Problèmes de Concours et d'Examens

1. Concours général des Lycées et Collèges, 1922

Classe de Mathématiques. *(6 heures).* — On donne un cercle C et l'axe C' de ce cercle, c'est-à-dire la perpendiculaire au plan de C, menée par le centre. Une inversion quelconque fait correspondre à C et à C' deux cercles C_1 et C'_1. Une seconde inversion, également arbitraire, fait correspondre à C_1 et C'_1 deux nouveaux cercles C_2 et C'_2.

1° Indiquer des propriétés caractéristiques du couple de cercles C_1, C'_1. Le couple C_2, C'_2 possède-t-il ces propriétés ?

2° Les sommets opposés d'un quadrilatère gauche Q sont situés respectivement sur deux cercles C_1, C'_1 donnés, de l'espèce indiquée. Trouver la relation qui existe entre les longueurs des côtés de Q. Réciproquement, les côtés d'un quadrilatère Q donné, satisfaisant à cette relation, est-il possible de trouver deux cercles C_1, C'_1, passant respectivement par les sommets opposés de Q et possédant les propriétés caractéristiques susvisées ?

3° Deux sommets opposés d'un tel quadrilatère étant donnés, ainsi que la droite qui joint les deux autres, il y a une infinité de ces quadrilatères Q. Etudier le déplacement des sommets variables. Trouver le lieu géométrique du centre de la sphère circonscrite à Q.

4° Deux points A et B étant fixés sur C_1 et un point M se déplaçant sur C'_1, que peut-on dire des surfaces lieux géométriques des bissectrices des droites MA, MB ? Comment se coupent ces surfaces ?

5° Est-il possible de trouver deux cercles Γ et Γ' tels qu'une inversion arbitraire leur fasse correspondre des cercles dont les plans se coupent sous un angle constant ?

Classe de Première, Sections C et D (*5 heures*). — Un tronc de cône de révolution est tel que les deux sphères S et S', tangentes à la surface latérale du tronc en tous les points des circonférences des bases, soient tangentes entre elles.

1° Calculer, en fonction des rayons r, r', des bases, le volume v de la partie du tronc qui est extérieure aux deux sphères, et le volume V du solide convexe limité par la surface latérale du tronc et par les calottes sphériques (appartenant à S et S') qui coiffent ce tronc. Simplifier l'expression de V. — On supposera $r > r'$.

2° Etudier les variations de $\frac{V}{v}$ en fonction du rapport $\frac{r'}{r}$, pris comme variable indépendante.

3° On pose $\frac{V}{v} = \frac{5 - 4\sin^4\varphi}{\cos^2 2\varphi}$, l'angle φ étant donné entre et $\frac{\pi}{4}$.

Calculer $\frac{r}{r'} + \frac{r'}{r}$: en déduire $\frac{r}{r'}$. Appliquer à $\varphi = \frac{\pi}{12}$.

r et r' étant donnés, construire l'angle φ.

2. Institut National Agronomique, 1922

Mathématiques (*4 heures*). — I. Dans un triangle ABC, on donne le côté $BC = a$, l'angle opposé A, et l'on sait de plus que l'angle B est double de A.

Exprimer les côtés AC, AB, en fonction de a et cos A.

Dans quels cas le triangle est-il isocèle ?

Dans quels cas l'un des côtés du triangle est-il double d'un autre ?

Exprimer la surface du triangle en fonction de a, sin B, cos B : étudier la variation de cette surface lorsque l'angle A varie, le côté a restant fixe.

II. Dans un triangle isocèle, la base vaut 10 m., et les côtés égaux valent chacun 13 m. Déterminer la base d'un autre triangle isocèle ayant même surface et même périmètre que le premier.

Epure (3 *heures*). — La ligne de terre xy est le petit axe de la feuille.

Un tétraèdre a une arête verticale, se projetant horizontalement à 6 cm. en avant de xy, à 4 cm. à droite du grand axe zz' de la feuille ; l'arête opposée est perpenticulaire au plan vertical de projection, et se projette à 6 cm. au-dessus de xy, à 4 cm, à gauche de zz'. Ces deux arêtes ont une longueur commune de 12 cm., et la droite qui joint leurs milieux est parallèle à la ligne de terre

Représenter par ses deux projections la partie de ce tétraèdre intérieure à une sphère de 5 cm. de rayon, ayant même centre que la sphère circonscrite au tétraèdre.

3. Ecole Spéciale Militaire, 1922

Mathématiques (4 *heures*). — I. On considère l'équation

$$A(x-b)(x-c)+B(x-c)(x-a)+C(x-a)(x-b)=0,$$

dans laquelle A et B sont deux nombres positifs et a, b, c trois nombres quelconques tels que l'on ait $a < b < c$.

Démontrer que cette équation admet toujours une racine réelle comprise entre a et b et trouver, suivant les valeurs de C, la position qu'occupe la seconde racine de l'équation par rapport aux trois nombres a, b, c.

II. On applique aux sommets d'un triangle ABC trois forces $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ respectivement équipollentes à BC, CA, AB.

1° Démontrer que ces trois forces forment un système équivalent à un couple. Trouver l'axe de ce couple.

2° On fait tourner ces forces autour de leurs points d'application d'un même angle ω et dans le même sens, ce qui les amène en $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$. Démontrer que ce système $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$ est équivalent à un couple. Trouver l'axe de ce couple. Pour quelle valeur de ω les trois forces se font-elles équilibre ?

III. Par deux points M et M', pris sur la tangente au sommet d'une parabole donnée, on mène à cette parabole deux tangentes, autres que la tangente au sommet, qui se coupe en P.

1° Trouver le lieu du point P quand M et M' varient de manière que leur milieu I reste fixe. En supposant que, dans ces conditions, M décrive toute la tangente au sommet en se déplaçant toujours dans le même sens, indiquer comment se déplace le point P sur le lieu qu'il décrit.

2° Lieu du point de rencontre des hauteurs du triangle MM'P, quand M et M' se déplacent de façon quelconque sur la tangente au sommet de la parabole.

Epure (3 *heures*). — Représenter en projection horizontale un corps solide opaque constitué par un cube dont chaque face serait surmontée de la demi-sphère qui a pour grand cercle frontière la circonférence inscrite dans cette face.

On ne dessinera que les parties vues en projection horizontale. A côté de la projection de chaque sommet vu du cube, on écrira sa côte à un millimètre près. La côte du sommet A qui est le plus élevé du cube est égale à 20 centimètres ; le centre du cube est sur la verticale du point A ; le côté du cube a 8 centimètres de longueur.

On placera la projection du point A au centre de la feuille ; une arête AB du cube aura sa projection parallèle au petit côté de la feuille, B étant à droite de A.

Calcul logarithmique *(1 heure)*. — Résoudre un triangle connaissant :

$$a = 13.232 \text{ m.} ; \quad b = 12.627 \text{ m.} ; \quad c = 11.428 \text{ m.}$$

4. Problèmes de Géométrie

Sèvres 1912. — On donne un cercle C de centre O, de rayon R, et sur ce cercle deux points A et A' tels que l'angle AOA' égale 1 droit. On mène par A une corde quelconque et par A' une corde de même longueur.

1° Trouver le lieu du point de rencontre de ces deux cordes.

2° Deux cordes *égales* menées par A et les deux cordes de même longueur menées par A' se coupent en quatre points, dont deux I et J sont alignés sur le point O. Ces quatre cordes sont tangentes à deux cercles *c* et *c'* que l'on fait tourner ainsi que C autour de IJ. Démontrer que l'aire de la sphère engendrée par C est égale à la somme des aires des sphères engendrées par *c* et *c'*.

3° Démontrer que les cercles circonscrits aux triangles AIA', AJA' et AIJ sont égaux.

4° Trouver le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle AIJ.

5° Les quatre points de rencontre de quatre cordes égales sont situés sur un même cercle C'. On demande de placer ce cercle connaissant la longueur *d* de son diamètre. Cas où $2d = R$.

Fontenay 1912. — 1° Montrer que dans un quadrilatère à diagonales rectangulaires (convexe, ou non, ou croisé), la somme des carrés de deux côtés opposés est égale à la somme des carrés des deux autres.

2° Montrer que pour tous les quadrilatères à diagonales rectangulaires inscrits dans un cercle donné, la somme des carrés des côtés est la même.

3° On joint un point I d'une circonférence de cercle aux extrémités A et B d'un diamètre fixe. Trouver sur la droite AI un point M et sur la droite BI un point N tels que le segment MN ait une longueur donnée et qu'il soit vu des points A et B sous des angles égaux.

4° Lieu des points M, N et lieu d'un point P qui divise le segment MN dans un rapport donné *m* quand I se déplace sur la circonférence donnée.

On appellera *a* et *b* les longueurs AB, MN.

St-Cloud 1913. — On donne un angle droit xOy, un point C sur la bissectrice de cet angle et le point C' symétrique de C par rapport au point O. Sur les droites Ox, Oy respectivement, on prend deux points variables A, B tels que l'on ait $OA \times OB = \overline{OC}^2$.

1° Démontrer que le quadrilatère ACBC' est inscriptible.

2° Calculer les angles en C et C' de ce quadrilatère, ainsi que l'angle au centre sous lequel on voit du point I, centre du cercle circonscrit au quadrilatère, la corde AB.

3° Les côtés C'A, C'B rencontrent les prolongements Ox', Oy' de Ox et de Oy au delà du point O aux points A', B' respectivement. Démontrer que la droite A'B' reste tangente à un cercle fixe.

4° Soit D le point de rencontre de AB avec OI. Démontrer que le cercle décrit sur DI comme diamètre passe par les points C et C'.

5° M étant le milieu de AB, la droite AB est bissectrice de l'angle CMC'.

Le Gérant : A. COUESLANT.

CAHORS, IMPRIMERIE COUESLANT *(personnel intéressé).* — 26.252