

Problèmes de Concours et d'Examens

1. Agrégation des Sciences Mathématiques des Jeunes Filles Concours de 1921

Arithmétique et algèbre. — Etant donnée une fraction de numérateur a et de dénominateur b , nous conviendrons d'appeler fraction correspondante la fraction qui a pour numérateur $2a + 3b$ et pour dénominateur $a + 2b$. Partant d'une fraction $\frac{a_0}{b_0}$, on calcule sa correspondante, $\frac{a_1}{b_1}$, puis la correspondante de $\frac{a_1}{b_1}$, soit $\frac{a_2}{b_2}$, et ainsi de suite...

On forme ainsi une suite indéfinie de fractions : $\frac{a_0}{b_0}, \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}, \dots$ telle que chacune des fractions de la suite est la correspondante de celle qui la précède immédiatement.

1° Démontrer que, si $\frac{a_0}{b_0}$ est irréductible, il en est de même de toutes les fractions de la suite ; que ces fractions vont toujours en croissant ou toujours en décroissant ; et que, lorsque n croît indéfiniment, $\frac{a_n}{b_n}$ tend vers une limite, L , indépendante de $\frac{a_0}{b_0}$.

2° Dans le cas particulier $a_0 = 2, b_0 = 1$, montrer que :

$$\frac{a_n^2}{b_n^2} - L^2 = \frac{1}{b_n^2} \quad \text{et que} \quad \frac{a_n}{b_n} - L < \frac{1}{3b_n^2}$$

En conclure que, dans ce cas, toute fraction comprise entre $\frac{a_n}{b_n}$ et L a ses termes supérieurs à $3a_n$ et $3b_n$.

II. Intégrer l'équation différentielle :

$$y'' + 3y = 2 \sin x$$

et calculer celle de ses intégrales qui s'annule, ainsi que sa dérivée, pour $x = 0$. On ne s'occupera que de cette intégrale y .

Etudier les variations de y dans l'intervalle $0, 3\pi$.

x variant de $-\infty$ à $+\infty$, calculer les valeurs de y et de y'' correspondant aux valeurs de x qui annulent y' , et discerner parmi les racines de y' celles qui rendent maximum ou minimum la valeur absolue de y .

Peut-on établir une correspondance entre la grandeur des maxima et des minima donnés par ces deux séries de racines de y' ?

Examiner combien un arc de la courbe représentative (de y) placé tout entier d'un même côté de ox peut avoir de points hauts ou bas.

Etablir enfin que la valeur de y oscille entre deux limites extrêmes, dont elle se rapproche autant qu'on le veut pour des valeurs de x convenablement choisies.

Géométrie et géométrie analytique. — Etant donnés deux axes rectangulaires $x'ox$ et $y'oy$, on considère trois points A, A', B , dont les coordonnées sont respectivement $a, 0$; $-a, 0$; $0, 2b$. D'un point M variable sur l'axe $x'ox$, on mène la parallèle à la droite BA' , qui coupe BA au point C , et la parallèle à BA qui coupe BA' au point C' .

1° Démontrer que l'axe du système des points C et C' passe par un point fixe, et que le cercle circonscrit au triangle BCC' passe également par un point fixe, autre que B .

2° L'enveloppe du cercle décrit sur CC' comme diamètre est une conique. Déterminer le centre, les axes de symétrie, les foyers, les directrices, et l'excentricité de cette conique.

3° Lieu du centre du cercle circonscrit au triangle CMC' , et enveloppe de ce cercle.

4° Construire graphiquement le point M de façon que le périmètre MCC' correspondant ait une valeur donnée $2p$. Discuter.

2. Baccalauréat 2^e Partie, Mathématiques, octobre 1921

Aix-Marseille : Dans un triangle rectangle on donne l'hypothénuse (*sic*) a et le produit m^2 des bissectrices intérieures des angles B et C .

1° Démontrer que
$$\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{m^2}{4a^2};$$

2° Calculer les angles du triangle ;

3° Démontrer que si O est le point d'intersection des bissectrices

$$BO \times CO = \frac{m^2}{2};$$

4° Construire le triangle ; on pourra pour cela s'appuyer sur la relation précédente.

Alger : On donne une circonférence de diamètre $AA' = 2R$, et une corde BC perpendiculaire (*en D*) à AA' : $AD = a$. En un point quelconque M (*de la circonférence*) on mène la tangente PQ qui coupe en P la corde BC et en Q la tangente AT .

1° En désignant par x l'angle AOM , exprimer en fonction de $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, la surface totale du tronc de cône engendré par le trapèze $ADPQ$ tournant autour de AA' ;

2° Etudier la variation de cette surface quand x varie et calculer son minimum. Construire la position de PQ qui correspond au minimum.

3° Calculer la longueur de l'arête latérale PQ qui correspond au minimum de la surface totale. Cette longueur est une fonction de a dont on demande d'étudier la variation quand a croît de 0 à $2R$.

Besançon : Aux extrémités d'une barre rigide MN, de 108 cm. de longueur, on applique des forces $F = 6$ kg., $F' = 8$ kg., dirigées suivant les droites MP, NR, situées dans le même plan avec MN et telles que MP fasse un angle de 126° avec MN et NR un angle de 144° avec NM. Trouver la valeur de la force Q faisant équilibre aux forces F et F', son point d'application sur MN et l'angle qu'elle forme avec MN.

(Une figure montre les forces F et F' dirigées d'un même côté de la droite indéfinie MN).

Bordeaux : On donne un triangle équilatéral ABC ; on mène par A la droite B'C' faisant avec AB l'angle x dans le plan orienté ; de même par B on mène C'A' faisant avec BC l'angle x et par C la droite A'B' faisant avec CA l'angle x : on forme ainsi un nouveau triangle A'B'C'.

1° Prouver que le triangle A'B'C' est équilatéral et a la même orientation que ABC.

2° Lieu des sommets A', B', C' quand x varie.

3° Démontrer que les lignes joignant les milieux des côtés de A'B'C' passent respectivement par des points fixes quand x varie.

4° Evaluer en fonction de x le rapport de similitude des 2 triangles A'B'C' et ABC et étudier la variation de ce rapport.

Caen : Connaissant le centre d'une ellipse, la longueur de son grand axe, et deux tangentes à la courbe, construire ses foyers ; examiner combien de solutions pourra fournir, suivant les données, la construction trouvée.

On commencera par rappeler l'énoncé connu auquel conduit la question classique : Lieu des projections d'un foyer de l'ellipse sur les tangentes à la courbe.

Clermont : Etudier les variations de la fonction

$$y = \frac{x(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$

ainsi que les variations de sa dérivée.

Les candidats devront donner les valeurs exactes (représentées au moyen des symboles ordinaires) des valeurs de x correspondant aux maxima et aux minima des deux fonctions, ainsi que les valeurs correspondantes des deux fonctions ; ensuite, ils devront calculer les valeurs approchées à $1/200$ près, par excès ou par défaut.

Tracer la courbe représentative des variations de y .

Dijon : Le plan est rapporté à deux axes rectangulaires OX et OY, et orienté positivement de OX vers OY.

1° On considère un point matériel M mobile dans le sens positif, sur un cercle de centre O et de rayon 1 cm. Sur ce point agit une

force F proportionnelle à la distance de M à OX , égale à 4 dynes quand M est en B , et la direction de cette force fait avec \overline{MO} un angle égal à celui que fait \overline{OM} avec OY .

Evaluer le travail élémentaire de F pour un déplacement MM' du point M sur le cercle : on posera

$$(OX, OM) = \frac{x}{2}, \quad MM' = \frac{\Delta z}{2}.$$

En déduire la dérivée du travail par rapport à x et évaluer le travail de F quand M décrit chacun des quadrants $AB, BA', A'B', B'A$.

2° On suppose que le point M , déjà soumis à la force F , est pesant, de poids p dynes, qu'il est assujéti à se déplacer sans frottement sur le côté intérieur du cercle et que OY est vertical. On demande si l'équilibre est possible et, dans l'affirmative, d'en déterminer les positions.

(Une figure montre les points A et B situés respectivement sur les parties positives des axes OX et OY).

Grenoble : On donne un cercle de centre C et de rayon R . Sur la circonférence de ce cercle on prend un point O et par ce point on mène deux sécantes rectangulaires OA, OB , qui rencontrent la circonférence en A et B . Sur OA on porte (dans le sens \overline{OA}) une longueur $AD = 2R$ et par le point D on mène \overline{DM} équipollent à \overline{OB} .

1° Lieu géométrique du point M , extrémité du vecteur DM ainsi construit ; tangente en M à ce lieu.

2° Déterminer, en fonction de l'angle φ que OAD fait avec le diamètre OCO' , l'aire S du quadrilatère $OBMD$. Etudier la variation de S quand le point A décrit toute la circonférence. On posera $S = 2Ry$ et l'on construira la courbe représentative des variations de y en fonction de φ .

3° O' étant le symétrique de O par rapport au centre C du cercle, évaluer le volume V engendré par le quadrilatère $O'ADM$ en tournant autour de OO' : on prendra comme variable $x = OA$, on exprimera V en fonction de x et on étudiera les variations de cette fonction ; on tracera la courbe représentative sur laquelle on marquera d'un trait plus fort la partie qui donne les variations du volume V .

4° Montrer (sans faire de discussion) que la détermination des points D de la question qui sont sur une droite donnée Δ , peut se ramener à abaisser de O les perpendiculaires sur les tangentes communes à une circonférence et à une parabole.

Lille : On considère deux circonférences de rayons double l'un de l'autre, C de rayon $2R$ et C' de rayon R , tangentes extérieurement en A . Du point A partent en même temps, d'un même côté de la ligne des centres OO' , 2 mobiles, M sur C , M' sur C' , animés de mouvements uniformes et dont les vecteurs-vitesse ont même longueur.

Exprimer en fonction de l'angle x du rayon OM avec la ligne des centres, la distance des 2 mobiles M et M' , et étudier les variations de cette distance pendant un tour du mobile M sur la circonférence C , en prenant comme variable $\cos x$.

Lyon : 1° Etudier les variations de $y = \frac{1}{x-1} - \frac{4}{x-2}$

2° Construire la courbe représentant cette variation.

3° On considère l'équation $\frac{1}{x-1} - \frac{4}{x-2} = m$. Indiquer suivant la valeur du paramètre m , le nombre et le signe des racines de cette équation. (N'importe quelle méthode sera acceptée).

4° Montrer qu'il existe entre les racines x' et x'' de cette équation une relation indépendante de m .

Montpellier : 1° Résoudre le système de quatre équations à quatre inconnues, x, y, x', y' :

$$(1) \begin{cases} x(y' - 1) = (y - 2)(x' - 3) \\ (x - 1)(y' - 4) = (y - 5)x' \\ (x - 1)(y' - 2) = (y - 3)(x' - 5) \\ (x - 2)(y' - 1) = y(x' - 4) \end{cases}$$

On prendra, par exemple, x comme inconnue principale ; on montrera que la résolution du système dépend de celle de trois équations du premier degré par rapport aux quatre inconnues, équations qui permettent d'exprimer en fonctions linéaires de x les trois autres inconnues ; le problème dépend finalement d'une équation du second degré en x . Les résultats seront exprimés avec trois décimales.

2° Interpréter géométriquement les équations (1). A cet effet, considérer, dans le plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires Ox et Oy , les deux quadrilatères $ABCD$ et $A'B'C'D'$ dont les sommets ont respectivement pour coordonnées : $A(0,2)$, $B(1,5)$, $C(1,3)$, $D(2,0)$, $A'(3,1)$, $B'(0,4)$, $C'(5,2)$, $D'(4,1)$. Aux quadrilatères seront associés les points m de coordonnées (x, y) et m' de coordonnées (x', y') . L'interprétation demandée s'obtiendra en comparant les pentes des droites telles que mA et $m'A'$.

Les deux solutions seront représentées par $m(x, y)$, $m'(x', y')$, et par $M(X, Y)$, $M'(X', Y')$.

Déduire de ce qui précède la proposition suivante : par l'une ou l'autre des deux translations déterminées le quadrilatère $A'B'C'D'$ peut être amené, dans le plan de la figure, dans une position $abcd$ telle que les quatre droites Aa , Bb , Cc , Dd , concourent au point m ou au point M . Soumettre l'un au moins de ces deux cas à une vérification graphique.

Nancy : On considère un cercle de centre O , de rayon R , et un point P , à la distance d du centre. Un angle droit MOM' tourne autour de O . Déterminer l'angle $POM = x$ de façon que l'angle MPM' soit également droit.

Discuter le problème suivant les positions de P .

Calculer x dans le cas $R = 1$, $d = 1/2$.

(Sur la figure, P est extérieur).

Paris : Un point M est variable sur une ellipse d'axes $AA' = 2a$, $BB' = 2b$ et de foyers F et F' . Soient P et Q ses projections orthogonales sur AA' et BB' .

1° Lieu du milieu I de PQ .

2° En désignant par φ l'angle excentrique, c'est-à-dire l'angle tel que l'on ait : $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$, exprimer en fonction de $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = t$ le rapport $z = \frac{AP}{BQ}$ et étudier les variations de ce rapport lorsque t varie de $-\infty$ à $+\infty$. Construire la courbe représentative.

3° Dédire de cette étude qu'il existe 2 positions du point M : M_1 et M_2 pour lesquelles le rapport z prend une valeur donnée m . Traiter en outre la question directement en prenant comme inconnues les coordonnées x et y du point M .

4° On suppose que le point M est attiré par les 2 foyers F et F' et que les forces attractives sont représentées par les vecteurs \overline{MF} et $\overline{MF'}$. Construire la résultante de ces 2 forces et déterminer la position de M pour laquelle cette résultante est égale au double de MF .

Poitiers : Soient Ox et Oy deux axes de coordonnées rectangulaires, A le point du plan xOy d'abscisse a (> 0) et d'ordonnée b (> 0) ; soient encore B la projection orthogonale de A sur Oy et P un point sur Ox d'abscisse x (> 0). On suppose que le trapèze $ABOP$ forme le périmètre d'une plaque homogène plane, et l'on demande de calculer l'abscisse u du centre de gravité de la plaque.

Représenter graphiquement les variations de u en fonction de x , a et b restant constants et x variant de 0 à $+\infty$.

Enfin, représenter (dans les mêmes conditions) les variations de $v = \frac{aS}{bu}$, S désignant l'aire du quadrilatère qui a pour sommets les milieux des côtés du trapèze $ABOP$.

Rennes : On considère un triangle BOC rectangle en O et la perpendiculaire OA abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse. Par le point O on mène une droite variable faisant avec OA un angle x et l'on projette sur cette droite les points A, B, C respectivement en A', B', C' .

On pose $OA = a$ et l'on demande de calculer en fonction de l'angle x les longueurs $AA', A'B', A'C', AB', AC'$ et la surface du triangle $AB'C'$.

Pour quelle valeur de l'angle x cette surface est-elle maxima ?

Quels sont les lieux géométriques décrits par les points A', B', C' lorsque x varie ?

Strasbourg : 1° Construire la courbe (C) qui représente les variations de la fonction.

$$y = \frac{x+h}{1-x^2};$$

h est un paramètre donné, supérieur à l'unité.

Montrer que lorsque, pour une valeur $x = x_0$ de la variable, la

fonction y passe par un maximum ou minimum, la valeur de ce maximum ou minimum est toujours égale à $-\frac{1}{2x_0}$.

2° On considère une droite D parallèle à l'axe des abscisses Ox , dont tous les points ont pour ordonnée Y et qui rencontre la courbe (C) aux points M_1 et M_2 . Soit A le point de cette droite qui a pour abscisse un nombre donné a . Soit enfin B le conjugué harmonique de A dans le segment $M_1 M_2$. Evaluer Y en fonction de l'abscisse X du point B . En déduire le lieu géométrique du point B quand la droite D se déplace parallèlement à elle-même.

Comment faut-il choisir a pour que le lieu géométrique ainsi déterminé se réduise à des droites. Examiner aussi le cas particulier où a est égal à l'infini.

Toulouse : Un cercle invariable, de centre O , est coupé, en A et B , par une tangente à un second cercle invariable extérieur au premier.

Maximum de l'aire du triangle OAB : Construire géométriquement le ou les triangles réalisant ce maximum.