

Sur le nombre e

M. DONTOT, dans le *Bulletin* n° 24, indique une démonstration élémentaire de l'existence du nombre e . Sa note me remet en mémoire une démonstration que j'ai employée jadis et qui, sous le rapport de la simplicité, me paraît très satisfaisante. Pour lui conserver son caractère élémentaire, je me borne à la considération des exposants entiers, et sous cette forme elle peut être parfaitement saisie par des élèves de Mathématiques AB.

(1) Gauthier-Villars, éditeur,

(2) *Science et Philosophie*, par J. TANNERY, page 231.

Soient deux nombres positifs a et b , ($a > b$). De l'identité :

$$a^{m+1} - b^{m+1} = (a-b)(a^m + a^{m-1}b + \dots + b^m)$$

on tire :

$$(m+1)(a-b)b^m < a^{m+1} - b^{m+1} < (m+1)(a-b)a^m$$

$$(1) \quad b^{m+1} > a^m [(m+1)b - ma]$$

$$(2) \quad a^{m+1} > b^m [(m+1)a - mb]$$

Soit k un entier quelconque supérieur à x . Dans l'inégalité (1) posons successivement :

$$a = 1 + \frac{x}{m}, \quad b = 1 + \frac{x}{m+1}$$

et
$$a = 1 + \frac{x}{km}, \quad b = 1$$

On obtient aisément les inégalités :

$$\left(1 + \frac{x}{m+1}\right)^{m+1} > \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$$

et
$$\left(1 + \frac{x}{km}\right)^{km} < \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{k}\right)^k}$$

Il en résulte que $u = \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ croît indéfiniment avec m et reste fini, donc u a une limite l quand m croît indéfiniment.

Si dans l'inégalité (2) on pose

$$a = 1 - \frac{x}{m+1}, \quad b = 1 - \frac{x}{m}$$

on voit de même que $v = \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m$ croît avec m , donc v a aussi une limite l' , car $v < 1$.

Dans l'inégalité (1) changeons m en $m - 1$ et posons ensuite

$$a = 1 \quad b = 1 - \frac{x^2}{m^2}$$

$$1 > \left(1 - \frac{x^2}{m^2}\right)^m > 1 - \frac{x^2}{m}$$

Par suite $uv = \left(1 - \frac{x^2}{m^2}\right)^m$ tend vers 1 quand m croît indéfiniment, donc

$$l.l' = 1$$

L. ROUYER,

Professeur à la Faculté des Sciences d'Alger.