Enoncés de Problèmes de Mathématiques

1. Agrégation des Sciences Mathématiques Concours de 1922

Mathématiques Elémentaires. — I. Etant donnés trois points A, B, C, on propose de déterminer un point D, tel que les faces du tétraèdre ABCD aient des aires équivalentes.

On calculera, en fonction des côtés a, b, c, et des angles A, B, C, du triangle ABC, le rayon de la sphère inscrite, celui de la sphère circonscrite, le volume, les cosinus ou les sinus des dièdres ou des demi-dièdres du tétraèdre ABCD (1).

II. Les sommets A et B restant fixes :

Où doit être le point H, orthocentre du triangle ABC, pour que les dièdres du tétraèdre ABCD soient tous aigus ?

Quel est le lieu du point H quand les orthocentres des quatre faces du tétraèdre sont dans un même plan ?

III. Soient deux sphères concentriques, S et s, de rayons R et r. A quelles conditions existe-t-il des tétraèdres T dont les sommets sont sur la sphère S et dont les plans des faces sont tangents à la sphère s ?

Examiner si ces tétraèdres T ont leurs faces équivalentes.

Comment faut-il choisir une droite Δ pour qu'elle soit une arête d'un tétraèdre T ?

IV. Les sphères S et s étant données, que peut-on dire des centres de gravité et des orthocentres des faces de tous les tétraèdres T, qui sont inscrits dans S et circonscrits à s ?

Le plan de la face BCD et le sommet A étant fixés, étudier le déplacement des arêtes CD, BD, BC.

Etudier les sphères Σ autres que s, tangentes aux plans des faces d'un tétraèdre T et, en particulier, la disposition des centres de ces sphères.

Soit A' le centre de celle des sphères ex-inscrites à l'un quelconque des tétraèdres T, qui est placée au delà de la face BCD par rapport au sommet A. Démontrer que la distance de ce point A' au centre ω de l'une des circonférences tangentes aux trois côtés du triangle BCD est dans un rapport constant avec le rayon de cette circonférence.

Mathématiques spéciales. — I. Un cercle (Γ), rapporté à trois axes rectangulaires ox, oy, oz, a pour équations :

$$z = 0, \qquad x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

Deux tangentes fixes Δ Δ', à ce cercle, sont rencontrées en M et M' par une tangente variable T.

Montrer qu'il existe dans l'espace deux points ω, ω', d'où l'on voit constamment le segment MM' sous un angle droit, lorsque T varie.

(1) L'ordre dans lequel les éléments inconnus seront calculés est laissé à la disposition des candidats.

Exprimer les coordonnées des points ω, ω' en fonction des coordonnées (x_0, y_0) du point de rencontre P de Δ et Δ'.

Où doit se trouver P pour que les points ω, ω' soient réels, ou imaginaires, ou confondus ?

Trouver, lorsque Δ et Δ' varient, l'équation de la surface (S_P) lieu des points ω, ω'.

Construire la méridienne de cette surface et établir que (S_P) est le lieu des projections de l'origine O sur les plans tangents à un certain hyperboloïde.

Existe-t-il des points ω auxquels correspond une infinité de couples Δ, Δ' ?

II. On considère une ellipse (E) ayant pour équations :

$$z = 0, \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad (a > b).$$

Deux tangentes fixes Δ, Δ', à cette ellipse, sont rencontrées en M et M' par une tangente variable T.

Montrer qu'il existe deux points ω, ω' de l'espace, d'où l'on voit le segment MM' sous un angle droit, lorsque T varie.

Exprimer les coordonnées $(x, y, \pm z)$ de ω, ω' en fonction des coordonnées (x_0, y_0) du point de rencontre P de Δ et Δ'.

D'après la nature de la question, prévoir géométriquement où doit se trouver le point P pour que ω et ω' soient confondus, et en déduire une décomposition en facteurs de l'expression de z^2. Discuter la nature des points ω, ω' suivant la position de P.

Former l'équation de la surface (S_E) lieu de ω, ω', lorsque Δ et Δ' varient. Les sections de (S_E) par les plans xoz et yoz comprennent chacune un cercle et un ovale de Cassini que l'on construira. On étudiera aussi la section par xoy.

Quels sont les couples Δ, Δ' auxquels correspond une infinité de points ω, ω' ?

Quels sont les points ω auxquels correspond une infinité de couples Δ, Δ' ?

III. La droite $\omega\omega'$ rencontre en un point I le plan xoy. Montrer qu'à un point I (α, β) donné correspondent trois points P que l'on désignera par P_1, P_2, P_3. Etablir que ces points sont réels en même temps que le point I et qu'ils sont situés sur l'hyberbole d'Apollonius relative à ce point. $\left[\text{On pourra prendre comme inconnue auxiliaire : } a^2 \cdot \frac{\alpha - x_0}{x_0}\cdot\right]$

Former en fonction de (α, β) l'équation du cercle (K) circonscrit au triangle $P_1P_2P_3$.

Vérifier que (K) coupe le cercle orthoptique de (E) en deux points symétriques par rapport à O, qu'il passe par le symétrique de I par rapport à O, et enfin qu'il passe par le symétrique de I par rapport au centre de l'hyperbole d'Apollonius. Déduire de là une construction du cercle (K) et des points P_1, P_2, P_3, et que I étant réel, les points correspondants P_1, P_2, P_3 sont réels.

IV. Soient Δ, Δ' deux génératrices fixes, de même système, de l'hyperboloïde à une nappe (H) ayant pour équation :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

Une génératrice G, du second système, les rencontre en M et M'. Montrer qu'il existe deux points ω, ω' d'où l'on voit le segment MM' sous un angle droit lorsque G varie.

Soit θ le point de rencontre de Δ et de la génératrice parallèle à Δ'. Trouver la relation qui existe entre $O\omega$ et $O\theta$.

Former l'équation de la surface (S_H) lieu des points ω, ω' lorsque Δ et Δ' varient.

Cette surface est indépendante du système de génératrices considéré.

Il n'existe pas de couple Δ, Δ' auquel correspond une infinité de points ω.

V. Deux génératrices fixes Δ_1, Δ'_1, de même système, du paraboloïde hyperbolique ayant pour équation :

$$\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}-2x=0,$$

sont rencontrées en M et M' par une génératrice variable G, de l'autre système.

Il n'existe pas en général de point ω d'où l'on voit le segment MM' sous un angle droit lorsque G varie.

Si Δ_1, Δ'_1 sont rectangulaires, il existe une infinité de points ω situés sur un cercle (Γ_1), dont le plan passe par une droite fixe D_1, lorsque le couple Δ_1, Δ'_1 varie.

Au deuxième système de génératrices correspondent, de même, des cercles (Γ_2) dont les plans passent par une droite D_2. Les droites D_1, D_2 se rencontrent en un point I. Former l'équation de la surface (Σ) lieu des cercles (Γ_1) et (Γ_2), et démontrer que (Σ) est sa propre transformée dans une certaine inversion ayant I pour pôle.

Trouver tous les cercles tracés sur (Σ), et les pôles des inversions qui n'altèrent pas cette surface.

Nota. — Il sera commode de définir les tangentes à (Γ) ou (E) en fonction rationnelle d'un paramètre, et de définir un point du plan au moyen des paramètres des deux tangentes qui passent par ce point.

Calcul différentiel et intégral. — 1° Déterminer la courbe la plus générale C telle qu'en la supposant rigide et animée d'un mouvement convenable, elle puisse être, à un instant donné, normale aux trajectoires de tous ses points. On examinera d'abord les deux cas simples où, à cet instant, le mouvement hélicoïdal tangent se réduit soit à une translation, soit à une rotation autour d'un axe.

2° Dans le cas général, on prendra l'axe du mouvement hélicoïdal tangent, à l'instant considéré, comme axe oz mobile, lié à la courbe C. En appelant $2\pi h$ le pas des hélices qui seraient décrites dans ce mouvement tangent, et ρ, φ, z les coordonnées cylindriques d'un point M de C, par rapport aux axes mobiles ox, oy, oz, liés à C, montrer que si l'on se donne h, la projection de C sur le plan xoy et un point de C, la courbe C est déterminée.

3° Définir géométriquement la courbe C par une relation simple entre la cote z d'un point M de C et l'aire A balayée par la projection de oM sur xoy. Cette définition autorise à nommer la courbe C une quasi-hélice.

4° Montrer que le rayon de torsion T de C en M s'exprime simplement en fonction de la distance ρ de M à oz (On appellera σ la longueur d'un arc de C, d'origine fixe et terminé en M.)

5° Montrer que pour la quasi-hélice C la plus générale, le rayon de courbure R de C en M peut s'exprimer en fonction de h, de T et des dérivées de T par rapport à σ.

6° Déterminer la forme de celles des courbes C qui sont à torsion constante.

7° Déterminer un mouvement continu d'une quasi-hélice C, où C reste *constamment* normale aux trajectoires Γ de tous ses points.

8° Montrer que ces trajectoires Γ sont des courbes simples et que le rayon de torsion T' de Γ en un point M est lié de façon simple au rayon de torsion T, en M, de la courbe C qui passe par ce point.

9° Soit S la surface engendrée par C dans ce mouvement continu. On rapportera S à des axes fixes o_1 (x_1 y_1 z_1) et on appellera ρ_1, $\varphi_1 = \varphi + \theta$, z_1, les coordonnées cylindriques d'un point M de S par rapport à ces axes. Montrer que si ces axes sont convenablement choisis, ρ_1 et z_1 s'expriment simplement en fonction de ρ, z et θ.

10° Montrer que l'élément linéaire ds d'une courbe quelconque, tracée sur S, s'exprime simplement en fonction de ρ, θ, φ, et de leurs différentielles.

11° Montrer qu'on peut, par un changement de variables convenable, mettre ds^2 sous la forme :

$$ds^2 = d\sigma^2 + [T(\sigma)] dv^2.$$

12° Inversement, montrer que, P(σ) étant une fonction non négative donnée, il existe une infinité de quasi-hélices C non superposables, qui correspondent à des surfaces S dont le carré de l'élément linéaire peut s'écrire sous la forme :

$$ds^2 = d\sigma^2 + P(\sigma) dv^2.$$

13° Signaler en outre toutes les propriétés des courbes C et des surfaces S qui paraîtront dignes d'intérêt. [Il n'en sera tenu compte que si les questions précédentes ont été résolues.]

Mécanique rationnelle. — I. Sur un plan horizontal rugueux reposent deux rouleaux cylindriques parallèles et de longueurs égales. On prend deux axes rectangulaires, ox, oy, l'axe oy étant vertical et dirigé vers le haut, et l'on suppose que le plan xoy est perpendiculaire aux génératrices des cylindres et est un plan de symétrie de chacun de ces cylindres. On désignera par O_1 et O_2 les centres des sections des cylindres par le plan xoy, par r_1 et r_2 les rayons des cylindres, par o, r_1 les coordonnées de O_1 et par a, r_2 les coordonnées de O_2, par m_1 et m_2 les masses des cylindres. Sur ces cylindres on pose une planche homogène rugueuse, qui a la forme d'un parallélépipède rectangle et qui admet le plan xoy comme plan de symétrie. On désigne par $2l$ et $2h$ les dimensions du rectangle intersection de la planche et de xoy, $2l$ étant la longueur de la planche, c'est-à-dire la longueur du côté du rectangle tangent aux sections des cylindres et $2h$ son épaisseur ; on supposera $l > a$. On désignera par 2α l'angle du côté de longueur $2l$, avec ox, par Mg le poids de la planche et par z et $a - z$ les distances *positives* de son centre de gravité G aux rayons O_1B_1 et O_2B_2 qui passent par les points de contact de la planche avec les circonférences O_1 et O_2.

On négligera les frottements de roulement et on désignera par f le coefficient de frottement de glissement aux contacts A_1, A_2, B_1, B_2 des cylindres avec ox et avec la planche.

1° Prouver que l'équilibre est impossible, si r_1 et r_2 sont inégaux (on supposera $r_1 > r_2$) ;

2° Supposant f assez grand pour qu'il ne se produise aucun glissement, étudier le mouvement du système abandonné sans vitesse initiale : on posera $oA_1 = x$ (la valeur initiale de x est zéro). On cessera d'étudier le mouvement lorsqu'un glissement se produira sur l'un ou l'autre rouleau ou dès que la planche basculera, c'est-à-dire perdra le contact avec le grand rouleau. On calculera les actions du sol et de la planche sur les rouleaux en A_1, A_2, B_1, B_2.

II. Un disque circulaire homogène, de poids Mg, est suspendu par 3 points A, B, C de sa circonférence ($AB = BC = CA = R\sqrt{3}$) à 3 points fixes a, b, c, au moyen de 3 fils *verticaux* égaux et de longueur l. On négligera l'élasticité et la masse de ces fils :

1° Le système étant en équilibre à l'instant $t = 0$, on brûle le fil Aa ; calculer la tension des fils Bb et Cc immédiatement après l'instant $t = 0$ et édudier le mouvement du système.

2° Même problème en supposant qu'à l'instant $t = 0$, on brûle simultanément les fils Aa et Bb.

III. On donne deux axes rectangulaires ox, oy, l'axe oy étant vertical et dirigé vers le haut. Un pendule simple est formé par un fil inextensible, de masse nulle, dont une extrémité est fixée en un point A de oy : à l'autre extrémité du fil se trouve un point matériel M, de poids mg, dont la position d'équilibre est le point o. Ce fil passe à travers un anneau horizontal très petit, dont le centre peut occuper une position quelconque entre o et A. (On peut imaginer que cet anneau, par un dispositif quelconque, glisse le long de tiges parallèles à oy et situées dans le plan mené par oy perpendiculairement au plan xoy : mais la nature de ce dispositif n'intervient pas dans le problème.) Si l'anneau est fixé de manière que son centre occupe un point B de oy, la longueur véritable du pendule simple est $oB = b$. On fait alors osciller ce pendule dans le plan xoy ; on désigne par α son angle d'élongation maximum et l'on suppose α assez petit pour que, dans les expressions dépendant de α, on ne conserve que la partie principale. Calculer la période du mouvement que l'on appellera *période du pendule* et l'énergie totale qu'il a fallu dépenser pour le mettre en mouvement à partir de sa position d'équilibre et que l'on appellera *énergie du pendule*.

Comment se modifient la période et l'énergie du pendule, lorsque l'on modifie la position de l'anneau, en le déplaçant à la main, son centre ne cessant jamais de décrire oy ?

On étudiera d'abord le cas où l'on élève ou abaisse l'anneau d'une longueur très petite ε, à partir de B, assez rapidement pour que, pendant ce déplacement de l'anneau, l'angle du fil avec oy puisse être regardé comme constant ; on désignera cet angle par θ.

On supposera ensuite, le déplacement ε restant très petit, que le mouvement de l'anneau est uniforme et que la durée du placement ε est égale à la période du pendule.

On étudiera enfin le cas où la durée du déplacement comprend un grand nombre de périodes (la fraction de période, si elle existe, étant par suite négligeable), sa vitesse étant assez faible pour que le déplacement de B, pendant la durée d'une période, soit très petit, et les variations de cette vitesse étant également assez faibles pour qu'elle puisse être regardée comme constante, pendant la durée de chaque période. La position finale de l'anneau étant définie par l'ordonnée $oC = c$, on examinera, en particulier, ce qui se produit si c augmente indéfiniment (ce qui exige naturellement que oA puisse être pris aussi grand que l'on veut) ou si c tend vers zéro.

Peut-on trouver entre la période et l'énergie du pendule une relation indépendante de c ?

Epure. — *Intersection d'un cône et d'un conoïde.* — On prendra la ligne de terre à 4 cm. au-dessus du petit axe de la feuille. Le milieu de la ligne de terre est pris pour origine de coordonnées ; la ligne de terre est axe des x (sens positif de gauche à droite), l'axe des z est vertical ascendant, l'axe des y de bout et en avant du plan vertical.

1° On considère un cylindre circulaire droit, ayant pour base dans le plan horizontal H le cercle de centre $x = -$ 7 cm. 5 ; $y =$ 11 cm. ; $z = 0$, et de rayon $R = 4$ cm. Soit G la génératrice la plus à droite de ce cylindre. Soit O le point de G ayant pour cote $z =$ 4 cm. 5. Le plan de bout P, passant par O, faisant 45° avec le plan H de gauche à droite en descendant, coupe ce cylindre suivant une ellipse E. On désigne par (S) la surface formée par les horizontales s'appuyant sur E et G.

2° On considère, d'autre part, un cône (C) illimité, ayant son sommet que la droite de bout du point O, à 12 cm. en avant du point O, et dont la base, située dans le plan de front du point O, est un cercle centré sur G, passant par O et le point de G coté 17 cm.

I. Construire la courbe Γ intersection des surfaces (S) et (C). Figurer la construction d'un point courant et de la tangente en ce point.

II. Représenter le solide commun au cône illimité (C) et au solide limité à la surface (S), au plan de bout P et à un deuxième plan de bout Q passant par O et faisant 30° avec le plan H de gauche à droite en montant.

Nota. — On vérifiera, au préalable, par la géométrie, que tout plan de bout passant par O coupe le conoïde (S) suivant une courbe dont la projection horizontale est un cercle.

Le solide à représenter est supposé opaque.

Les arcs de la courbe Γ extérieurs au solide commun seront représentés en trait rouge continu.

Pour plus de précision, on pourra déterminer les deux sommets de la projection horizontale en cherchant, par le calcul, leur distance à la projection horizontale du point O. Ce calcul sera sommairement expliqué sur une notice jointe à l'épure.

Calcul numérique. — I. Résoudre l'équation en x.

$$\left[1-\left(\frac{17}{18}\right)^{x}\right]^{90}=\frac{1}{2}$$

II. On considère l'expression

$$P_r \equiv 1 - C_{90}^{1}\left(\frac{85}{90}\right)^{r} + C_{90}^{2}\left(\frac{85}{90}\right)^{r}\left(\frac{84}{89}\right)^{r} - C_{90}^{3}\left(\frac{85}{90}\right)^{r}\left(\frac{84}{89}\right)^{r}\left(\frac{83}{88}\right)^{r} + \dots$$

$$\dots + (-1)^{s+1} C_{90}^{s+1}\left(\frac{85}{90}\right)^{r}\left(\frac{84}{89}\right)^{r}\dots\left(\frac{85-s}{90-s}\right)^{r} + \dots - C_{90}^{85}\left(\frac{85}{90}\right)^{r}\dots\left(\frac{2}{7}\right)^{r}\left(\frac{1}{6}\right)^{r}$$

où C_{90}^{s} désigne le nombre des combinaisons de 90 objets s à s.

1° Calculer la somme des quatre premiers termes de P_r quand $r=85$.

2° Calculer P_r dans le même cas.

3° Calculer P_r quand $r = 84$ et quand $r = 86$.

Nota. — On emploiera des tables fournissant les logarithmes vulgaires (avec cinq décimales) des nombres de 1 à 10.000. Pour chacun des nombres demandés dans les deux questions, le candidat aura soin de souligner les chiffres dont il est certain et il indiquera pourquoi. Toutefois les nombres demandés au § 3° de la deuxième question ne seront calculés qu'au dixième près.

2. Agrégation des Sciences Mathématiques des jeunes filles Concours de 1922

Arithmétique, algèbre et trigonométrie. — Les quatre nombres u_0, u_1, a, b, étant donnés, le système d'équations :

$$u_{p+1} = au_p + bu_{p-1}$$

où p prend les valeurs 1, 2, 3...n, définit les inconnues u_2, u_3, u_4, ... u_{n+1}.

On pose $$v_p = u_p - \lambda u_{p-1}.$$

I. Montrer qu'il existe en général deux valeurs, réelles ou imaginaires, λ_0 et λ_1, du paramètre λ, telles que le rapport de v_{p+1} et v_p conserve la même valeur quel que soit p.

N'y a-t-il pas des cas où λ est indéterminé ?

II. Calculer v_n et u_n en fonction de u_0, u_1, λ_0, λ_1. Examiner le cas particulier où $\lambda_0 = \lambda_1$.

III. Calculer la somme

$$u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots + u_n x^n$$

en fonction de u_0, u_1, λ_0, λ_1, x. Trouver s'il y a lieu, la limite de cette somme quand n augmente indéfiniment. Soit $f(x)$ la limite obtenue.

On donnera l'expression $f(x)$ dans les cas suivants :

1°		$u_0 = u_1 = 1$	$a = 2$	$b = -1$
2°		$u_0 = u_1 = 1$	$a = 3$	$b = -2$
3°	$u_0 = 1$	$u_1 = \cos\alpha$	$a = 2\cos\alpha$	$b = -1$

IV. u_0 et u_1 étant donnés, peut-il exister des systèmes distincts de nombres a et b auxquels corresponde la même fonction $f(x)$?

V. Trouver les valeurs de u_0, u_1, a, b, telles que

$$f(x) = \frac{1 - x}{1 - 2x + 2x^2}$$

Construire, dans ce cas, la courbe C définie, en rectangulaires, par l'équation $y = f(x)$.

Evaluer : 1° L'aire limitée par les demi-axes ox et oy et par l'arc de la courbe C compris dans leur angle ;

2° L'aire géométrique limitée par la courbe C, l'axe ox, et les parallèles à oy menées par les deux points d'inflexion d'abcisse positive.

Géométrie et Géométrie analytique. — 1° On donne une sphère, Σ, et une circonférence, C, rapportées à trois axes de coordonnées rectangulaires ox, oy, oz.

Σ passe par l'origine et a pour centre le point de coordonnées o, o, $2a$;

C passe également par l'origine, est située dans le plan xoy, et a pour centre le point de coordonnées a, o, o.

Former l'équation du cône Γ, circonscrit à la sphère, dont le sommet est le point M (x_0, y_0, o) du plan xoy. Déterminer la génératrice G de ce cône qui rencontre oz. Calculer les coordonnées du foyer, f, et du sommet s, de la section du cône Γ par le plan que définit l'équation $z = h$.

Construire le lieu L, du sommet s, quand le point M décrit la circonférence C. On étudiera comment varie la forme de la courbe L, quand h varie.

2° Former l'équation de la surface engendrée par la droite G quand M décrit la circonférence C.

Montrer que cette surface est le lieu des courbes L, quand h prend toutes les valeurs possibles. Vérifier qu'elle est tangente à la sphère Σ en tous les points d'une circonférence commune.

3° Une sphère Σ et un plan P étant donnés, on considère le cône Γ circonscrit à la sphère, et dont le sommet est un point M du plan P. Soit Q l'un des plans tangents à la sphère parallèles au plan P. Q coupe Γ suivant une conique γ, dont un foyer F est indépendant du point M. Désignons par F' l'autre foyer de γ et par H le point où la directrice relative au foyer F rencontre l'axe FF'. Montrer que le produit $\overline{FH} \times \overline{FF'}$ est constant, et qu'un axe de γ a une longueur constante.

4° Le point M qui, dans la troisième partie, pouvait se déplacer arbitrairement dans le plan P, est maintenant assujetti à décrire dans ce plan une circonférence C_1, passant par la projection sur P du centre de Σ. Lieu du foyer F', enveloppes des deux directrices, et lieux des sommets de la conique γ.

Nota. — On recommande aux candidates de traiter la troisième et la quatrième parties par la géométrie.

3. Certificat d'aptitude (E. S. des J. F.) 2e Partie-Sciences Concours de 1922

Mathématiques. — 1° Soit dans un plan deux axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy ; on fait tourner l'ensemble de ces droites de l'angle α autour du point O ; on appelle OX, OY les nouveaux axes obtenus. Un point du plan admet pour coordonnées x, y et X, Y par rapport à ces deux systèmes d'axes. Rappeler la démonstration des formules.

$$\begin{cases} X = x \cos\alpha + y \sin\alpha \\ Y = -x \sin\alpha + y \cos\alpha \end{cases}$$

qui seront utiles dans la suite.

2° On considère les paraboles (P) dont l'équation, par rapport à des axes rectangulaires fixes Ox, Oy, est de la forme

$$(-x \sin\alpha + y \cos\alpha)^2 = 4a \cos\alpha\,(x \cos\alpha + y \sin\alpha)$$

a restera constant ; α est un paramètre.

Rapporter une parabole (P) à son axe et à sa tangente au sommet pris comme axes de coordonnées. α variant, montrer que sa directrice passe par un point fixe et trouver le lieu de son foyer.

3° On considère les deux paraboles (P) obtenues pour les valeurs α_1, $\alpha_1 + \frac{\pi}{2}$ du paramètre α.

Prouver que ces deux paraboles ont, en dehors du point O, un seul point commun M (1).

Evaluer l'aire dont le périmètre est formé des arcs de ces deux paraboles limités aux points O et M.

4° Combien existe-t-il de paraboles (P) passant par un point donné du plan, A, de coordonnées x_0, y_0 ? Traduire géométriquement les

(1) On se borne évidemment à n'envisager que des éléments réels.

résultats en construisant la courbe (C) lieu des points par lesquels il passe deux paraboles confondues.

Chercher le lieu du point A en supposant que les paraboles qui passent en ce point ont leurs axes rectangulaires.

5° La courbe (C) est l'enveloppe des paraboles (P). Montrer que le contact de l'enveloppe et d'une enveloppée se produit en deux points dont on discutera la réalité.

4. Problèmes de géométrie

I. — On considère un triangle ABC rectangle en A. Par le point A on mène une droite (D) et on abaisse les perpendiculaires BB', CC', sur cette droite ; on mène par les points B' et C' les parallèles aux côtés de l'angle droit du triangle ; on forme ainsi un rectangle B'MC'N. Trouver les lieux géométriques des points M et N lorsque la droite (D) tourne autour du point A.

II. — On considère une circonférence fixe de centre O et un point H à l'intérieur de cette circonférence. Un triangle ABC variable est inscrit dans la circonférence O et ses hauteurs se coupent au point fixe H.

1° Construire le triangle ABC connaissant un de ses angles. Discuter.

2° Soit AA' la hauteur issue du point A dans le triangle ABC. Démontrer que le produit AH.HA' reste invariable quand le triangle se déforme comme il est dit plus haut. Construire les positions du triangle pour lesquelles la hauteur AA' est maximum ou minimum.

3° Démontrer que le produit AH.BH.CH et la somme des carrés des côtés du triangle restent constants quand le triangle se déforme.

III. — On considère un cercle fixe O, un point A fixe dans son plan et un cercle variable de centre I assujetti à passer par le point A.

1° Comment l'axe radical (D) des deux circonférences O et I se déplace-t-il quand le point I décrit une circonférence ?

2° Etudier en particulier le cas où le point I décrit la circonférence O elle-même, et vérifier que dans ce cas la droite (D) enveloppe une circonférence telle qu'il existe une infinité de triangles (T) inscrits à la circonférence O et circonscrits à cette circonférence.

3° On considère le triangle (T') dont les pieds des hauteurs coïncident avec les sommets du triangle T. Trouver le lieu des sommets du triangle T' et l'enveloppe de ses côtés.

Le Gérant : A. COUESLANT.

CAHORS, IMPRIMERIE COUESLANT *(personnel intéressé)*. — 26.728