

Énoncés de Problèmes de Mathématiques

1. Ecole Normale Supérieure de St-Cloud et Professorat des Ecoles Normales (aspirants) 1^{re} Partie Concours de 1922

Algèbre. — D'un même point O partent quatre segments de droites OA, OB, OC, OD , situés dans un même plan, formant trois angles adjacents AOB, BOC, COD , tous égaux à 60° , de sorte que OA et OD sont dans le prolongement l'un de l'autre. Les aires des triangles AOB, BOC, COD se succèdent en progression géométrique.

On demande de calculer la raison q de cette progression géométrique et les longueurs $x = OA, y = OB, z = OC, t = OD$, connaissant :

1^o la somme a de ces quatre longueurs ; 2^o la somme $\frac{1}{b}$ de leurs inverses ; 3^o la somme k^2 des aires des trois triangles.

Combien le problème peut-il admettre de solutions formant des figures géométriques distinctes ?

Les grandeurs a et b étant données, entre quelles limites doit varier l'aire totale k^2 pour qu'il y ait des solutions ? Le problème est-il toujours possible ?

a et b restant données, pour quelles valeurs de k^2 deux des quatre longueurs OA, OB, OC, OD sont-elles égales ? Trois de ces quatre longueurs peuvent-elles être égales ?

Géométrie. — Sur une droite indéfinie XX' on prend un point fixe O , et on considère en même temps un point A en dehors de cette droite.

1^o On demande de trouver sur XX' deux points B et C , de part et d'autre du point O et à égale distance de ce point, tels que le rapport $\frac{AB}{AC}$ ait une valeur donnée k .

2^o Pour les valeurs convenables de k le problème admet deux solutions. Soient (B, C) et (B', C') les deux couples de points qui répondent à la question, les points B et B' étant situés du même côté du point O . Démontrer que le produit $OB \times OB'$ est indépendant de k et égal à \overline{OA}^2 .

3^o Trouver le lieu géométrique des centres des cercles inscrit et exinscrits aux deux triangles ABB' et ACC' lorsque le rapport k varie. On indiquera la portion du lieu qui convient seule.

4^o Traiter le même problème pour le lieu géométrique des centres des cercles circonscrits Γ et Γ' aux deux triangles ABB' et ACC' .

5^o Soient H et K les points de contact d'une tangente commune extérieure aux deux circonférences Γ et Γ' , I le milieu du segment HK .

Démontrer que la perpendiculaire élevée par le point I à cette tangente commune passe par un point fixe.

6° Construire les points B, C, B', C' sachant que la longueur HK a une valeur donnée, l. Discuter.

**2. Ecole Normale Supérieure de Fontenay-aux-Roses
et Professorat des Ecoles normales (aspirantes) 1^{re} Partie
Concours de 1922 (1)**

Algèbre. — On considère la fonction y de x définie par la relation

$$y = \frac{ax - 11}{x + a - 12}$$

dans laquelle a désigne un nombre.

1° On choisit $a = 5$. Représenter graphiquement les variations de la fonction ainsi précisée.

Montrer qu'il existe deux droites parallèles à la droite représentant graphiquement la fonction $y = -x$ qui rencontrent chacune la courbe représentative en deux points confondus. Calculer à 1/100 près les coordonnées des deux points de contact (Indiquer le détail des calculs).

2° Soit C_a la courbe représentant les variations de la fonction y de x , qui correspond au nombre a .

Chercher pour quelles valeurs de a cette fonction est croissante, décroissante, ou constante.

Déterminer a de façon que la courbe C_a passe par le point donné P de coordonnées p, q . Discuter suivant la position du point P.

Rechercher, suivant la position du point P, si la courbe C_a qui y passe, correspond à une fonction y de x croissante, décroissante ou constante. On indiquera les résultats en les traduisant graphiquement.

Géométrie. — On donne dans un plan deux triangles égaux ABC et $A_1B_1C_1$, de même disposition d'angles. On prend les milieux A_2, B_2, C_2 , des segments AA_1, BB_1, CC_1 qui joignent les sommets homologues de ces triangles.

1° Prouver que les perpendiculaires élevées à ces segments en leurs milieux concourent en un point I, d'où l'on voit ces segments sous un même angle.

2° Prouver que le triangle $A_2B_2C_2$ est semblable au triangle ABC et que le rapport de similitude est égal au rapport des distances du point I à deux sommets homologues de ces triangles.

3° D'un point arbitraire O on mène les vecteurs $\overline{OA_3}, \overline{OB_3}, \overline{OC_3}$ respectivement équipollents aux vecteurs $\overline{AA_2}, \overline{BB_2}, \overline{CC_2}$; prouver que le triangle $A_3B_3C_3$ est semblable au triangle ABC; peut-on, ici encore, donner une expression simple du rapport de similitude?

4° Montrer que la somme des aires des triangles $A_2B_2C_2$ et $A_3B_3C_3$ est égale à l'aire du triangle ABC. Prouver que la condition nécessaire

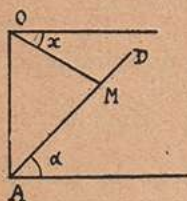
(1) Voir dans *La Revue pédagogique* de février 1923 le Rapport sur ce concours.

et suffisante de l'égalité des deux triangles $A_2B_2C_2$ et $A_3B_3C_3$ est que les triangles donnés ABC et $A_1B_1C_1$ aient leurs côtés homologues rectangulaires.

5° Le triangle $A_1B_1C_1$ restant fixe, on substitue au triangle ABC successivement tous les triangles obtenus en le faisant tourner autour d'un point fixe H du plan. Trouver le lieu du point I .

3. Baccalauréat 2^e Partie-Mathématiques, octobre 1922

Aix-Marseille : On donne sur une verticale deux points O et A tels que $OA = h$; et par A on mène une droite (D) faisant l'angle α avec l'horizon.



1° Déterminer sur cette droite un point M tel qu'un point matériel pesant abandonné en O sans vitesse initiale et mobile sans frottement sur la droite OM parvienne en M dans un temps donné t .

Discuter.

On pourra prendre pour inconnue l'angle x de OM avec l'horizon.

2° Application numérique : $\alpha = 60^\circ$, $h = 9^m,80$, $t = 2$ secondes. On prendra $g = 980$ dans le système centimètre-seconde.

Alger : On donne un cercle O' de rayon R , une tangente Ox au point O et le diamètre Oy . Un point P parcourt le cercle. Sa position est définie par l'angle $POx = \varphi$. On construit le triangle isocèle OPQ ($OP = PQ$).

1° Trouver par rapport aux axes Ox , Oy l'équation du cercle. Calculer les coordonnées du point de rencontre des hauteurs du triangle OPQ et vérifier que le lieu de ce point est le cercle donné. Solution géométrique.

2° Etudier les variations de l'aire du triangle OPQ . Maximum de cette aire.

3° Démontrer que le rayon du cercle circonscrit au triangle OPQ est constant.

4° Lieu du point de rencontre des médianes du triangle OPQ .

(La figure montre le point Q sur Ox).

Besançon : On considère le tronc de cône régulier circonscrit à une sphère; on donne la longueur a de l'arête latérale et l'angle α de celle-ci avec le plan de base inférieure du tronc de cône. Cela posé, on demande, en fonction de ces données : 1° d'exprimer le rapport de la surface totale du tronc de cône, à la surface de la sphère inscrite; 2° d'exprimer le rapport du volume du tronc de cône au volume de la même sphère; 3° de comparer ces deux rapports; 4° d'étudier les variations de chacun d'eux; 5° de vérifier les résultats obtenus.

Bordeaux : Les angles d'un triangle vérifient la relation

$$2 \operatorname{tg} A = \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C$$

1° Etablir l'équivalence de cette relation et des suivantes :

$$\operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C = 3 \qquad \cos(B - C) = 2 \cos A$$

- 2° Etant donné A, calculer B et C. Discuter.
- 3° Connaissant a et la somme $b + c$, résoudre le triangle. Discuter.
- 4° Etudier les variations de $\cos B + \cos C$ quand A prend toutes les valeurs compatibles avec l'existence du triangle.

Caen : Soient : O le centre d'un cercle ; r son rayon ; A, B deux sommets consécutifs d'un rectangle inscrit dans le cercle ; I le milieu du côté AB ; x l'angle IOA.

Faisant tourner la figure autour de la droite OI (prolongée) comme charnière, on considère la sphère de rayon r , et le cylindre inscrit dans cette sphère, qu'engendrent respectivement le cercle et le rectangle primitivement considérés.

Exprimer en fonction de r et de x la surface totale du cylindre, et étudier la variation de cette surface lorsque l'angle x varie.

Construire, sans faire intervenir aucun calcul d'approximation, la valeur de x qui rend la surface totale maxima.

Considérant, par rapport à deux axes rectangulaires, la courbe représentative de la variation étudiée, évaluer l'aire comprise entre cette courbe, l'axe des abscisses et l'ordonnée finale.

(On nomme *surface totale* d'un cylindre la somme obtenue en ajoutant à la surface latérale les surfaces des deux bases).

Clermont : Soit l'équation

$$(1 - t)x^2 + (3t - 5)x + 4(2 - t) = 0$$

- 1° Discuter la réalité et le signe de ses racines.
- 2° Lorsque les deux racines sont positives, on les considère comme les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle. Calculer l'hypoténuse de ce triangle en fonction de t . Vérifier que l'expression obtenue est rationnelle et étudier ses variations, lorsque t croît dans les intervalles pour lesquels les deux racines sont positives. Construire la courbe représentative.
- 3° Calculer, en fonction de t , le rayon du cercle inscrit dans le triangle précédent et étudier ses variations dans les mêmes conditions que ci-dessus. Calculer également ce rayon en fonction de l'hypoténuse.

Dijon : Soit C la courbe représentative de la variation de la fonction

$$y = x^2 + \frac{\lambda^2}{x^2 - 1}$$

- 1° Construire cette courbe pour $\lambda = \frac{1}{2}$.
- 2° Calculer, en fonction de λ , les coordonnées des points de C où la tangente est parallèle à Ox ; discuter leur nombre suivant la valeur de λ .
- 3° Montrer que, lorsque λ varie, ces points sont situés sur une demi-droite et une conique fixes que l'on construira.

Grenoble : Les trois points A, B, C sont en ligne droite ; le point C est entre A et B et les distances AC et CB ont respectivement pour mesures les nombres a et b ($a > b$).

Par A et par B, dans un même plan et d'un même côté de AB, on mène à AB deux demi-perpendiculaires Ax et By. On prend sur Ax un point P dont la distance au point A a pour mesure x et sur By un point Q dont la distance à B a pour mesure y . On désigne par S le nombre qui mesure la surface du triangle PCQ et par C l'angle PCQ.

1° Exprimer S et $\text{tg} C$ en fonction de x, y, a, b .

2° Si, en même temps que le nombre positif x varie et que, par suite, le point P se déplace sur Ax, le point Q se déplace aussi sur By de façon que l'angle PCQ conserve une valeur constante de 45° , quelle est la région de Ax que peut décrire P? Etudier comment varient y et S quand P décrit cette région en s'éloignant du point A.

3° Si, en même temps que P se déplace sur Ax, Q se déplace aussi sur By de façon que l'aire S demeure constante et égale à $a \times b$, quelle région de Ax le point P peut-il décrire; étudier les variations de y et de l'angle C quand P décrit cette région en s'éloignant du point A.

4° Comment faut-il choisir les nombres x et y pour que l'aire PCQ ait une valeur S donnée, et que l'angle PCQ ait une valeur C donnée?

Lille : Un point matériel M parcourt d'un mouvement uniforme et en faisant 3 tours par minute une circonférence (C) de centre O et de rayon 1 dm.

I. — Calculer la vitesse et l'accélération du point M.

II. — On considère la projection orthogonale m du point M sur un plan P passant par O et faisant un angle de 45° avec le plan du cercle. Quelle est la trajectoire de m ? Chercher l'hodographe du mouvement de m . Montrer que l'accélération est dirigée suivant mO et calculer sa valeur en fonction de \overline{mO} .

III. — Un second point N parcourt la circonférence (C) d'un mouvement uniforme et effectue un tour en 14 secondes. A l'origine des époques, M et N se trouvent tous deux en coïncidence avec un point I. On demande à quelle époque ils se retrouveront à nouveau coïncider avec I. Dans l'intervalle, en quels points du cercle se seront-ils rencontrés et à quelles époques?

Lyon : On désigne par a, b, c les côtés d'un triangle ABC et par m la médiane issue du sommet A. On donne a, A et m .

1° Montrer que l'on a : $b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2m^2$.

2° Calculer b et c .

3° Construire géométriquement le triangle.

4° Discussion en supposant A aigu et se servant soit de 2° , soit de 3° .

5° Application numérique : $a = 10, m = 6, A = 60^\circ$.

Calculer b et c .

Montpellier : Soit ABC un triangle dans lequel la bissectrice intérieure d de l'angle A est moyenne proportionnelle entre les deux segments m, n , qu'elle détermine sur le côté BC.

- 1° Calculer les trois angles dans le cas où : $B - C = 90^\circ$.
- 2° Calculer les trois côtés en supposant connus l'angle A et la bissectrice d . Construction géométrique.

Nancy : On considère l'équation

$$(1) \quad x^2 - (a + b)x + a^2 = 0,$$

dans laquelle x est l'inconnue, a et b sont les coordonnées d'un point M d'un plan rapporté à deux axes rectangulaires.

On demande sur quelles lignes de ce plan doit se trouver le point M dans les trois cas suivants :

- 1° l'équation (1) a ses racines égales ;
- 2° elle a une racine égale à $+1$;
- 3° elle a une racine égale à -1 .

On construira exactement ces trois lignes, et l'on indiquera comment est située la première par rapport aux autres.

Indiquer, suivant la région du plan où se trouve le point M, le nombre des racines de l'équation (1) comprises entre -1 et $+1$.

Paris : Une parabole est définie par son foyer F et par sa directrice D ; son paramètre est p ; son sommet est le point A. On mène par F une corde M'FM rencontrant la parabole en M et M', telle que l'angle AFM ait une valeur donnée $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Calculer les deux longueurs

$$FM = r, \quad FM' = r' \quad \text{en fonction de } \alpha.$$

Quelle relation y a-t-il entre r et r' quand α varie ?

Déterminer α de telle façon que l'on ait $2r + r' = m$, m étant une longueur donnée. Discussion.

Poitiers : Déterminer la latitude d'un lieu, sachant qu'à la date du solstice d'été le rapport de la durée du jour à celle de la nuit est égal à m en ce lieu. Discussion.

(On représentera par ε l'angle aigu que fait le plan de l'écliptique avec le plan de l'équateur.)

Rennes : Etant donnés dans un plan un cercle de centre O et de rayon R et un point S situé à une distance d de O ($d \neq R$), le transformé du cercle O par une inversion (I) de pôle S et de puissance k est un cercle de centre C et de rayon R'.

- 1° Calculer la distance OC et le rayon R' en fonction de R, d , k .
- 2° Trouver le lieu du point d'intersection P des droites OM, CM', M et M' étant deux points appartenant respectivement aux circonférences O, C et se correspondant dans l'inversion (I).

3° En supposant $R = 1$, $d = \frac{1}{2}$, $k = 1$, calculer la distance OP en fonction de l'angle $SOP = x$. Etudier et représenter graphiquement la variation de $y = \frac{1}{OP}$ en fonction de x ($0 \leq x \leq 2\pi$).

Strasbourg : On donne un carré de côté $2a$. De chaque sommet

comme centre, on décrit avec le rayon a un quart de cercle dans l'intérieur du carré. On inscrit au quadrilatère curviligne ainsi formé un nouveau carré (en menant à deux côtés opposés des tangentes parallèles à une droite arbitraire et aux deux autres côtés des tangentes perpendiculaires aux précédentes).

1° Etudier la variation de l'aire du petit carré ainsi construit lorsque la direction de ses côtés varie.

2° Etudier dans les mêmes conditions la variation de l'aire comprise entre le quadrilatère curviligne et le cercle inscrit au carré variable.

Toulouse : Soit un trapèze dont la grande base $AB = a$, est invariable en grandeur et en position.

Le côté oblique $AD = m$ et la petite base $DC = b$ ne sont invariables qu'en grandeur.

On demande les lieux géométriques :

1° du point d'intersection des côtés obliques ;

2° du centre de gravité de l'aire du trapèze.

4. Baccalauréat 1^{re} Partie C et D, octobre 1922

Aix-Marseille : On partage l'angle de 60° en deux parties x et y telles que l'on ait $\text{tang } x \cdot \text{tang } y = m$ ($m > 0$).

1° Trouver la somme $\text{tang } x + \text{tang } y$.

2° Former l'équation ayant pour racines $\text{tang } x$ et $\text{tang } y$; discuter.

3° Calculer x et y pour $m = \frac{1}{3}$ et $m = 3$.

Alger : Soit ABC un triangle rectangle défini par l'hypothénuse (*sic*) $BC = a$ et par le plus petit angle aigu B. On fait tourner le triangle autour de la hauteur AH.

1° Calculer en fonction de a et de B le volume compris entre les deux cônes de révolution engendrés par les triangles ABH et ACH.

L'hypothénuse (*sic*) a étant donnée, déterminer B pour que ce volume ait une valeur donnée V.

Discuter suivant les valeurs de V.

2° Calculer l'aire totale de la surface qui limite le volume V. Montrer qu'on peut la mettre sous la forme

$$S = \pi a^2 (1 - \sin B) (1 + \cos B) (\cos B + \sin B),$$

et rendre cette expression calculable par logarithmes. Que devient-elle quand, a étant fixe, on donne à B la valeur qui rend maximum le volume V ?

Besançon : Série C : On envisage deux équations du second degré, déterminées par leurs coefficients,

l'une $ax^2 + bx + c = 0$,

l'autre $At^2 + Bt + C = 0$.

On suppose que les racines x_1 et x_2 de la première équation, et les racines t_3 et t_4 de la seconde forment une seule et même progression par quotient :

$$x_1 : x_2 : t_3 : t_4.$$

On demande de préciser toutes les relations entre les six quantités données a, b, c, A, B, C , qui seront les conditions nécessaires et suffisantes de la réalisation de l'hypothèse faite.

Besançon : Série D : Un triangle ABC, de côtés a, b, c , est rectangle en A.

1° Démontrer que la bissectrice CK de l'angle C divise le côté AB en deux segments AK et KB tels que $\frac{AK}{KB} = \frac{CA}{CB}$.

2° Déterminer les distances x et y du point de rencontre M des deux bissectrices CK et BL aux côtés CA et AB.

3° L'hypothénuse (*sic*) a ayant pour longueur 1, déterminer les longueurs AB et AC de telle façon que le produit $\overline{AB} \times \overline{AC}^2$ soit maximum. Quel est alors l'angle C ?

(La figure montre les deux bissectrices intérieures au triangle.)

Bordeaux : 1° Pour quelles valeurs de λ l'équation

$$(3\lambda + 4) \cos x + (4\lambda - 3) \sin x + 13\lambda = 0$$

a-t-elle des solutions ?

2° Pour quelle valeur de λ le nombre des solutions comprises entre $\frac{3\pi}{2}$ et 2π est-il égal à un ?

Caen : Série C : Variation de la fonction

$$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{13}{4}x + \frac{1}{24}$$

lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Considérant, par rapport à deux axes rectangulaires OX, OY, la courbe représentative de cette variation, déterminer le point de la courbe où la tangente fait avec l'axe OX le plus petit angle, et construire, sans faire intervenir aucun calcul d'approximation, la tangente en ce point.

Caen : Série D : Soit ABC un triangle isocèle, rectangle en A, dont l'hypoténuse BC est prise comme unité de longueur. Par un point quelconque M de BC, on mène à BC une perpendiculaire, sur laquelle on porte, à partir de M, une longueur MP = MA ; on porte ensuite sur le prolongement de BC, à partir de C, une longueur CQ = BM.

Désignant par x la longueur BM, par S l'aire du triangle BPQ, et par y le carré de S, on exprimera y en fonction de x , et on étudiera la variation de y lorsque le point M se déplace entre B et C sur l'hypoténuse BC.

N. B. — Pour étudier la variation du signe de la dérivée y' , on commencera par établir la remarque suivante :

Lorsqu'un polynôme entier est de la forme $(x - a^2) \varphi(x)$, le polynôme entier dérivé est de la forme $(x - a) \psi(x)$.

Clermont : Dans un triangle ABC, on donne le côté $BC = a$, le rayon r d'un cercle inscrit ou exinscrit et la valeur algébrique du segment $BD = x$, comptée positivement de B vers C, D étant le point de

contact avec BC de ce cercle inscrit ou exinscrit. Calculer la surface S du triangle, donner une interprétation du signe de S et discuter, suivant la valeur de x , la position du cercle par rapport au triangle ABC.

Dijon : On considère une pyramide SABCD dont la base ABCD est un carré de côté a . Le sommet S se projette orthogonalement sur le

plan de la base au centre de celle-ci H ; $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Par AB on fait

passer un plan qui fait un angle α avec le plan de base et coupe la pyramide en deux parties. On demande d'évaluer le rapport des volumes de ces deux portions et de le calculer dans le cas particulier où le plan sécant est bissecteur du dièdre d'arête AB qui appartient à la pyramide.

Grenoble : 1° Discuter le nombre des racines de l'équation trigonométrique :

$$a \cos 2x = 4 \sin x$$

suivant les diverses valeurs du paramètre a .

2° Résoudre cette équation pour $a = 4$.

3° Etudier les variations de la fonction

$$y = a \cos 2x - 4 \sin x,$$

quand x varie de 0 à 2π .

Lille : Dans une feuille de carton plane on veut découper un abat-jour de lampe qui s'applique exactement, sans la dépasser, ni se recouvrir lui-même sur une monture métallique ayant la forme de la surface latérale d'un tronc de cône de révolution, dont on a mesuré les diamètres des bases d et D ($d < D$) et l'arête a . Quels sont les rayons et l'angle au centre des deux arcs de circonférence qui limitent le morceau de carton que l'on doit découper dans la feuille donnée?

Application : $d = 20$ cm., $D = 30$ cm., $a = 20$ cm.

Lyon : Dans un triangle ABC, rectangle en A, on donne l'hypoténuse a et la somme s des deux autres côtés b et c .

1° Former et résoudre une équation trigonométrique permettant de calculer l'angle B.

2° Déterminer les côtés b et c directement, c'est-à-dire sans utiliser le calcul de 1°.

3° Construire géométriquement le triangle, sans se servir ni de 1° ni de 2°.

4° Discuter le problème, en se servant soit de 1°, soit de 2°, soit de 3°, soit de toute autre méthode.

5° On prend $a = 5$, $s = 7$, trouver B.

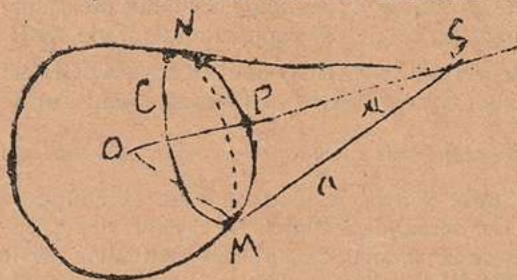
Montpellier : Soit une demi-circonférence de diamètre $AB = 2R$.

Par le point A on mène une corde AM ; soit P la projection du point M sur le diamètre AB.

Déterminer l'angle $PAM = \theta$ de façon que la somme $PA + AM$ soit égale à une constante donnée m . Discuter. Valeur de θ pour

$$m = \frac{3}{2} R.$$

Nancy : Soient un cône de révolution d'apothème a et de demi-



angle au sommet x et la sphère inscrite dans ce cône le long du cercle C de base.

On demande de déterminer x de façon que le rapport de l'aire de la calotte sphérique MPN, limitée au cercle C et situé à l'intérieur du

cône, à l'aire latérale de ce cône soit un nombre donné k .

Application numérique : $k = \frac{1}{2}$.

Paris : Série C : Etant donné un carré ABCD de côté a , on décrit l'arc AC de centre D et de rayon DA et on joint un point M de cet arc au point A et au point B. Désignant par x l'angle BAM, on demande :

1° d'exprimer AM en fonction de x et de a et de former l'équation en $\operatorname{tg} x = t$ relative au cas où l'on a

$$\frac{MA}{MB} = k;$$

2° de discuter par rapport à k cette équation et d'examiner les cas particuliers.

Paris : Série D : Etant donné un angle XOY de 45° , on place sur OY un point B ($OB = l$) et sur OX un point A à une distance double $OA = 2l$.

On mène dans l'intérieur de l'angle une troisième droite OD faisant avec OX un angle x et on projette sur cette droite les deux points A et B.

1° Déterminer x de façon que les deux longueurs AA' , BB' soient égales. Construction géométrique de la droite OD.

2° Variation du produit $AA' \times BB'$ quand x varie de 0 à 45° . Maximum de ce produit.

(La figure montre que A' et B' sont les projections respectives de A et B sur la droite OD).

Poitiers : Un triangle bac , du plan horizontal de projection, est isocèle

$$ba = ac, \quad \text{angle } bac = 120^\circ$$

Le point a est la projection horizontale d'un point A, tel que le triangle bAc soit rectangle.

Calculer les angles Aba et Aca .

Rennes : Soit AA' le diamètre horizontal d'une circonférence de centre O et rayon R, sur la demi-circonférence supérieure on prend le point M défini par l'angle $2\varphi = \widehat{OA, OM}$.

1° Calculer la surface latérale du cône engendré par AM ou $A'M$ en tournant autour de AA' .

2° Calculer le volume engendré par le triangle $AA'M$ en tournant autour de AA' .

3° Evaluer en fonction de l'angle φ la somme $AM + MA'$; variation de cette longueur, maximum et minimum.

On prolonge $A'M$ d'une longueur $MP = AM$. Quel est le lieu du point P ? Montrer que la connaissance de ce lieu permet de suivre sans calcul la variation de $AM + MA'$.

Strasbourg : On donne un cercle de centre O et rayon a , un point A sur le cercle et le point B milieu de OA . Un angle droit MOM' pivote autour de O . On désigne par x l'angle de la bissectrice intérieure de MOM' avec OA .

1° Calculer en fonction des lignes trigonométriques de x : les longueurs MB et $M'B$; la distance de B à la droite MM' et l'aire du triangle MBM' . Etudier les variations de cette aire lorsque x varie de 0 à π .

2° Calculer le sinus de l'angle MBM' en fonction de $\cos x$ et $\sin x$ et donner les valeurs de $\cos x$ pour lesquelles cet angle MBM' est égal à $\frac{\pi}{2}$. Peut-on construire géométriquement les points M et M' correspondant à cette valeur de l'angle MBM' ?

Toulouse : Soit $AA' = a$ un segment fixe donné dans l'espace; on considère deux droites fixes, D et D' , qui passent respectivement par A et A' , sont perpendiculaires à AA' et perpendiculaires entre elles.

1° On prend un point M sur D et un point M' sur D' . Calculer en fonction de a , de $AM = l$ et de $A'M' = l'$ le volume V de la pyramide $AA'MM'$ et la longueur d du segment MM' .

2° Montrer que le centre de la sphère qui passe par les quatre points A, A', M, M' est le milieu O de MM' et trouver le lieu géométrique de ce point quand M et M' varient de façon que d soit constant, ou de façon que l'on ait constamment $l = l'$.

5. Problèmes de géométrie

I. — On considère un rectangle $ABCD$. Par un point M de son plan on abaisse les perpendiculaires sur ses côtés qui rencontrent AD et BC en P et P' , AB et CD en Q et Q' .

1° Lieu (C) du point M quand il se déplace de telle sorte que l'angle $(PQ, P'Q')$ soit égal à un angle donné α . Cas particulier où cet angle est droit.

2° Lieu (C') du point M quand il se déplace de telle sorte que le rapport des longueurs PQ et $P'Q'$ reste égal à un nombre donné n .

3° Comment les courbes (C) et (C') se déplacent-elles quand l'angle α et le nombre n varient d'une manière quelconque?

4° Lieu du point de rencontre des droites PQ et $P'Q'$ quand le point M se déplace d'une manière quelconque dans le plan.

II. — On donne dans un plan trois points A, B, C non en ligne droite et un point S , et on prend trois points A', B', C' situés respec-

tivement sur les droites SA, SB, SC et satisfaisant aux conditions :

$$\overline{SA} \cdot \overline{SA'} = \overline{SB} \cdot \overline{SB'} = \overline{SC} \cdot \overline{SC'}$$

1° Les droites SA, SB, SC sont les trois hauteurs du triangle ABC ; que sont-elles dans le triangle A'B'C' ?

2° Les droites SA, SB, SC sont les trois bissectrices du triangle ABC ; que sont-elles dans le triangle A'B'C' ?

3° Les droites SA, SB, SC sont les trois symédianes du triangle ABC, que sont-elles dans le triangle A'B'C' ?

III. — On donne une circonférence O et trois points A, B, C hors de son plan. Construire trois droites concourantes passant respectivement par les trois points A, B, C et s'appuyant sur la circonférence O.

IV. — 1° Le plan radical (R) de deux sphères variables (S) et (S') assujetties à passer respectivement par deux cercles fixes (C) et (C') passe par un point fixe au moins quand les sphères varient. Etudier les divers cas de figure.

2° Le plan (R) étant donné ainsi que les cercles (C) et (C'), construire les sphères (S) et (S').

3° Etudier le déplacement de la ligne des centres des sphères (S) et (S') quand le plan (R) se déplace en passant en outre par un point fixe arbitrairement choisi.

4° Construire trois sphères appartenant à un même faisceau et passant respectivement par trois cercles donnés.