Sur un Problème du Concours général

Je me propose — sans prétendre épuiser la question — d'indiquer quelques exercices que suggère le problème du Concours général 1922 pour la classe de Mathématiques.

Etant donnés un cercle C et son axe (C'), si on les soumet à une inversion arbitraire, on obtient deux cercles (C_1) et (C'_1) formant ce que M. Guichard appelle dans ses *Compléments de géométrie* un anneau orthogonal.

I. — Appelons A, B, I, J, les points où la ligne des centres rencontre (C_1) et (C'_1), O le centre de (C'_1). On peut, en premier lieu, donner le problème suivant :

1° Si S *est un point de* (C'_1), *le cône de sommet* S *et de base* (C_1) *admet pour seconde direction de plan circulaire le plan passant par* SO *et perpendiculaire au plan de* (C'_1).

2° Si S *et* S' *sont deux points diamétralement opposés de* (C'_1), *les cônes de sommet* S *et* S' *et de base commune* (C_1) *ont en commun un second cercle. Le plan de ce second cercle passe par une droite fixe, si* S *et* S' *se déplacent sur* (C'_1) *en restant diamétralement opposés.*

3° Si l'on a un faisceau plan de cercles auquel appartient (C_1) *et admettant* I *et* J *pour points de* Poncelet, *le cercle* (C'_1) *est, soit le lieu* *des points* S *tels que les cônes de sommet* S *et de bases respectives les cercles du faisceau soient homologiques, soit le lieu des centres d'inversion transformant les cercles du faisceau en cercles d'une même sphère et dont les plans soient parallèles.*

II. — Le cercle (C) et son axe (C') font songer aux parallèles et à l'axe d'une surface de révolution, par exemple à un cône et à sa surface inverse (D). Sans insister sur les propriétés de la surface (D) déduites en transformant les parallèles, les génératrices, les plans tangents et les sphères inscrites au cône, je veux simplement mettre en évidence un mode de génération très simple de cette surface (D), qui est, comme on le sait, une cyclide de Dupin à points coniques.

Soit U un centre d'inversion, V l'inverse du sommet du cône. L'axe (C') du cône et un parallèle variable (C) se transforment en un anneau orthogonal (C'_1), (C_1). Les deux génératrices fixes du cône situées dans le méridien de U se transforment en deux cercles (E), (E'), situés dans le plan de (C'_1) et circonscrits aux triangles UVA, UVB. On voit facilement que le cercle (C'_1) est cercle d'inversion pour (E), (E'), le module d'inversion étant $\overline{OI}^2$. A et B sont des points antihomologues pour (E), (E'). Au fond, ceci tient au fait que (C') est axe de symétrie des deux génératrices situées dans le méridien de U. D'ailleurs, si A' et B' sont les deux autres points où (E), (E') rencontrent AB, le cercle de diamètre A'B' et formant un anneau orthogonal avec (C'_1) est le transformé du second parallèle du cône suivant lequel la sphère passant par U et (C) coupe le cône. A' et B' sont également des points antihomologues pour (E), (E'). On a par suite le mode de génération :

Etant donnés dans un plan horizontal deux cercles sécants (E), (E'), *on mène par un de leurs centres d'inversion* O *une droite variable qui rencontre les deux cercles en deux couples de points antihomologues* A, B *et* A', B' ; *l'ensemble des cercles de diamètres* AB, A'B', *et situés dans le plan vertical de trace* AB *forme, quand on prend tous les couples de points antihomologues, la surface* (D).

De ce mode de génération, s'appliquant à des cercles (E), (E'), sécants ou non, et pris pour définition de la cyclide de Dupin, M. Guichard a déduit élémentairement les principales propriétés de la dite surface dans une étude parue dans le *Journal de Mathématiques Elémentaires* (15 décembre 1910).

On montrerait aussi, en calquant le raisonnement précédent, que la surface inverse d'un tore admet le même mode de génération.

III. — Il était également question, dans le problème du Concours général, de quadrilatères gauches (Q) pour lesquels le produit de deux côtés opposés égale le produit des deux autres côtés. Un tel quadrilatère (Q) est encore caractérisé comme il suit : chaque diagonale rencontre la conjuguée de l'autre par rapport à la sphère circonscrite à (Q). Par une généralisation naturelle, on est conduit à se demander s'il existe des tétraèdres — que nous appellerons abréviativement dans la suite : tétraèdres (T) — tels que le produit de deux arêtes opposées soit constant. D'abord, si on a un tétraèdre (T), le tétraèdre dont les sommets sont respectivement les inverses des sommets de (T) est également un tétraèdre (T), ainsi que le montre le théorème qui sert à transformer les relations métriques. Or, tout tétraèdre régulier, toute pyramide triangulaire régulière sont des tétraèdres (T). Plus simplement, si on prend un triangle équilatéral ABC et un centre d'inversion arbitraire D, le tétraèdre DA'B'C' — A', B', C' étant respectivement les inverses de A, B, C, — est un tétraèdre (T).

Relativement à un tétraèdre (T), indiquons les résultats suivants :

1° *Dans un tétraèdre* (T), *chaque arête rencontre la conjuguée de l'arête opposée par rapport à la sphère circonscrite à* (T).

2° *Etant donné un triangle* ABC, *le lieu des points* D *tels que le tétraèdre* ABCD *soit un tétraèdre* (T), *est un cercle formant un anneau orthogonal avec le cercle circonscrit au triangle* ABC.

3° *Etant donné un tétraèdre* (T) *de sommets* A, B, C, D, *les bissectrices des angles en* C *et* D *des triangles* ABC *et* ABD *rencontrent* AB *aux deux mêmes points* I *et* J. *Les six sphères analogues à la sphère de diamètre* IJ *ont deux points communs. Si l'on prend l'un de ces points pour centre d'inversion, le tétraèdre* A'B'C'D' *dont les sommets sont les inverses des points* A, B, C, D, *est un tétraèdre régulier.*

4° *Toute section antiparallèle d'un tétraèdre* (T) *est un triangle équilatéral.*

5° *Les droites qui joignent les sommets d'un tétraèdre* (T) *aux centres des cercles inscrits dans les faces opposées sont concourantes. Les quatre droites obtenues en joignant dans chaque face les pieds des bissectrices extérieures sont dans un même plan.*

6° *Si* (T') *est le tétraèdre polaire réciproque de* (T) *par rapport à la sphère circonscrite à* (T), (T') *et* (T) *sont homologiques et* (T') *est également un tétraèdre* (T).

J. Coissard,
Professeur au Lycée Pasteur.