avait espéré que le maniement des méthodes générales viendrait projeter la lumière sur un certain nombre d'idées maîtresses, au grand bénéfice de la culture.

Les résultats obtenus aux examens n'ont pas confirmé cet espoir. Les candidats redoutent le problème de géométrie et, trop souvent, au cours des dix dernières années notamment, l'emploi de ce mode de jugement a causé de grosses déceptions aux jurys de concours importants.

Il en fut de même pour l'épreuve de géométrie, proposée au Concours général de 1922 (1). Une analyse détaillée des difficultés rencontrées par les concurrents pourra intéresser les maîtres qui ont la charge de cet enseignement.

Dans une première partie, on demandait d'indiquer des propriétés caractéristiques d'un couple de cercles C_1, C_1' , qu'une inversion quelconque fait correspondre à un cercle C et à son axe C' ; il fallait dire en outre si les cercles C_2 et C_2' déduits de C_1 et C_1' , par une seconde inversion également arbitraire, possèdent ces mêmes propriétés.

Ce texte rédigé à dessein ne laissait rien préjuger de la réponse et faisait une large place à l'initiative des candidats : aucune personnalité ne s'est révélée.

Les plans de C_1 et C_1' sont rectangulaires, la droite commune à ces plans passe par les centres des cercles, cette droite est partagée harmoniquement par les cercles.

Ces trois propriétés ont été démontrées par un très petit nombre qui ont suivi, dans les moindres détails, l'application d'une inversion aux données C et C' . Personne n'en a établi en toute rigueur la

(1) Voir l'énoncé *Bulletin* n° 26, page 128.

réciprocité, c'est-à-dire n'a montré qu'elles fussent vraiment caractéristiques. On peut même se demander si ce dernier mot a été compris. Personne ne paraît s'être préoccupé des propriétés qui distinguent les données C et C' , et les séparent de l'ensemble constitué par un cercle et une droite quelconques. Un tel manque de curiosité, au départ, fait prévoir toutes les difficultés rencontrées dans la suite : comment caractériser les résultats si l'étude des données n'est d'abord poussée à fond ?

Il y a là un défaut de logique sur lequel on ne saurait trop insister et qui s'explique malheureusement par la forme traditionnelle d'un enseignement où la part faite à l'étude des bases est insuffisante et où l'on se préoccupe surtout de conduire l'élève à un but soigneusement indiqué. L'ensemble des cercles C_1, C'_1 , n'étant pas vraiment qualifié, il va de soi que la question relative à C_2, C'_2 n'a pu être traitée et les réponses correspondantes se sont généralement bornées à des affirmations ou des négations que rien n'était.

On a eu l'intuition, dans quelques copies, que la conservation des angles, par l'inversion, pouvait jouer un rôle dans l'étude proposée. Mais rien de bien coordonné n'a été fait avec ce moyen et trop de concurrents ont parlé, à ce propos, de l'orthogonalité de lignes ou de surfaces qui n'ont pas de point commun !

Que dire de ceux qui, dans une pareille question, voient encore dans un cercle une portion de plan et non une simple ligne ? On devine les étranges conséquences auxquelles conduit l'inversion d'un cercle ainsi conçu, dans l'espace surtout. La précision du langage est utile et on n'en saurait trop recommander le culte ; mais si la distinction entre circonférence et cercle peut être utile au début, elle n'a guère que des inconvénients lorsqu'on s'élève dans l'étude de la géométrie et il serait fâcheux — même en mathématiques — de ne pas utiliser le sens général d'une phrase pour saisir la signification précise d'un mot qui y figure.

L'étude d'un quadrilatère gauche Q , dont les sommets *opposés* sont situés respectivement sur C_1 et C'_1 , faisait l'objet d'une seconde partie. *On demandait d'établir la relation qui existe entre les longueurs de ses côtés, puis de voir si un quadrilatère dont les côtés vérifient cette relation, peut être inscrit, comme Q , dans deux cercles C_1, C'_1 , de l'espèce indiquée.*

On pouvait arriver à la relation en partant du quadrilatère dont les sommets situés sur C et C' correspondent à ceux de Q dans l'inversion effectuée. C'est la voie généralement suivie par ceux — ils sont assez nombreux — qui ont trouvé la relation demandée. Personne n'a vu que ce procédé permet de conclure à la conservation de propriétés plus générales, relatives aux distances mutuelles de quatre points quelconques, soumis à une inversion arbitraire. La proposition réciproque n'a été étudiée à fond dans aucune copie.

Que dire aussi de ceux qui ont attribué au quadrilatère Q la propriété d'être inscriptible, au risque de dire une absurdité ou une

banalité suivant que l'inscription est visée dans un cercle ou dans une sphère. Quelques concurrents ont commis une erreur grave, au sujet de la disposition des sommets de Q , et ont placé deux sommets consécutifs sur C_1 ; le texte était pourtant très clair. On est surpris de trouver cette faute dans une copie qui présente de sérieuses qualités et dont l'auteur se fût sans doute placé au premier rang si son attention n'avait été un instant en défaut.

Cette erreur a réagi sur la troisième partie où l'on proposait d'étudier les quadrilatères Q , en nombre infini, dont on donne deux sommets opposés ainsi que la droite qui joint les deux autres. *Le déplacement des sommets variables et le lieu du centre de la sphère circonscrite* étaient particulièrement visés.

Quelques-uns ont vu l'infinité simple de quadrilatères Q , mais aucun n'a traduit sous une forme précise la liaison des sommets mobiles. Tous ont échoué dans la recherche du lieu du centre de la sphère circonscrite. La donnée de la droite qui joint les sommets variables a provoqué une confusion regrettable : certains ont vu là une longueur, au lieu de la ligne indéfinie qui porte les deux points. On ne saurait trop attirer l'attention des maîtres sur des erreurs de ce genre, car elles sont la conséquence de négligences trop souvent tolérées chez les élèves, dans les débuts de la géométrie élémentaire.

La plupart de ceux qui ont trouvé la relation demandée dans la seconde partie et même un de ceux qui ont commis la confusion signalée à ce propos ont pu ébaucher la quatrième qui s'énonçait ainsi : Deux points A et B étant fixés sur C_1 , et un point M se déplaçant sur C_1 , *que peut-on dire des surfaces, lieux géométriques des bissectrices des droites MA, MB ? Comment se coupent ces surfaces ?*

L'invariabilité des points de rencontre s, s' , des bissectrices et de la droite AB a été vue et les deux cônes engendrés par ces bissectrices ont été qualifiés. Personne n'a vu ce qu'est leur intersection, en dehors du cercle C_1 qui leur sert de base.

Il est vrai que l'intersection de deux cônes à base circulaire n'est pas au programme de la classe de Mathématiques ; mais il est bien facile de voir que le plan de C_1 est un plan de symétrie commun aux deux cônes, ce qui conduit vite à la solution.

Quelques concurrents ont remarqué que les génératrices associées sM et $s'M$ sont rectangulaires, mais aucun n'a songé à retrouver ainsi que s et s' sont deux points diamétralement opposés sur certaine sphère passant par C_1 . Que penser de ceux qui ont conclu de l'orthogonalité des génératrices à celle des surfaces ?

Le fait qu'une inversion quelconque fait correspondre aux deux cercles C_1 et C_1 , dont les plans sont rectangulaires, deux nouveaux cercles C_2 et C_2 , dont les plans sont également rectangulaires, a été manifestement l'origine de la cinquième question, savoir : *Est-il*

possible de trouver deux cercles Γ et Γ' tels qu'une inversion arbitraire leur fasse correspondre des cercles dont les plans se coupent sous un angle constant ? Ceux qui avaient pressenti l'identité des deux ensembles de cercles C_1, C'_1 et C_2, C'_2 ont rapproché cette question de la première, mais aucun n'est arrivé au résultat.

Quelques tentatives intéressantes ont pourtant été faites et l'un des concurrents ayant cherché à définir l'angle des plans des deux cercles Γ_1, Γ'_1 inverses de Γ et Γ' par rapport à un point quelconque O , a bien vu que c'est l'angle des deux sphères (Γ, O) et (Γ', O) ; malheureusement, il n'a pas suivi cette idée.

Chez la plupart, l'ignorance complète du résultat a laissé libre cours à l'imagination et des tentatives de généralisation ont été aventurées, qui ne s'appuyaient sur aucune base : on en devine les fâcheuses conséquences.

En résumé, si l'on constate, dans un assez grand nombre de copies, des connaissances suffisantes, on rencontre rarement une méthode sûre, dont la pratique conduit de prémisses soigneusement analysées à des conclusions incontestables. On y trouve moins encore la vigueur et la pénétration que devrait donner aux esprits le commerce de la géométrie.

Il semble que l'abus de démonstrations dont le but accapare l'attention de celui qui s'y livre, remplace une curiosité intelligente par une tendance à deviner plutôt qu'à trouver. On sent que beaucoup de temps est perdu à vérifier l'exactitude de conséquences aventurées. Au lieu d'observer sans parti pris et de conclure, on commencerait par imaginer, quitte à démontrer. Il y aurait donc un défaut très net dans la formation des esprits.

Le sujet proposé à l'activité des concurrents est pourtant de ceux qui se laissent traiter à l'aide de quelques éléments fondamentaux.

Tous ceux qui ont étudié quelque peu l'inversion savent que c'est une transformation ponctuelle, réciproque, qui fait généralement correspondre une sphère à une sphère — par suite un cercle à un cercle — et qui conserve les angles sous lesquels se coupent des courbes et des surfaces. Les cas limites où les sphères sont remplacées par des plans et les cercles par des droites sont également connus de tous.

Il est bien facile d'esquisser une solution en partant de là.

Un cercle C et son axe C' sont tels que tout plan mené par C' et toute sphère passant par C sont orthogonaux.

Réciproquement, si les plans menés par une droite C' et les sphères passant par un cercle C sont orthogonaux, C' est l'axe de C . Il suffit d'ailleurs que deux plans menés par C' et deux sphères passant par C soient orthogonaux. Les propriétés caractéristiques de C et de C' sont alors dégagées.

Une inversion quelconque fait correspondre à C et C' deux cercles C_1 et C'_1 tels que toutes les sphères passant par l'un et toutes les sphères passant par l'autre sont respectivement orthogonales.

D'ailleurs, si deux sphères passant par un cercle C_1 et deux sphères passant par un cercle C'_1 sont orthogonales, une inversion dont le pôle est pris sur C'_1 fait correspondre à C_1 et C'_1 un cercle C et son axe C' . L'orthogonalité en question est donc caractéristique de C_1 et C'_1 .

En particulier, il suffit que le plan P de C_1 et la sphère S dont C_1 est un grand cercle, d'une part, le plan P' de C'_1 et la sphère S' dont C'_1 est un grand cercle, d'autre part, soient orthogonaux.

Il en résulte que P et P' sont rectangulaires, que P passe par le centre de C'_1 et P' par le centre de C_1 , enfin que la droite commune à P et à P' est partagée harmoniquement par C_1 et C'_1 .

Telle est la forme généralement obtenue des propriétés caractéristiques. L'identité des deux ensembles de cercles (C_1, C'_1) et (C_2, C'_2) apparaît alors.

On peut caractériser le couple C_1, C'_1 d'une façon plus réduite encore et qui prépare la suite du problème.

Un cercle C et son axe C' sont caractérisés par ce fait que le cercle et deux plans quelconques menés par la droite sont orthogonaux, ou que la droite et deux sphères quelconques passant par le cercle sont orthogonales. Par suite, deux cercles C_1 et C'_1 sont tels que l'un d'eux et deux sphères quelconques passant par l'autre sont orthogonales.

Soit alors $AA'BB'$ un quadrilatère Q dont les sommets opposés A, B sont sur C_1 , les deux autres étant sur C'_1 . Parmi les sphères passant par C'_1 , il y en a une Σ' qui a son centre sur AB . Cette sphère étant orthogonale à C_1 , le segment AB est partagé harmoniquement par Σ' , et un point quelconque M de cette sphère est tel que $\frac{MA}{MB} = C_1^c$.

On en conclut la relation $\frac{A'A}{A'B} = \frac{B'A}{B'B}$.

Réciproquement, si cette relation est vérifiée, les points A' et B' se trouvent sur une sphère Σ' qui a son centre sur AB et partage harmoniquement le segment AB . Cette sphère contient le cercle C'_1 . De même, le cercle C_1 est sur une sphère Σ qui passe par A et B , qui a son centre sur $A'B'$ et qui partage harmoniquement le segment $A'B'$. Ces deux sphères sont définies dès l'instant que le quadrilatère est donné. Coupons Σ par un plan P arbitraire, mené par AB , et Σ' par le plan P' perpendiculaire à P , mené par $A'B'$. Nous obtenons ainsi deux cercles C_1 et C'_1 . La sphère Σ' et le cercle C_1 qui passe par A et B sont orthogonaux, en vertu des constatations précédentes. De même, le cercle C_1 et le plan P' qui passe par le centre de Σ et est perpendiculaire au plan P sont orthogonaux : C_1 et C'_1 possèdent donc les propriétés caractéristiques.

Les deux points A, B étant donnés, ainsi que la droite $A'B'$, la sphère Σ' appartient à un faisceau linéaire dont le plan radical est le plan de symétrie du segment AB . Soit ω le point où ce plan rencontre $A'B'$. La puissance de ω par rapport à toutes les sphères du faisceau étant la même, on a : $\overline{\omega A'} \cdot \overline{\omega B'} = C_1^c = \overline{\omega A}^2 = \overline{\omega B}^2$.

Le déplacement des points A' et B' en résulte.

La sphère circonscrite à Q passe par deux points fixes A, B, et elle est tangente en A à la droite ω A, en B à la droite ω B; elle passe donc par le cercle tangent à ω A en A et à ω B en B. Son centre décrit l'axe de ce cercle.

A et B étant fixes sur C_1 et un point M décrivant C'_1 , les bissectrices des droites MA, MB rencontrent la droite AB aux deux points fixes s, s' , où cette droite perce la sphère Σ' . Ces bissectrices engendrent donc deux cônes dont les sommets respectifs sont s, s' , le cercle C'_1 étant une base commune.

Le plan P du cercle C_1 , passant par les sommets et par l'axe de C'_1 , est un plan de symétrie commun à ces deux cônes. Prenons-le comme plan horizontal de projection et figurons les traces des deux cônes, de la sphère Σ' et du plan P' de C'_1 sur ce plan P.

Les génératrices principales des deux cônes sont rectangulaires deux à deux, puisque s et s' sont diamétralement opposés sur Σ' . Elles se coupent en deux points H et H', en dehors de la trace de P'. Le plan vertical HH' apparaît alors comme un plan de section antiparallèle, pour les deux cônes, par rapport au plan P'. Il coupe les deux cônes suivant des cercles qui ont HH' pour diamètre et qui par suite sont confondus. On obtient ainsi un nouveau cercle commun aux deux cônes; ceux-ci n'ont pas de point commun en dehors de ce cercle et de C'_1 .

D'une remarque faite dans la partie critique de cette étude, il résulte que la dernière question posée se ramène à la suivante :

Est-il possible de trouver deux cercles Γ, Γ' tels que les deux sphères définies par l'un ou l'autre de ces cercles et par un point quelconque O de l'espace se coupent sous un angle constant, ou encore que les sphères passant par Γ et les sphères passant par Γ' se coupent respectivement sous un angle constant ?

Comme on peut toujours mener par Γ une sphère σ ou un plan π qui coupe orthogonalement le plan π' de Γ' , l'angle constant dont il s'agit ne peut être que droit. Ainsi, toutes les sphères passant par Γ et toutes les sphères passant par Γ' se coupent à angle droit. Les deux ensembles de cercles (Γ, Γ') et (C_1, C'_1) coïncident.

E. BLUTEL.

Inspecteur général de l'Instruction publique.