# Enoncés de Problèmes de Mathématiques

## 1. École Normale Supérieure de Sèvres, 1922

**Arithmétique et Algèbre.** — On considère l'équation en $z$

$$z^2 - 2pz + 1 = 0$$

$$p = \sin\varphi + i\cos\varphi, \qquad \varphi \text{ angle donné.}$$

Soient $z'$ et $z''$ les racines.

1° Montrer, sans calculer $z'$ et $z''$, que leurs modules (1) sont inverses, que leurs arguments (1) sont opposés et trouver les valeurs de $\varphi$ pour lesquelles ces racines sont réelles ou sont de la forme $ki$ ($k$ réel).

Calculer le module et l'argument de chacun des nombres $z' - p$, $z'' - p$.

2° $\cos\varphi$ étant négatif, montrer que les nombres $z' + i$, $z'' + i$ ont le même module, qu'on calculera, et que les nombres $z' - i$, $z'' - i$ ont le même argument qu'on calculera également.

Examiner le cas où $\cos\varphi$ est positif.

3° Représenter géométriquement les divers nombres complexes rencontrés ; on sera ainsi conduit à figurer simplement le mode de déplacement des points représentatifs des nombres $z'$ et $z''$ quand $\varphi$ varie.

(1) Quand un nombre complexe est mis sous la forme

$$r(\cos\alpha + i\sin\alpha), \qquad r > 0$$

$r$ est dit le module et $\alpha$ un argument.

**Géométrie.** — Soit un triangle isocèle ABC ; BC est la base, O est le milieu de cette base. (Les côtés seront indéfiniment prolongés).

Deux points mobiles M et N sont pris respectivement sur les droites BA et CA, du même côté de BC, de manière que BM et CN aient pour moyenne géométrique OB.

1° Montrer que les triangles MON, MBO, OCN sont semblables.

Trouver le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle MON. Trouver aussi le lieu du pied de la perpendiculaire menée de O sur MN ainsi que la courbe à laquelle la droite MN reste tangente. On trace les bissectrices des angles formés par les droites OM et ON ; trouver les lieux des points D et F, où elles coupent la droite MN.

2° On transforme la figure par une inversion du centre O et on nomme l'inverse de chaque point en accentuant la lettre qui le désigne.

Noter les particularités simples que présente le triangle M'ON' relativement à la direction du côté M'N' et à sa longueur, à l'angle M'ON', etc. ; déduire de là les lieux des points D' et F'.

Tirer de cette transformation par inversion le lieu du point de contact de la tangente mobile au cercle MON menée par le point d'intersection des droites MN et BC.

## 2. Baccalauréat 2e Partie-Mathématiques, juillet 1922

**Aix-Marseille :** On donne un axe dirigé $x'Ox$ et une droite $\Delta$ passant par O et faisant avec $Ox$ un angle de 30°. Sur $Ox$ on considère un point fixe A d'abscisse $a$ ($\overline{OA} = a$) et un point mobile C d'abscisse $x$ ($\overline{OC} = x$). La circonférence de centre C et de rayon CA coupe la droite $\Delta$ en deux points D et E. On trace le diamètre de la circonférence précédente perpendiculaire à $\Delta$ ; soient M et M' les extrémités de ce diamètre, F le point où il rencontre $\Delta$.

En supposant que $x$ varie de 0 à $+\infty$, on demande :

1° le lieu des points M et M' ;

2° les variations de la somme DE + 3CF.

Calculer à $\frac{1}{100}$ près la valeur du maximum de cette somme en supposant que $a = \sqrt{3}$.

**Alger :** On donne un cylindre droit à base circulaire (rayon R, hauteur 2R) et dans la base AB un cercle C de rayon $a$ concentrique à cette base.

Un point S pris sur l'axe (à l'extérieur) est le sommet d'un cône qui passe par C et coupe la surface cylindrique suivant un cercle MN compris entre les bases. Soit $\Sigma$ le solide formé par l'ensemble du cône SMN et du cylindre DEMN.

1° Déterminer $a$ de façon que le volume de $\Sigma$ soit indépendant de la position de S. (Dans la suite, $a$ conserve la valeur ainsi définie).

2° Etudier la variation de la surface totale de $\Sigma$. (On prendra pour variable $OS = x$.)

3° On considère le solide $\Sigma$ dont la surface totale est minima et on le suppose homogène. Trouver son centre de gravité. Trouver les positions d'équilibre quand ce solide s'appuie sur un plan horizontal par sa surface convexe.

*(La figure, représentant une section par un plan méridien, montre que* DE *est la seconde base du cylindre et* O *le centre de* C*).*

**Besançon :** En un lieu terrestre, de latitude nord $\lambda$, on mesure l'ombre portée BC, par le style vertical AB, à midi vrai, instant du passage du soleil au méridien. Cela posé, on demande :

1° l'expression de BC, en fonction de AB : *a)* aux équinoxes ; *b)* aux solstices ;

2° quelle doit être la déclinaison du soleil pour que l'ombre BC soit : *a)* égale à AB ; *b)* le double de AB ;

3° combien de fois et en quelles saisons ces phénomènes peuvent-ils se produire ? Appliquer à Besançon, dont la latitude, $\lambda = 47°15'$, avec un style AB, de 5 mètres ;

4° si l'on déplace le style AB, le long d'un méridien, peut-on rencontrer des zones terrestres où l'ombre de AB soit nulle ? ou infiniment grande ? Discuter. On supposera le soleil réduit à un point lumineux et on prendra, pour l'inclinaison de l'Ecliptique sur l'Equateur, la valeur $23°27'$.

*(La figure montre que* BC *est l'ombre portée sur l'horizon du point* B*).*

**Bordeaux :** 1° Les projections horizontale et verticale d'une droite qui rencontre la ligne de terre en un point A font avec cette droite les angles $x$ et $y$ ; d'un point B, situé sur la ligne de terre à la distance $a$ du point A, on abaisse une perpendiculaire sur la droite : calculer, en fonction de $x$ et de $y$, la longueur $d$ de cette perpendiculaire.

2° On suppose que $d$ est une longueur donnée ; montrer que les angles $x$ et $y$ ne peuvent dépasser certaines limites.

3° On donne, en même temps que $d$, la somme $x + y$ ; montrer comment on peut calculer $x$ et $y$ ; discuter dans le cas où $x + y = \frac{\pi}{4}$.

**Caen :** Etudier la variation de la fonction

$$y = \frac{3 - x}{x(1 - 3x)}$$

(On ne construira pas la courbe représentative de la variation.)

Cette fonction présente, comme on le constatera, un maximum $\alpha$ et un minimum $\beta$ ; les valeurs $\alpha$, $\beta$, positives toutes deux, étant connues par l'étude précédente, construire à l'aide de la règle et du compas, sans faire intervenir aucun calcul d'approximation, les angles aigus $\varphi$, $\psi$, respectivement définis par les formules

$$\operatorname{tg}^4 \varphi = \alpha \qquad \operatorname{tg}^4 \psi = \beta,$$

et indiquer la relation simple qui existe entre ces deux angles.

**Clermont :** On se propose de mesurer la distance d'un point O à un point P qui n'est pas visible de O. A cet effet, on choisit deux points A et B, en ligne droite avec O et d'où l'on voit O et P. On mesure les distances $OA = a$, $OB = b$, et les angles $OAP = A$ et $OBP = B$.

1° Vérifier que la distance $x$ cherchée est donnée par la formule

$$x^2 = \frac{a^2 \sin^2 A + b^2 \sin^2 B - 2ab \sin A \sin B \cos(A + B)}{\sin^2(A + B)}.$$

2° On choisit les points A et B de manière que la somme $A + B$ soit très voisine d'un angle droit, et l'on pose $A + B = \frac{\pi}{2} + y$, $y$ étant évalué en radians. Montrer que, si l'on pose $\frac{b \sin B}{a \sin A} = \operatorname{tg} \varphi$, on peut prendre la formule approchée

$$x = \frac{a \sin A}{\cos \varphi} + ky,$$

$k$ désignant un certain coefficient que l'on calculera.

3° Calculer $x$, à un décimètre près, avec les données numériques suivantes : $a = 250^{m}$ ; $b = 386^{m},4$ ; $A = 61^{\text{grades}},8$ ; $B = 37^{\text{grades}},4$.

*(La figure montre le point O entre les deux points A et B).*

**Dijon :** 1° On donne dans l'espace une droite fixe $\Delta$ et deux points fixes A et A' ; M étant un point variable de $\Delta$, on envisage les deux cercles C et C' passant par M et tangents à la droite AA' respectivement aux points A et A'. Ces deux cercles se coupent en un second point P dont on demande le lieu.

2° On suppose ensuite que AA' rencontre $\Delta$ en un point B et lui soit perpendiculaire. Soient N le second point de rencontre de C avec $\Delta$ et Q l'intersection des tangentes à C en M et N ; on désigne par $y$ le rayon de C, par $x$ la distance de Q au centre de C, par $a$ la distance AB. Trouver la relation qui relie $x$, $y$ et $a$ et en déduire le lieu du point Q.

**Grenoble :** Sur le segment de droite AB de longueur $4a$, on marque entre A et B le point C tel que AC $= a$ et on trace un cercle de rayon variable $x$, tangent en C à AB ; par les points A et B on mène les tangentes à ce cercle autres que AB : soit M leur point de rencontre.

1° Etablir les formules donnant en fonction de $x$ les tangentes des moitiés des angles du triangle AMB et les côtés MA, MB de ce triangle. Les mêmes formules conviennent-elles quel que soit $x$ ? Pour quelles valeurs de $x$ le triangle est-il rectangle ? Tracer la courbe représentant la variation de $\operatorname{tg} \frac{AMB}{2}$.

2° Lieu du point M lorsque $x$ varie. Sommets, directrices et asymptotes de ce lieu (L). Angle des asymptotes. La tangente en M à (L) coupe AB en E ; on désigne par H la projection de M sur AB et par O le milieu de AB ; calculer OE et OH, en déduire que E et H sont conjugués harmoniques par rapport aux sommets de (L). Vérifier que $MA + MB = 4OH$.

3° Que devient le lieu (L) si, dans le problème, on remplace le point C par le point D, pris entre A et B tel que AD $= 3a$ ?

Déterminer le centre I' et le rayon $x'$ du cercle tangent en D à AB qui donnent le même point M que le cercle de centre I, de rayon $x$, tangent en C à AB. Enveloppe de la droite II' lorsque $x$ varie.

**Lille :** Etant donnés une spère de rayon R et un plan sécant situé à la distance $h$ du centre, qui partage la sphère en deux secteurs, étudier la variation du rapport des aires totales de ces deux secteurs quand le plan se déplace en restant parallèle à un plan fixe.

(N. B. — L'aire totale d'un secteur s'obtient en ajoutant les aires de la zone sphérique et des cercles qui limitent le secteur.)

**Lyon :** Soient (F) et (F') deux circonférences de centres respectifs F et F' et de rayons respectifs R et R' (R $>$ R'), tangentes intérieurement au point I ; d'un point quelconque P de la tangente commune IH, on mène les tangentes PT et PT' autres que la tangente PI aux deux circonférences (F) et (F') ; T et T' désignant les points de contact de ces tangentes on trace les droites FT et F'T' qui se coupent au point M.

1° Démontrer que PT $=$ PT', MT $=$ MT'.

2° Démontrer que le lieu du point M est une ellipse de foyers F et F' dont la tangente en M est la droite MP. Calculer les longueurs des axes de cette ellipse en fonction de R et R'.

3° Démontrer que la droite TT' passe par l'un des centres d'homothétie des deux circonférences (F) et (F').

4° Posant angle $\widehat{FMF'} = 2\varphi$, IP $= d$ et désignant par $r$ le rayon du cercle inscrit au triangle FMF' et par $r'$ le rayon du cercle ex-inscrit dans l'angle FMF' au même triangle FMF' calculer $\operatorname{tg}\varphi$, $r$, $r'$ et le rapport $\frac{r'}{r}$, en fonction de R, R' et $d$.

*(Voir, dans le prochain* Bulletin, *un fac-similé de la figure (...!!!...) — superflue, heureusement — qui accompagnait le texte remis aux candidats).*

**Montpellier :** On considère un vase ABCD ayant la forme d'un cylindre de révolution. Le diamètre du cercle de base est désigné par $a$, la hauteur par $b$.

1° Le vase est invariablement fixé à une table horizontale fixe. On place une barre mince, rectiligne BE de la façon qu'indique la figure : l'extrémité B s'appuie sur la paroi du cylindre et sur le fond du vase, la barre est dans un plan vertical passant par l'axe du cylindre.

Quelle est la plus grande longueur que l'on puisse donner à la barre si l'on veut que la position précédente soit une position d'équilibre ?

2° Le vase repose sur la table sans lui être fixé ; on donne les poids P et P' de la barre et du vase. Trouver encore la plus grande longueur de la barre pour laquelle le système est en équilibre.

3° Même question, en supposant cette fois-ci que le vase est remplacé par un tube cylindrique de même dimension, mais dépourvu de fond. En B la barre s'appuie sur la table et sur le tube.

On supposera tous les corps homogènes et polis. Le cylindre est supposé d'épaisseur négligeable, son bord supérieur AD est arrondi en forme de tore ; la réaction du cylindre sur la barre, en D, est par suite normale à la barre.

Donner les réponses dans le cas particulier :

$$a = b = 10^{\text{cm}}\,; \quad P' = 3^{\text{kg}}\,; \quad P = 1^{\text{kg}}.$$

*(La figure représente le rectangle* ABCD *section du cylindre par un plan méridien ;* BC *est le diamètre de base, placé sur la table horizontale. La tige* BE, *disposée suivant la diagonale* BD *du rectangle et figurée plus grande que cette diagonale, repose en* D *sur le bord supérieur du cylindre).*

**Nancy :** Un mobile se déplace sur une droite horizontale $Ox$ et doit parcourir une longueur totale $OA = l$ en deux phases successives :

1$^{\text{re}}$ phase : Il part de O sans vitesse initiale et prend un mouvement uniformément accéléré, d'accélération positive donnée $\gamma_1$.

2$^{\text{e}}$ phase : Au bout d'un certain temps qui n'est pas donné à l'avance, le mobile prend un mouvement uniformément retardé, d'accélération $-\gamma_2$ ($\gamma_2$ étant un nombre donné positif) ; la vitesse qu'il possède au début de la deuxième phase est égale à celle qu'il a acquise à la fin de la première.

Sachant que le mobile doit parvenir au point A sans vitesse à la fin de la deuxième phase, on demande de déterminer les temps respectivement employés par le mobile pendant les deux phases de son mouvement, et les espaces parcourus correspondants.

Représenter graphiquement la variation de la vitesse et celle de l'abscisse du mobile en fonction du temps.

En supposant que le mobile ait une masse $m$, quelles forces lui sont appliquées pendant les deux phases et quels sont les travaux de ces forces ?

Application numérique : $l = 800^{cm}$ ; $\gamma_1 = 0{,}8$ ; $\gamma_2 = 0{,}2$ ; $m = 1000^g$

**Paris :** On considère deux demi-circonférences de même rayon (OA = O'A = R) tangentes extérieurement en A, et une parallèle BC à la ligne des centres.

1° Evaluer l'aire du triangle ABC en fonction de R et de l'angle OAB = $x$.

2° Etudiez les variations de cette aire, le point B décrivant la demi-circonférence O. Construire la courbe représentative des variations en supposant $R = 1^{cm}$.

3° Evaluer le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC en fonction de R et de $x$. Calculer ce rayon à 0,01 près dans le cas où l'aire du triangle est maximum.

*(La figure montre les trois points* O', A *et* O *en ligne droite, les deux demi-circonférences d'un même côté de cette droite, et les points* C *et* B *situés respectivement sur les demi-circonférences et de telle sorte que l'angle* BAC *soit aigu).*

**Poitiers :** $n$ étant un nombre entier supérieur à 2, démontrer que le produit $n^2(n^2 - 1)(n^4 - 16)$ est toujours divisible par 360.

**Rennes :** On donne une demi-circonférence de diamètre AOB (OA = OB = R).

Soit OC le rayon perpendiculaire au diamètre AB, AD la tangente en A.

Par un point M de la demi-circonférence, on mène la parallèle à AB, qui rencontre OC en P.

1° Les droites OM, AP se rencontrent en un point I ; on demande de calculer les distances du point I aux deux droites AB, AD en fonction de l'angle BOM = $x$ et du rayon R.

Quel est le lieu du point I lorsque M décrit la demi-circonférence ?

2° Calculer, en fonction de $x$ et de R, l'aire S du *trapèze convexe* qui a pour bases OA et PM. Etudier la variation de S en fonction de $x$ et tracer la courbe représentative de cette variation lorsque $x$ croît de 0 à $\pi$.

**Strasbourg :** On donne un triangle ABC et un point D sur le côté BC (entre B et C). Par ce point D, on mène deux droites DE et DF, également inclinées, mais en sens contraires, sur BC. La première coupe le côté AB (ou son prolongement) en E, la deuxième coupe le côté AC (ou son prolongement) en F. Etudier la variation de l'aire du triangle DEF.

On considérera comme données les longueurs BD = $b$ et CD = $c$, et les angles B et C du triangle, *tous deux aigus.*

**Toulouse :** Soit un trapèze, dont la grande base AB = $a$ est invariable en grandeur et en position.

Le côté oblique $AD = m$ et la petite base $DC = b$ ne sont invariables qu'en grandeur.

On demande les lieux géométriques :

1° du point d'intersection O des diagonales du trapèze ;

2° du centre de gravité de l'aire du triangle OAB.

### 3. Baccalauréat 1re Partie C et D, juillet 1922

**Aix-Marseille :** On donne une sphère de diamètre $AB = 2R$. On la coupe par un plan P perpendiculaire sur AB en un point H tel que $AH = x$. Ce plan détermine dans la sphère un cercle (C).

1° Calculer, en fonction de R et de $x$, le volume du segment sphérique qui a pour hauteur AH, ainsi que le volume du cône qui a pour sommet B et pour base le cercle (C) ;

2° Etudier, en fonction de $x$, les variations de ces deux volumes et les représenter par des courbes que l'on dessinera sur la même figure ;

3° Déterminer le plan P de façon que les deux volumes soient égaux. Comparer les résultats de la discussion avec ceux que donne l'examen direct des deux courbes.

**Alger :** On donne une demi-sphère de diamètre $SH = 2R$ et un cône droit ayant pour sommet S, pour hauteur SH et pour demi-angle au sommet $\widehat{PSH} = \alpha$.

Un plan AOBC perpendiculaire (*en* O) à SH détermine dans la demi-sphère un demi-segment sphérique SOCM de volume $V_1$ et dans le cône SPQ un cône droit SAB de volume $V_2$.

1° Exprimer, en fonction de $SO = x$, la différence $V_1 - V_2$ et étudier la variation de cette fonction quand le plan sécant se déplace parallèlement à lui-même.

2° Comment doit-on choisir $\alpha$ pour que la fonction puisse prendre des valeurs négatives ? Quel est dans ce cas le maximum de sa valeur absolue ?

**Besançon, Série C :** 1° Etudier la variation de la fonction

$$y = x^3 + \frac{1}{x}, \text{ où } x \text{ est positif.}$$

2° Construire la courbe figurative.

3° Soient : M un point de cette courbe ; MT la tangente en M, rencontrant en T l'axe $Ox$, et MA la perpendiculaire abaissée de M sur l'axe $Ox$, qu'elle rencontre en A.

Déterminer l'abscisse du point M, c'est-à-dire la longueur OA, de façon que $MA = \frac{3}{2} AT$.

**Besançon, Série D :** Sur une droite indéfinie, on a choisi une origine O et un sens positif. Deux mobiles A et B devant se déplacer sur cette droite, partent en même temps du point O. Les espaces $x_1$, $x_2$

qu'ils parcourent sur cette droite sont, respectivement au temps $t$,

$$x_1 = t^4 - t^2,\ x_2 = t^3 - t^2.$$

1° Exprimer la vitesse et l'accélération de chacun de ces mobiles.

2° Calculer les positions des mobiles quand B a une vitesse nulle, puis quand A a une vitesse nulle.

3° Déterminer à quelle époque, antérieure au temps $t = 1$, les mobiles sont le plus éloignés l'un de l'autre. Quelle est alors leur distance ?

4° Résumer par ordre chronologique les principales particularités du mouvement.

**Bordeaux :** Dans un angle ABC, l'angle en B est double de l'angle en A ; le côté AB et la hauteur CH sont liés par la relation $\frac{AB}{CH} = \frac{11}{4}$. Calculer les tangentes trigonométriques des angles A, B et C.

**Caen :** Calculer la dérivée de la fonction

$$y = 9x^4 - 16x^3 + 8x^2 - \frac{16}{27}.$$

Etudier le signe de cette dérivée, et en déduire la variation de la fonction. Construire la courbe représentative de la variation.

**Clermont :** Résoudre et discuter l'équation

$$\sin 3x - \sin 2x = m \sin x$$

où $m$ est un paramètre variable.

**Dijon :** On considère dans un plan un contour polygonal OABC formé de trois côtés consécutifs d'un pentagone régulier convexe. Par le point O on mène un axe $x'Ox$ et l'on désigne :

par $\alpha$ l'angle que la direction OC fait avec $Ox$,

par B' et C' les projections orthogonales de B et C sur $x'Ox$.

Déterminer les valeurs de $\alpha$, comprises entre $0$ et $2\pi$, pour lesquelles les longueurs OB' et B'C' sont égales.

**Grenoble :** La circonférence de centre O et de rayon $r$ est le grand cercle d'une sphère S.

Dans le plan du cercle O, on considère une corde QR qui tourne autour du point fixe Q de la circonférence et qui fait, avec le diamètre fixe QP, un angle aigu variable $\alpha$.

La corde QR est la trace sur le plan du cercle O (plan de la figure) d'un plan sécant à la sphère S perpendiculaire au plan du cercle. Ce plan sécant coupe la sphère S suivant un petit cercle dans lequel on inscrit le carré ayant QR pour une de ses diagonales ; on considère alors la pyramide qui a pour base ce carré et pour sommet le point P diamétralement opposé à Q.

1° Calculer le volume V de cette pyramide en fonction de $\sin \alpha$. En posant $x = \sin \alpha$, étudier la variation de V quand $x$ varie. Maximum de V, courbe des variations.

2° Démontrer que les deux faces latérales de la pyramide qui se coupent suivant l'arête PQ sont deux triangles rectangles ayant PQ pour hypoténuse commune.

3° En désignant par $2b$ le rectiligne du dièdre PQ de la pyramide, calculer cos $b$ en fonction de sin $\alpha$.

**Lille :** Sur une droite $x'Ox$, orientée de gauche à droite, un point M se déplace d'un mouvement uniformément varié : son accélération est de 2 m. par sec² et est dirigée vers $Ox'$ ; à l'instant initial il se trouve passer au point O avec une vitesse dirigée vers $Ox$ de 5 m. par sec. Un deuxième mobile N se déplace sur la même droite d'un mouvement uniforme dans le sens $Ox$ avec une vitesse de 2 m. par sec. ; à l'instant initial il passe au point A de $Ox$, à 2 m. à droite de O.

1° Trouver les instants et les positions des rencontres des 2 points.

2° Etudier la variation, avec le temps, de la distance NM, et indiquer, en particulier, à quelle époque le point M se trouve le plus loin possible à droite de N. Quelle est alors leur distance et la vitesse de M.

**Lyon :** I. Soit un triangle ABC dans lequel la différence B — C des angles B et C est égale à un angle droit ; montrer que, si R désigne le rayon du cercle circonscrit à ce triangle, on a

$$c = 2R \sin C, \quad b = 2R \cos C, \quad a = 2R \cos 2C ;$$

en déduire que les côtés $c$, $b$, $a$ du triangle vérifient les relations

$$b^2 + c^2 = 4R^2 ; \quad b^2 - c^2 = 2Ra.$$

II. Calculer les côtés $c$, $b$, $a$ d'un triangle ABC connaissant le rayon R du cercle circonscrit, la somme $l$ des côtés $a$ et $c$ et sachant que la différence B — C des angles B et C est égale à un angle droit. Discuter.

**Montpellier :** On donne un angle XOY de 45 degrés et un point A sur OX, à la distance $OA = a$ du point O. Un angle BAC de 45 degrés pivote autour du point A de façon que ses côtés rencontrent constamment OY aux points B et C, B étant le point le plus rapproché de O.

1° Exprimer, en fonction de $a$ et de $\widehat{OAB} = x$, l'aire $S_1$ du triangle ABC.

2° Exprimer, en fonction des mêmes quantités, l'aire $S_2$ du triangle AOC.

3° Etudier, lorsque $x$ varie, la variation du rapport $\frac{S_2}{S_1}$.

**Nancy :** On donne un cône de révolution SAB dont le rayon de base OA et la hauteur SO sont égaux à l'unité de longueur. Par un point H de la hauteur tel que $SH = x$ on trace un plan parallèle à la base et l'on considère le cône OMN ayant pour sommet le point O et pour base la section MN du cône donné par le plan précédent.

1° Evaluer, en fonction de $x$, la surface de la base, la surface latérale et le volume du cône OMN.

2° Déterminer $x$ de façon que le carré du rapport de la surface latérale à la surface de la base du cône OMN ait une valeur donnée $m$; discuter.

3° Etudier la variation du volume du cône OMN.

**Paris, Série C :** On donne une demi-circonférence de diamètre $AB = 2R$ et une demi-corde CD perpendiculaire à AB ; on pose $AD = x$ et on fait tourner la figure autour de AB.

1° Calculer, en fonction de $x$ et de R, les aires engendrées par les arcs AC et CB et par la demi-corde CD, puis déterminer $x$ de façon que le rapport de la somme des aires engendrées par AC et CD à la somme des aires engendrées par CB et CD soit égal à un nombre positif donné $k$ :

$$\frac{\text{aire AC} + \text{aire CD}}{\text{aire CB} + \text{aire CD}} = k.$$

Montrer que le problème admet toujours une solution et une seule.

$$\text{Application : } k = \frac{7}{15}$$

2° Etudier les variations du volume du cône engendré par le triangle CDB tournant autour de AB et construire la courbe représentative.

**Paris, Série C :** Un triangle isocèle AOB, dont les côtés égaux OA et OB ont pour longueur $a$ et dont l'angle au sommet AOB a pour mesure $2x$, tourne autour d'un axe $x'Ox$ passant par O, situé dans son plan, et ne traversant pas sa surface ; le côté OA fait avec $Ox$ un angle égal à $x$.

1° Calculer, en fonction de $a$ et des lignes trigonométriques de l'angle $x$, la surface totale engendrée par le périmètre du triangle.

2° Déterminer $x$ de façon que cette surface soit égale à $m$ fois celle du cercle de rayon OH, OH étant la hauteur du triangle issue de O et $m$ un nombre positif donné. Condition de possibilité.

3° Calculer l'angle $x$ dans le cas où

$$m = 4 + 2\sqrt{2}$$

**Paris, Série D :** On donne un tétraèdre régulier d'arête $a$. On mène par le sommet S un plan parallèle à l'arête BC, qui coupe le tétraèdre suivant le triangle SMN ; on pose $AM = x$.

1° Exprimer en fonction de $a$ et de $x$ la somme $y$ des carrés des arêtes du tétraèdre SAMN.

2° Etudier la variation de cette somme quand $x$ varie, la représenter par une courbe en posant $a = 1$ ; trouver les coordonnées du point de cette courbe pour lequel la tangente fait 45° avec $Ox$.

3° Volume du tétraèdre SAMN en fonction de $a$ quand la somme précédente est minimum.

4° Touver $x$ de façon que le périmètre du triangle SMN soit égal à $\frac{11a}{5}$ ; montrer que ce problème a toujours une solution et une seule.

*(La figure confirme que les sommets du tétraèdre régulier sont* S, A, B *et* C).

**Poitiers** : On donne un tétraèdre SABC ; on prend sur SA un point A', sur SB un point B' et sur SC un point C'. Soient V et V' les volumes des deux tétraèdres SABC et SA'B'C'.

1° Démontrer que

$$\frac{V}{V'} = \frac{SA \times SB \times SC}{SA' \times SB' \times SC'}.$$

2° On suppose toutes les faces du trièdre SABC de sommet S égales à $\alpha$ et, de plus, $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$ ; calculer le volume du tétraèdre SABC. (On calculera la base BSC et la hauteur AH issue du sommet A.)

**Rennes** : On considère un carré ABCD dont le côté a une longueur donnée $l$. On mène la diagonale AC et l'on prend sur cette diagonale un point P que l'on projette en M et N sur les côtés AD et DC. On désigne par $\theta$ l'angle ABP.

1° Calculer, en fonction de $l$ et de $\theta$, les longueurs AP, PC, MP, MN, la tangente de l'angle MNP et la surface du rectangle MPND.

2° Démontrer que le périmètre de ce rectangle est indépendant de $\theta$ et que la droite BP est perpendiculaire à la diagonale MN du rectangle.

**Strasbourg** : On donne une pyramide régulière SABC

$$(SA = SB = SC)$$

dont la base est un triangle équilatéral ABC de côté $a$ et dont la hauteur SH est aussi égale à $a$.

1° M étant un point du segment SH, $x$ la distance MH, $d$ et $d'$ les distances de M aux arêtes SA et AB, on demande de calculer la différence $d^2 - d'^2$ en fonction de $x$ et d'étudier les variations de cette fonction lorsque $x$ varie.

2° Déduire du résultat précédent qu'il existe une sphère $\Sigma$ tangente aux 6 arêtes de la pyramide SABC. Donner la valeur du rayon de cette sphère et calculer la surface totale du solide constitué par la portion de $\Sigma$ qui est située du même côté que S par rapport au plan ABC.

**Toulouse :** Dans le plan horizontal de projection, on donne un rectangle ABCD de côtés $AB = a$, $BC = b$. Dans le plan horizontal de cote $h$, on donne un carré A'B'C'D' de côté $c$, dont le centre est sur la verticale du centre du rectangle et dont les côtés sont parallèles à ceux du rectangle. On suppose $a > b > c$.

On considère le solide S limité par les deux bases ABCD et A'B'C'D', et par les quatre faces planes telles que AA'B'B, obtenues en joignant AA', BB', CC', DD', comme l'indique la figure.

On demande :

1° De calculer le volume V du solide S;

2° De calculer l'aire de la section de ce solide par un plan de cote $x$ comprise entre o et $h$ : soit $\varphi(x)$ cette aire :

3° De vérifier que

$$6V = h\left[ab + c^2 + 4\varphi\left(\frac{h}{2}\right)\right].$$

*(La figure montre que* AB *et* A'B', BC *et* B'C', .... *sont parallèles et de même sens.)*

*Le Gérant :* A. COUESLANT.

CAHORS, IMPRIMERIE COUESLANT *(personnel intéressé).* — 27.016