Unification des définitions de mots et des notations mathématiques *(suite)*

6. Questions de langage

1. — Il s'agit ici de géométrie plane. Un plan doit toujours être orienté.

La qualité commune à des droites parallèles est la *direction* ; la qualité commune à des droites parallèles et de même sens est l'*orientation*.

On rapporte les directions D d'un plan orienté à une direction fixe Δ : l'angle $\widehat{\Delta, D}$, connu à $k\pi$ près, peut être appelé *inclinaison* de la direction D ; on le désignera par la notation (D). Les relations entre inclinaisons sont des congruences de module π.

On rapporte les orientations D d'un plan orienté à une orientation fixe Δ : l'angle $\widehat{\Delta, D}$, connu à $2k\pi$ près, peut être appelé *argument* de l'orientation D ; on le désignera par $[D]$. Les relations entre arguments sont des congruences de module 2π.

Il n'y a pas d'inconvénient à employer les mêmes notations pour les directions et les orientations, attendu que, dans une question, on emploiera exclusivement les unes ou les autres.

Le mot *argument* est celui que l'on emploie dans la représentation des imaginaires par des vecteurs.

2. — Je rappelle que, dans le *Bulletin des Sciences Mathématiques et Physiques élémentaires*, j'ai proposé il y a déjà longtemps l'emploi du mot *date* : un point M a une abscisse x, un instant I a une date t : le mot *date* éveille l'idée d'origine et celle de sens pour le temps. En cinématique, pour un mouvement rectiligne, la position du point M est déterminée à l'instant I ; l'abscisse est fonction de la date. On a :

$$\overline{MM_1} = x_1 - x \quad ; \quad \overline{II_1} = t_1 - t.$$

3. — Le mot *discriminant* pour désigner la quantité $b^2 - 4ac$ figure dans un récent numéro du *Bulletin*. Il est cependant bien connu qu'il faut désigner par ce mot la quantité $4ac - b^2$. Pour que l'équation du second degré ait une racine double, il faut et il suffit que les deux équations

$$2ax + b = 0 \qquad \text{et} \qquad bx + 2c = 0$$

soient compatibles ; cela donne la condition $4ac - b^2 = 0$. Le discriminant de la forme quadratique $ax^2 + 2b'xy + cy^2$, ou le déterminant des coefficients des demi-dérivées est $ac - b'^2$. La quantité $b^2 - 4ac$ peut être appelé la *quantité critique*.

Pour le polynôme $f(x)$, de degré m, écrit *sans les coefficients du binôme*, le *discriminant* Δ est le quotient par a du résultant des équations $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$; le signe de ce résultant ne dépend pas de l'ordre dans lequel on prend les différences des racines des deux équations, puisque les degrés de ces équations sont de parités différentes. Les valeurs de Δ sont, pour $m = 2, 3, 4, \ldots$

$$4ac - b^2, \qquad 27a^2d^2 + \ldots\ldots, \qquad 256a^3e^3 + \ldots\ldots, \text{ etc.}$$

Si le polynôme $f(x)$ est écrit *avec les coefficients du binôme*, et si $f_1(x)$ est le quotient par m du polynome dérivé, le *discriminant réduit* Δ' est le quotient par a du résultant des équations $f(x) = 0$, $f_1(x) = 0$; dans une note de *la Revue de l'Enseignement des Sciences* (octobre 1911), j'ai mis par mégarde $f'(x)$ au lieu de $f_1(x)$. Les valeurs de Δ' sont, pour $m = 2, 3, 4, \ldots\ldots$

$$ac - b^2 ; \quad a^2d^2 + \ldots\ldots ; \quad a^3e^3 + \ldots\ldots ; \text{ etc.}$$

4\. — Si α, $\beta, \ldots\ldots$ sont les racines du polynôme $f(x)$, on a

$$\Delta = a^{m-2} f'(\alpha) . f'(\beta) \ldots\ldots ;$$

à cause de $f'(\alpha) = a\,(\alpha - \beta)\,(\alpha - \gamma) \ldots\ldots$ on a donc

$$\Delta = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} a^{2(m-1)} \times (\alpha - \beta)^2 \ldots\ldots ;$$

pour Δ', il faut diviser le second membre par m^m (SALMON, *Algèbre supérieure*, p. 345).

Soit P le produit des carrés des différences des racines :

Si m est pair, Δ a le signe de P ou le signe contraire suivant que l'on a $m = 4k$, ou $m = 4k + 2$; si m est impair, Δ a le signe de P ou le signe contraire selon que l'on a $m = 4k + 1$, ou $m = 4k + 3$.

D'autre part, le produit P est positif ou négatif selon que le nombre des couples de racines imaginaires est pair ou impair, c'est-à-dire selon que le nombre des racines imaginaires est $4h$ ou $4h + 2$.

Donc : *si* m *est pair*, Δ *est positif ou négatif selon que le nombre des racines réelles est* $4r$, *ou* $4r + 2$;

si m *est impair*, Δ *est positif ou négatif selon que le nombre des racines réelles est* $4r + 1$, *ou* $4r + 3$.

En effet, avec m pair, si l'on veut $\Delta > 0$, il faut $m = 4k$ avec $4h$ racines imaginaires, ou $m = 4k + 2$ avec $4h + 2$ racines imaginaires, etc.

Pour $m = 5$, Δ est positif si le nombre des racines réelles est un ou cinq, et Δ est négatif s'il y a trois racines réelles. G. FONTENÉ.

7. Proposition de M. Lhermitte (*Janson*)

Les *deux* traits parallèles qui figurent dans l'*échelle de pente d'un plan* chargent inutilement l'épure et provoquent des erreurs de graphique de la part des élèves qui prennent leurs points tantôt sur l'un des traits, tantôt sur l'autre, ou même entre les deux — par exemple, pour mener les horizontales s'appuyant sur deux échelles parallèles.

Je propose donc *un seul trait* qui ne sera doublé qu'à l'une de ses extrémités.

8. Sur l'importance des notations

Lorsqu'il a été convenu que l'unification des définitions et des notations ne porterait que sur les mots et non sur les concepts, cela signifiait assurément que chacun de nous devait rester libre de concevoir à sa guise son enseignement. Mais un mot, un signe, n'ont d'intérêt que s'ils représentent une idée. Et en fait, lorsque des notations nouvelles sont proposées, c'est évidemment avec une raison, c'est-à-dire que ces notations habillent simplement des concepts.

Sur certains concepts nous sommes tous d'accord ; sur la plupart des autres nous pouvons nous y mettre.

Dès lors quel but poursuivons-nous en essayant une unification ? Ce n'est pas seulement de faciliter notre travail et celui de nos élèves. C'est aussi, par l'action que nous pouvons avoir sur de jeunes esprits, de faire pénétrer le plus loin possible des habitudes de méthode et de logique, — cette logique qui est bien ce que nos élèves ont le plus besoin d'apprendre ! S'il n'en était pas ainsi, nous pourrions adopter n'importe quelles notations, en particulier celles d'usage ; mais lorsque les habitudes sont contraires à la logique, n'est-ce pas justement notre devoir d'essayer de les réformer.

Montrons tout de suite que cela est possible. Nos jeunes élèves, habitués *par nous*, dès le début de la géométrie, à exprimer les angles en grades s'y prêtent avec une telle facilité que l'on peut prévoir la disparition presque complète de l'usage du degré. Pour remonter plus haut, l'adoption du système métrique dans le pays s'est faite par l'intermédiaire des écoles, malgré les oppositions dont on trouve trace dans la littérature du début du XIXe siècle, nombre d'auteurs ne parlant qu'avec ironie des « élégantes mesures nouvelles » ! D'ailleurs, l'*usage* n'est souvent que celui d'un petit nombre ; par exemple, j'ai récemment demandé dans ma classe s'il y avait des élèves connaissant les mots *septante*, *octante*, *nonante* : quatre élèves ont répondu qu'ils étaient d'usage courant dans les régions d'où ils venaient, savoir : un de Suisse, un de Gascogne, un des Flandres, un de Bretagne. Ce sont donc alors les maîtres qui *enseignent* à utiliser *soixante-dix*, *quatre-vingts*, *quatre-vingt-dix* ? Mais alors, enseignons aussi à compter *cent*, puis *six-vingts*, etc... comme par exemple en Orléanais !

Puisque nous pouvons modifier les usages, n'est-ce pas notre devoir de le faire, quand c'est utile ? Or le danger des notations illogiques est qu'elles enracinent des idées fausses : *idées fausses* qu'appeler *carré long* un rectangle (d'usage courant dans le Bâtiment), que définir le mètre comme la quarante-millionième partie du méridien (combien de géographes le disent encore !), que de laisser définir le méridien lui-même : *une ligne imaginaire qui fait le tour de la Terre en passant par les pôles* ! !, que de laisser établir une confusion entre *chiffre* et *nombre*, etc.....

Les exemples sont innombrables : la grande majorité des gens ne conçoit un losange qu'avec une diagonale parallèle au bord du papier, ou une pyramide qu'avec une base horizontale : les formes dépendent des positions ! Il n'y a pas longtemps que j'ai vu un débutant en Spéciales étonné qu'un tétraèdre pût être considéré comme une pyramide, un autre qu'il pût y avoir des polygones gauches ! et non pas des élèves inintelligents, très loin de là !... Et enfin, beaucoup d'..... erreurs énoncées à propos de la théorie d'Einstein ne proviennent-elles pas de vulgarisations..... maladroites, qui ne sont possibles qu'à la faveur d'imprécisions, de définitions mal données et mal comprises, de notations peu correctes permettant une déviation de la pensée.

C'est contre ces habitudes qu'il nous *faut* réagir. Et pour terminer par une proposition pratique, ne serait-il pas possible de faire suivre nos propositions de définitions de mots ou de notations de la raison qui détermine leur choix ? Bien peu de mots suffiraient à cette explication et les discussions s'en trouveraient allégées.

M. Roby,
Professeur au Collège de St-Germain-en-Laye.