DEUXIÈME PARTIE

Adresser au Secrétaire, M. Delcourt, 17, rue Louis-Braille, Paris 12e, toute communication relative à la rédaction de la deuxième partie du *Bulletin*.

Il remercie les membres de l'Association, qui ont bien voulu lui envoyer dès leur apparition des énoncés de problèmes d'examens ou de concours ou lui signaler des articles de pédagogie ou d'enseignement mathématique publiés par des Revues françaises ou étrangères.

Sur les théorèmes de Poncelet

La démonstration habituelle des théorèmes « de PONCELET » :

Si d'un point P *extérieur à une ellipse (ou hyperbole) on mène deux tangentes* PM_1, PM_2 :

1° *ces deux tangentes sont vues d'un foyer sous des angles égaux ou supplémentaires ;*

2° *la bissectrice de leur angle coïncide avec l'une des bissectrices de l'angle des droites joignant le point* P *aux deux foyers,*

donne lieu à une figure qu'il n'est pas toujours facile de dessiner exactement dans le cas de l'hyperbole. D'autre part cette démonstration n'est pas suffisamment rattachée à la construction des tangentes menées d'un point P à la conique.

Voici une démonstration qui nous paraît découler naturellement de ladite construction et qui, en tous cas, n'exige pas d'autre tracé.

Soient PM_1 et PM_2 les tangentes issues d'un point P à une ellipse (ou hyperbole) définie par ses foyers F, F' et le cercle directeur (F').

1° Les symétriques φ_1 et φ_2 de F par rapport aux tangentes sont les points d'intersection du cercle (F') et du cercle de centre P, passant par F ; les points de contact M_1 et M_2 sont sur les droites $F'\varphi_1$ et $F'\varphi_2$. L'ensemble des deux cercles étant symétrique par rapport à la droite des centres, F'P est une bissectrice de l'angle des droites $F'M_1$ et $F'M_2$.

2° Les tangentes PM_1, PM_2 sont les bissectrices des angles $FP\varphi_1$ et $FP\varphi_2$; PF' est la bissectrice de l'angle $\varphi_1 P \varphi_2$. Orientons les directions et rapportons-les à PF. On aura, à π près :

$$(PF, PM_1) = \frac{1}{2}(PF, P\varphi_1)$$

$$(PF, PM_2) = \frac{1}{2}(PF, P\varphi_2)$$

$$(PF, PF') = \frac{1}{2}(PF, P\varphi_1) + \frac{1}{2}(PF, P\varphi_2)$$

d'où : $(PF, PM_1) + (PF, PM_2) = (PF, PF')$

ou encore : $(PF, PM_1) = (PM_2, PF) + (PF, PF')$

$(PF, PM_1) = (PM_2, PF')$

PM_1 et PM_2 sont donc également inclinées sur PF, PF', ce qui démontre la deuxième partie.

Remarque : Appelons H_1 et H_2 les projections de F sur les tangentes ; ces projections sont sur le cercle de diamètre PF ; or, PF', perpendiculaire à $\varphi_1\varphi_2$ l'est aussi à H_1H_2. Le deuxième théorème revient à la propriété connue : *Dans le triangle* PH_1H_2, *la hauteur* PF' *et le diamètre* PF *du cercle circonscrit sont également inclinés sur les côtés* PH_1 et PH_2.

F. Brachet et J. Dumarqué.