Problèmes de Concours et d'Examens

1. Examens des bourses des Lycées et Collèges de garçons, 1922

1re Série A et B (*pour entrer en Sixième*) : I. Un marchand achète 7 barils d'huile d'olive de chacun 120 litres au prix de 950 francs les 100 kilogrammes. Il met cette huile dans des bidons contenant chacun 1 décalitre. Mais il a, sur les 7 barils, un déchet de 20 litres. Il revend l'huile à raison de 105 francs le bidon. Quel sera son bénéfice si un litre d'huile d'olive pèse 0 kg. 915 ?

II. Un hôtelier achète 8 barriques de vin pour une certaine somme. Si chaque barrique avait coûté 150 francs de moins, il aurait pu acheter 2 barriques de plus pour la même somme. Quel est le prix d'une barrique de vin ?

2e Série A et B (*pour entrer en Cinquième*) : I. Une ménagère achète, pour faire des confitures, 5 kg. 5 de groseilles à 0 fr. 40 le demi-kilogramme. Le poids du jus obtenu est les 4/5 du poids des groseilles. Ce jus est cuit avec un poids égal de sucre à 3 francs le kilogramme. Par la cuisson, le poids du mélange se réduit de 1/5. Enfin, pour faire cette cuisson, la ménagère brûle 5 kilogrammes de charbon à 18 francs les 100 kilogrammes.

On demande : 1° le prix de revient du kilogramme de confitures ; 2° le nombre de pots remplis, sachant qu'un pot contient 3hectogr., 52 de confitures.

II. Pour acheter un cheval, un vigneron vend une partie de sa récolte de vin. S'il ne vend que 4 barriques de vin, il manquera à la somme ainsi obtenue 1/25 du prix du cheval. Il vend alors 5 barriques : sur le produit de cette vente, il paye le cheval et il lui reste 300 francs. Trouver le prix du cheval et le prix de vente d'une barrique de vin.

6e Série C (*pour entrer en Première* C) : I. On considère un triangle ABC dans lequel l'angle extérieur B est triple de l'angle intérieur C, celui-ci étant inférieur à 45°.

1° Démontrer qu'on peut déterminer sur le côté AC lui-même un point D tel qu'en joignant BD, on ait $DC = BD = AB$.

2° On suppose que le triangle ABC précédent est isocèle et a pour base AB. Démontrer que AB est moyen proportionnel entre AC et AD.

II. Déterminer deux nombres *positifs* dont la somme soit égale à 17 et tels que les 3/4 du premier surpassent les 5/6 du second d'un nombre *positif* a. Entre quelles limites doit être choisi a pour que le problème soit possible ?

6e Série D (*pour entrer en Première D*) : I. Etant donné un parallélogramme ABCD, on marque sur les côtés AB, BC, CD, DA les points E, F, G, H : pour que le quadrilatère EFGH soit un parallélogramme, *il faut* et *il suffit* que l'on ait $AE = CG$, $AH = CF$. Le démontrer.

II. On donne un rectangle ABCD, avec $AB = a$, $AD = b$. On demande d'y inscrire un rectangle EFGH (E sur AB entre A et B, F sur BC entre B et C, ...) tel que l'on ait $\frac{EF}{EH} = m$.

On prendra comme inconnues les longueurs $AE = x$, $AH = y$; on établira les deux équations

$$mx + y = b, \qquad x + my = a ;$$

on les résoudra en faisant sur m l'hypothèse nécessaire ; on discutera en supposant $a \geqq b$, $m > 1$.

Examiner le cas singulier $m = 1$.

2. Examens des bourses des Lycées et Collèges de jeunes filles, 1922

1re Série (*pour entrer en 1re Année*) : I. La récolte d'un champ de blé est achetée 430 francs avant d'être coupée. La moisson fournit 221 gerbes et nécessite 3 heures de travail d'une moissonneuse à 4 fr. 90 l'heure. Le transport et le battage coûtent ensemble 41 fr. 50. Sachant que 5 gerbes produisent 25 litres de grain, calculer le prix de revient d'un hectolitre de blé.

II. Un éleveur vend 3 bœufs et 20 moutons, et fait sur cette vente un bénéfice total de 1250 francs. Sur un bœuf, il gagne 10 fois plus que sur un mouton. Combien a-t-il gagné sur un bœuf et sur un mouton ?

2e Série (*pour entrer en 2e Année*) : I. 2 bassins contiennent : l'un 339 litres et l'autre 87 litres d'eau. Chacun d'eux reçoit d'une source 6 litres d'eau par minute, de sorte que la différence des quantités d'eau contenues dans les deux bassins ne varie pas. Dans combien de minutes le contenu du deuxième sera-t-il les 3/7 du contenu du premier ?

II. En multipliant un certain nombre par 4/7, on a obtenu un résultat qui est inférieur de 159 unités à ce nombre lui-même. Calculer ce nombre. Faire la vérification.

3e Série (*pour entrer en 3e Année*) : I. Un employé dépose chaque mois à la Caisse d'épargne les 3/19 de son traitement mensuel. Après avoir fait les versements pendant les 6 premiers mois de l'année, il est obligé, le septième mois, non seulement de ne rien verser, mais encore de retirer 300 francs pour subvenir à des frais imprévus. Pendant les 5 mois suivants, il double la somme déposée chaque mois et arrive ainsi à économiser pendant l'année la somme sur laquelle il comptait. Calculer le traitement annuel de cet employé.

II. En divisant un certain nombre entier par 63, 72, 90, on a obtenu dans les trois divisions 15 pour reste.

Montrer qu'il y a une infinité de nombres entiers qui remplissent cette condition. Calculer le plus petit d'entre eux. Comment peut-on obtenir les autres solutions du problème ?

4e Série (*pour entrer en 4e Année*) : I. Soit un triangle ABC.

Une parallèle au côté BC qui rencontre les côtés AB et AC aux points D et E, est telle que : $DE = DB + EC$.

Sur DE, on prend à partir de D un segment DO égal à DB (*une figure montre* O *intérieur au triangle*).

Démontrer que les droites BO et CO sont les bissectrices des angles B et C du triangle ABC.

Réciproquement : Etant donné un triangle ABC, on mène les bissectrices des angles B et C qui se coupent en un point O intérieur au triangle. Par le point O, on mène la parallèle à BC qui rencontre les côtés AB et AC aux points D et E. Démontrer que l'on a :

$$DE = DB + EC.$$

II. Pression atmosphérique. Baromètre à mercure.

5e Série (*pour entrer en 5e Année*) : I. Soit un trapèze dont les bases ont les longueurs suivantes : $AB = 5$ cm., $CD = 7$ cm.

Sur le côté AC on prend un point M tel que : $\dfrac{MA}{MC} = \dfrac{3}{4}$, et par le point M on mène la parallèle aux bases, MN étant le segment de cette parallèle compris à l'intérieur du trapèze.

Calculer la longueur de MN.

Indication : on pourra calculer successivement les segments MH et HN (*La figure montre* H *à l'intersection des droites* MN *et* AD).

On pose ensuite : $AB = a$, $CD = b$ et $\dfrac{MA}{MC} = \dfrac{m}{n}$.

Calculer, comme précédemment la longueur de la parallèle MN aux bases.

On trouvera : $MN = \dfrac{an + bm}{m + n}$.

Cas particulier : $m = n$; énoncer le résultat trouvé dans ce cas particulier.

II. Différentes catégories d'aliments. Action des sucs digestifs sur les aliments.

3. Baccalauréat 1re Partie C et D, octobre 1921

Aix-Marseille : Etant donnée une demi-circonférence de diamètre $AB = 2R$, on prend sur le prolongement du diamètre au delà du point B, un point C tel que $BC = 2R$.

Un point M parcourt la demi-circonférence, soit P sa projection sur AB ; on pose $AP = x$. On fait tourner la figure autour de AC.

1° Evaluer en fonction de R et de x les volumes V_1, V_2, V_3 engendrés respectivement par les triangles AMP, CMP, BMP. Vérifier que $V_2 - V_1 = 2V_3$.

2° Etudier la variation de la différence $V_2 - V_1$, quand le point M parcourt la demi-circonférence.

Construire la courbe représentative en faisant $R = 1$.

Alger : On donne deux demi-droites parallèles Ax et By perpendiculaires sur AB (d'un même côté de AB) ; et sur AB un point fixe P entre A et B. ($PA = a$, $BP = b$). On prend sur Ax et By deux segments $AA' = x$ et $BB' = y$.

1° Etudier la variation de l'angle $\theta =$ A'PB' quand les deux segments varient de telle manière que $xy = m^2$ (m étant une longueur donnée). Indiquer la nature de l'angle θ et déterminer le maximum ou le minimum de cet angle.

2° AB étant fixe et m donné, peut-on choisir le point P sur AB de façon que θ soit constant ?

Besançon, Série C : Etant donné dans un plan un triangle OAB, dont un des deux angles à la base AB est obtus (*l'angle* A *d'après la figure*), on déplace un mobile P sur la droite Oz perpendiculaire au plan de ce triangle et l'on considère l'angle APB $=$ V et sa tangente trigonométrique ; celle-ci étant regardée comme une fonction de la distance OP $= z$,

1° Calculer la dérivée de cette fonction par rapport à cette variable.

2° En déduire la condition pour que l'angle APB décroisse immédiatement dès que le mobile P quitte le point O.

3° Si les deux angles à la base AB du triangle OAB sont aigus, l'angle V décroît toujours immédiatement ; le démontrer directement.

Indication : On définira le triangle OAB par sa hauteur OH $= h$ et par les distances HA $= a$, HB $= b$.

Besançon, série D : Etant donnés un plan P et deux points A et B situés d'un même côté et hors de ce plan.

1° Trouver le lieu géométrique des points où les sphères passant par A et B et tangentes au plan P touchent ce plan.

2° Déterminer celle de ces sphères dont le point de contact fournit le point du plan P duquel on voit le segment AB sous l'angle le plus grand possible.

Bordeaux : Soit a un angle compris entre $\frac{3\pi}{2}$ et 2π et tel que

$$\operatorname{tg}^2 a = 2$$

Calculer, sans se servir de tables de logarithmes, $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$, $\sin\frac{a}{2}$ et $\cos\frac{a}{2}$:

Caen, Série C : Dans une demi-circonférence donnée de rayon R, limitée par le diamètre AB, on mène une corde parallèle à ce diamètre ; soient C et D les extrémités de la corde, O le point milieu de AB, P le pied de la perpendiculaire menée de O sur CD.

Désignant par x l'angle POD, et posant $\sin x = t$, on exprimera en fonction de R et de t le volume engendré par la révolution de l'aire du trapèze convexe ACDB autour de AB ; puis, supposant variable l'angle POD, on étudiera la variation de ce volume.

On construira, enfin, à l'aide de la règle et du compas, sans faire intervenir aucun calcul d'approximation, la valeur de t qui donne le volume maximum. (On expliquera les constructions effectuées).

Caen, Série D : On considère, dans un plan, un segment rectiligne de longueur 1 ; par les deux extrémités, A, B, du segment, et par un point M, pris sur lui entre A et B, on mène la droite AB, et d'un même côté de cette droite, trois perpendiculaires sur lesquelles on prend respectivement les longueurs

$$AC = AM, \qquad MD = AM, \qquad BE = 2MB$$

puis on joint CD et DE.

Variation de la longueur de la ligne brisée ACDEB lorsque le point M prend toutes les positions possibles entre A et B ; valeur du minimum.

Clermont : Un tétraèdre (pyramide à base triangulaire) ABCD a deux arêtes opposées AB et CD horizontales et de même longueur a ; leur plus courte distance est h ; en outre, ce tétraèdre se projette sur un plan horizontal suivant un carré ADBC.

1° Calculer la surface S totale et le volume V de ce tétraèdre.

2° Etudier les variations du rapport $\frac{V}{S}$ quand a restant fixe, h varie.

(On pourra, d'une part, ramener les variations de $\frac{V}{S}$ à celles de son carré, d'autre part, prendre h^2 comme variable indépendante).

Dijon : Un point M se déplace sur un quart de cercle AB de centre O et de rayon R.

1° Calculer en fonction de l'angle $AOM = x$ la somme y des aires des segments sous-tendus par les cordes MA, MB. Variation de y.

2° Déterminer M de façon que y ait une valeur donnée $\frac{kR^2}{2}$. Discuter (Le candidat pourra donner une solution géométrique).

Grenoble : On donne deux sphères qui se coupent. Soit OO' le diamètre commun ; soient P et P' les extrémités de ce diamètre appartenant à l'une des sphères et intérieures à l'autre.

1° Calculer la surface S limitant le solide commun aux deux sphères, en fonction des rayons R et R' supposés donnés et de la distance $PP' = x$.

2° On suppose $R' = 3R$ et on pose $S = 4\pi Ry$. Etudier la variation de la fonction y de x ainsi définie, quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$. Tracer le graphique représentant cette variation et indiquer par un trait plus fort les parties du graphique qui correspondent à la variation de S.

Lille : Dans un triangle ABC, rectangle en A, on connait l'hypoténuse $BC = a$. Calculer les côtés de l'angle droit b, c, sachant que si l'on fait tourner le triangle autour de la parallèle à l'hypoténuse menée par A, l'aire engendrée par les côtés AB et AC est égale à k fois l'aire engendrée par l'hypoténuse.

Entre quelles limites doit être compris le rapport k pour que le problème soit possible, c'est-à-dire qu'il existe effectivement un triangle répondant aux conditions ?

Examiner les cas particuliers : $k = \frac{1}{2}$, et $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Lyon : Sur un demi-cercle de diamètre $BC = 2R$, on considère un point A qui se projette en H sur BC. Soient $BH = x$ et V le volume engendré par le triangle ABH tournant autour de BC.

1° Evaluer V en fonction de x et de R.

2° Etudier la variation de la fonction $y = 2x^2 - x^3$.

3° Construire la courbe représentant cette variation.

4° Trouver à l'aide de ce qui précède, en supposant $R = 1$, le nombre de positions de A pour lesquelles V prend une valeur donnée $m\pi$.

Montpellier : On donne deux cercles tangents intérieurement au point A, l'un de centre O et de rayon $R\sqrt{3}$, l'autre de centre O' et de rayon R. Soient AP une corde du cercle O, AQ une corde du cercle O' perpendiculaire à la précédente.

Déterminer l'angle $OAP = x$ de telle façon que $AP + AQ = 2Rm$, où m désigne un nombre positif donné. Discuter. Valeurs de x pour les valeurs remarquables de m.

Nancy : On donne l'équation ;

$$(m - 1)\,\text{tg}^2 x + 2m\,\text{tg}\,x + m + 7 = 0$$

où m est un nombre constant susceptible de prendre toutes les valeurs possibles.

1° Pour quelles valeurs de m cette équation a-t-elle des racines ?

2° Pour quelles valeurs de m les deux valeurs qu'elle donne pour tg$x$ sont-elles de signes contraires ?

3° Quelle valeur particulière doit-on donner à m pour que l'on ait entre deux solutions x' et x'' de l'équation la relation $x' = x'' + \frac{\pi}{2}$. Déterminer dans ce cas les valeurs numériques des solutions de l'équation.

Paris, Série C : On donne un angle droit xOy et on marque à son intérieur un point A. On désignera la longueur OA par a et l'angle xOA par θ. On mène par le point A la perpendiculaire à OA, elle coupe Ox en B et Oy en C.

1° Calculer en fonction de a et de θ l'expression

$$\frac{1}{\overline{OB}^2} + \frac{1}{\overline{OC}^2}$$

2° Etudier l'aire du triangle OBC lorsque a restant constant θ varie.

3° Calculer θ de manière que $OB + OC = m.BC$, m désignant un nombre positif donné. — Discussion.

4° En appelant V_1, V_2, V_3 les volumes engendrés par le triangle BOC en tournant respectivement autour de OB, OC, BC, vérifier que :

$$\frac{1}{V_3^2} = \frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2}$$

Paris, Série D : On donne une pyramide à base carrée SABCD dont l'arête SA est perpendiculaire au plan de la base. On trace dans le plan de la base une droite MN parallèle à la diagonale BD et située entre le point A et le point O de rencontre des diagonales et par MN on mène un plan parallèle à SA. — Soient $BD = 2d$, $SA = 3d$, $AI = x$. *(La figure montre le point* I *à l'intersection de* MN *et de* OA*).*

1° Calculer $AI = x$ pour que l'aire de la section MNPQR faite dans la pyramide par le plan passant par MN soit égale à une quantité donnée K^2. Discuter.

2° Le plan passant par BD, parallèle à SA, le plan de section maximum, divisent la pyramide en trois parties ; calculer les volumes de ces trois parties.

Poitiers : Un triangle abc dans le plan horizontal est déterminé comme il suit. Le pied d de la hauteur issue de a est entre b et c, et l'on a : $bd = 6{,}4$; $cd = 3{,}6$; $ad = 2{,}4$.

Ce triangle est la projection d'un triangle rectangle Abc dont l'hypoténuse bc est dans le plan de projection.

Calculer la hauteur Ad, la cote de A, l'aire du triangle Abc, l'angle du plan du triangle avec le plan de projection et les côtés de l'angle droit du triangle.

Rennes : Sur un cercle de centre C et de rayon R, on marque deux points diamétralement opposés O et A. On mène par O une sécante OM taisant avec OA un angle égal à φ, coupant le cercle en M et la tangente en A en P.

1° Evaluer, en fonction de R et de φ, OM, MP, AP.

2° La tangente en M perce AP en T ; montrer que $AT = TP = TM$.

3° La droite CM perce AP en Q ; évaluer PQ et MQ en fonction de φ.

Strasbourg : Construire la courbe représentative des variations de la fonction :

$$y = 4x^3 - 3x + a.$$

Montrer qu'elle présente un centre de symétrie qu'on déterminera.

Comment le changement de valeur du paramètre a modifie-t-il cette courbe représentative ?

On considère l'équation :

$$4x^3 - 3x + a = 0 ;$$

trouver, au moyen de l'étude précédente, les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doit satisfaire a pour qu'elle ait trois racines réelles.

En se supposant placé dans ce dernier cas, quelles sont, lorsque a varie, la plus grande et la plus petite des valeurs que puissent prendre ces racines ?

Quelles valeurs faut-il donner à a pour que ce nombre soit une des racines de l'équation proposée ? Lorsqu'il en est ainsi, résoudre complètement cette équation.

Toulouse : 1° Les côtés d'un triangle ont pour longueurs $BC = a = 39$, $CA = b = 40$, $AB = c = 25$. Vérifier que, dans ce triangle, l'angle B est double de l'angle C.

2° Plus généralement, quelle relation vérifient les côtés a, b, c, d'un triangle dont l'angle B est double de l'angle C ? On s'efforcera de ramener cette relation à sa forme la plus simple, qui est : $b^2 = ac + c^2$.

Le Gérant : A. COUESLANT.

CAHORS, IMPRIMERIE COUESLANT *(personnel intéressé)*. — 26.064