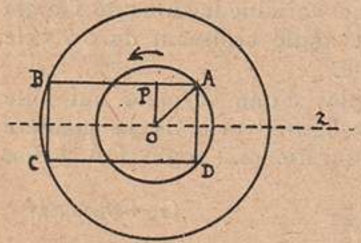
Sur le sens de variation d'une fonction

On a proposé à l'examen du Baccalauréat (Caen. 1909), le problème suivant : *Etudier la variation de l'aire d'un rectangle dont les sommets sont sur deux cercles concentriques.*

On reconnaît aisément que deux sommets voisins doivent être sur l'un des cercles, les deux autres sommets étant sur l'autre cercle, et un peu de réflexion conduit (voir la figure) à *déplacer le point* A *sur la moitié supérieure du petit cercle ;* on réalise ainsi les deux cas de figure possibles, O entre AD et BC, ou non.



La variable naturelle est l'angle zOA, que l'on fait varier de o à π, et le problème se traite bien ainsi.

Prenons comme variable la distance OP, variable qui joue le même rôle pour les deux cercles. En posant $OP = x$, on a

$$(1) \qquad \frac{S}{2} = x\left(\sqrt{R^2 - x^2} + \varepsilon\sqrt{r^2 - x^2}\right)$$

Pour suivre le déplacement du point A, *on fait croître la variable x* de o à r avec $\varepsilon = +$, puis *on la fait décroître* de r à o avec $\varepsilon = -$. Il faut alors appliquer l'énoncé suivant, que l'on ne saurait trop recommander : *Une fonction d'une variable varie dans le même sens que cette variable, ou en sens contraire, selon que sa dérivée par rapport à cette variable est positive ou négative.* On a facilement

$$\frac{S'}{2} = \left(\sqrt{R^2 - x^2} + \varepsilon\sqrt{r^2 - x^2}\right)\left(1 - \frac{\varepsilon x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}.\sqrt{r^2 - x^2}}\right);$$

la dérivée a le signe de l'expression

$$(2) \qquad \sqrt{R^2 - x^2}.\sqrt{r^2 - x^2} - \varepsilon x^2$$

et cette expression s'annule pour une seule valeur de x^2, avec $\varepsilon = +$

On a ce tableau

x	o	croît $\varepsilon = +$			r	décroît $\varepsilon = -$	o
S'	+		o		$-$ | +		+
S	o	croît	max.	décroît		décroît	o

Le maximum a lieu pour la valeur de x qui annule l'expression (2) ; on a ainsi, sans calculer cette valeur :

$$PA.PB = \overline{OP}^2,$$

c'est-à-dire que l'angle AOB est droit ; on a alors $S = 2Rr$. On a d'ailleurs

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{r^2}$$

(On peut remarquer que la dérivée est infinie pour $x = r$, à cause de PA, dont la variation est infiniment grande par rapport à celle de OP lorsque x est voisin de r.)

La remarque faite ici a déjà été signalée dans *la Revue de l'Enseignement des Sciences* (mars-avril 1920), avec des exemples. On a fait observer alors que, si l'on va au fond des choses, la notion de fonction de fonction intervient dans les questions dont il s'agit. On considère l'aire S comme une fonction de OP, OP étant une fonction de l'angle zOA ; on peut dire que l'on prend comme variable le sinus de l'angle zOA, au lieu de l'angle lui-même ; cet angle croissant de 0 à π, le sinus croît d'abord pour décroître ensuite.

On peut conseiller aux élèves l'emploi d'une variable qui aille constamment en croissant lorsque la figure varie de la manière indiquée par l'énoncé ; pour le problème traité ici, l'angle zOA réalise cette condition.

G. Fontené.