

Sur quelques énoncés de problèmes tirés de propositions classiques

Voici une suite de propositions classiques de Géométrie desquelles il est possible de tirer de nombreux énoncés de problèmes pour les élèves.

Nous partirons du théorème suivant : *Etant donné deux cercles (C), (C'), de centres I, I', de rayons r, r', et dont les centres d'homothétie sont A et A', le cercle de diamètre AA' appartient au faisceau déterminé par (C) et (C').*

Plusieurs démonstrations géométriques s'appliquant à tous les cas de figure, ont été données de ce théorème. Indiquons la suivante qui ramène la proposition à une autre plus générale. Le cercle de diamètre AA' est le lieu des points M tels que $\frac{MI}{MI'} = \frac{r}{r'}$, ou encore le lieu des

(1) Voir le *Bulletin* n° 27, page 14 et suivantes.

points M tels que $\frac{MI^2 - r^2}{MI^2 - r'^2} = \frac{r^2}{r'^2}$. Par une application répétée de

l'identité de LEIBNITZ, on montre que le lieu des points dont les puissances par rapport à deux cercles sont liées par une relation linéaire et homogène est un cercle du faisceau.

Relativement au théorème énoncé, on peut encore faire les remarques suivantes :

1° En transformant par inversion, avec un choix convenable du centre et du module, on déduit d'une part que les polaires d'un centre d'homothétie par rapport aux deux cercles sont équidistantes de leur axe radical, d'autre part que les pôles de l'axe radical par rapport aux deux cercles forment une division harmonique avec les centres d'homothétie.

2° Substituons aux deux cercles (C) et (C') deux cercles concentriques de rayons kr et kr' . Le cercle de diamètre AA' appartient au faisceau déterminé par les nouveaux cercles. L'axe radical du nouveau faisceau se déduit de l'ancien axe radical par une homothétie de centre G milieu de II' et de rapport k^2 . En particulier, si les nouveaux cercles sont les cercles orthoptiques de (C) et (C'), le rapport d'homothétie est 2.

Arrivons maintenant au théorème, principal objet de cette note, théorème qui n'est du reste qu'un cas particulier de celui de FAURE.

Etant donné un triangle ABC, d'orthocentre H, si M est un point quelconque de l'un des côtés, par exemple du côté BC, le cercle de diamètre AM et les 4 cercles orthoptiques des 4 cercles tangents aux côtés du triangle ont H pour centre radical commun.

La première partie de ce théorème constitue un exercice classique. Si O est le centre du cercle circonscrit au triangle, R son rayon, la puissance de H par rapport au cercle de diamètre AM est $\frac{MO^2 - R^2}{2}$.

Appelons (C) et (C') les cercles de centres I, I', de rayons r, r' , l'un inscrit au triangle, l'autre exinscrit dans l'angle A. Leurs centres d'homothétie sont A et A'. Si G est le milieu de II', l'axe radical de (C) et (C') est la droite de SIMSON du point G par rapport au triangle ABC. Par suite, l'axe radical commun au cercle de diamètre AA' et aux cercles orthoptiques de (C) et (C') passe par l'orthocentre H, et on a :

$$HI^2 - 2r^2 = HI'^2 - 2r'^2 = \frac{HO^2 - R^2}{2}$$

Applications : I. Le théorème de FAURE permet, en utilisant en outre la relation d'EULER, — c'est-à-dire la relation que vérifient les rayons de deux cercles, l'un inscrit ou exinscrit, l'autre circonscrit à un triangle et la distance de leurs centres, — de déduire le théorème de FEUERBACH : *le cercle des neuf points d'un triangle est tangent au cercle inscrit et aux trois cercles exinscrits.*

II. Une deuxième application est relative au quadrilatère complet. Considérons un quadrilatère dont les 4 côtés sont tangents à un cercle (C) de centre I. Soit H l'orthocentre de l'un des 4 triangles que l'on peut former en prenant trois des côtés du quadrilatère. Le point H a même puissance par rapport aux trois cercles (Γ) décrits sur les trois diagonales comme diamètres et au cercle orthoptique de (C). D'une part, les 4 points tels que H sont sur une droite (D), d'autre part les milieux des trois diagonales et le centre I de (C) sont sur une droite (D') perpendiculaire à (D).

Il est à peine utile de faire remarquer que si le quadrilatère n'est pas circonscriptible, il n'en subsiste pas moins que les 4 points H sont sur une droite (D) directrice de la parabole tangente aux quatre côtés du quadrilatère et les 3 centres des cercles (Γ) sur une droite (D') perpendiculaire.

Il est en outre aisé de démontrer les propriétés suivantes : 1° *Le cercle circonscrit au triangle formé par les trois diagonales du quadrilatère coupe orthogonalement les cercles (Γ) et a par suite son centre sur (D) ;* 2° *Si le quadrilatère supposé convexe est inscriptible, le point de rencontre des deux diagonales ordinaires est sur la droite (D).*

III. — Le problème suivant constitue une troisième application : 1° *Si un cône de sommet S a pour base un cercle (C) de centre I et de rayon r, et s'il est capable d'un trièdre trirectangle circonscrit, il est capable d'une infinité de tels trièdres.*

2° *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un cône à base circulaire soit capable d'un trièdre trirectangle circonscrit est $SI = r\sqrt{2}$.*

3° *Pour un tel cône, si H est la projection de S sur le plan de (C), la trace sur ce plan du cône supplémentaire est une conique dont l'un des foyers est H, la directrice relative à ce foyer étant la polaire de H par rapport au cercle orthoptique de (C).*

Tous les résultats précédents sont acquis élémentairement. En utilisant certains d'entre eux, le théorème corrélatif du théorème de DESARGUES et la propriété que si dans deux faisceaux en involution il y a deux couples de rayons conjugués rectangulaires, tous les rayons conjugués sont deux à deux rectangulaires, on déduit d'une part le lieu des centres des coniques inscrites dans un quadrilatère, d'autre part le théorème de FAURE avec l'un et l'autre des deux énoncés connus : 1° *Tout cercle (C) conjugué à un triangle (T) circonscrit à une conique (C) coupe orthogonalement le cercle orthoptique de (C) ;* 2° *Tout cercle (C) circonscrit à un triangle (T) conjugué à une conique (C) coupe orthogonalement le cercle orthoptique de (C).* Comme conséquences de ce théorème, on déduit notamment les démonstrations classiques relatives au lieu du centre d'une hyperbole équilatère soit circonscrite, soit inscrite, soit conjuguée à un triangle (T).

J. COISSARD,
Professeur au Lycée Pasteur.