

Problèmes de Concours et d'Examens

1. Ecoles Normales Supérieures de Fontenay et de St-Cloud

Arithmétique et Algèbre. — 1° n étant un nombre entier positif, on considère la fraction :

$$\frac{n^2 - n + 41}{n^2 + n + 17}$$

Comparer, suivant les valeurs de n , cette fraction au nombre 1 puis au nombre 3.

Montrer que la fraction se simplifie quand le reste de la division de n par 173 est égal à 12.

2° x étant un nombre algébrique, qui peut prendre toutes les valeurs possibles, on considère l'expression :

$$y = \frac{x^2 - x + 41}{x^2 + x + 17}$$

Les valeurs de x pour lesquelles y est égal à un nombre donné b sont les racines d'une équation du second degré.

Calculer à 0,01 près les limites entre lesquelles b doit être compris pour que cette équation ait des racines.

Quel que soit b , les racines sont liées par une relation, indépendante de b , qu'on demande de former.

En déduire tous les couples de valeurs entières, positives ou négatives, tels que y prend la même valeur quand on donne à x les valeurs d'un même couple.

Géométrie. — 1° Etant donné un triangle ABC, démontrer que le lieu géométrique des points M du plan de ce triangle pour lesquels les distances MA, MB et MC vérifient la relation :

$$(1) \quad \overline{MA}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2$$

est une circonférence.

2° Réciproquement, étant donnée une circonférence C de centre O et de rayon R, démontrer qu'il existe dans le plan de cette circonférence une

infinité de triangles ABC tels que les distances MA, MB et MC d'un point quelconque M de cette circonférence aux trois sommets du triangle ABC vérifient la relation (1).

3° Connaissant la position de l'un de ces sommets, trouver le lieu géométrique des deux autres sommets, le lieu du point de concours des médianes du triangle ABC, du point de concours des hauteurs, du centre du cercle circonscrit. Le sommet donné peut-il être un point quelconque du plan ?

4° Connaissant la position du milieu d'un des côtés du triangle ABC, trouver le lieu géométrique des sommets du triangle.

Même question en supposant connu le centre du cercle circonscrit.

2. Baccalauréat 1^{re} Partie C et D, juillet 1921

Aix-Marseille : Soit un triangle ABC isocèle ; soit b la longueur des côtés égaux AB et AC. On demande :

1° De calculer en fonction de b et des lignes trigonométriques de l'angle B, le rayon R du cercle circonscrit au triangle, le rayon r , le périmètre et la surface du cercle inscrit ;

2° D'exprimer en fonction de $\cos B$ seul, le rapport $\frac{r}{R}$;

3° De déterminer $\cos B$ de manière que ce rapport soit égal à une valeur donnée k ; de dire entre quelles limites doit être compris k pour que le triangle existe ; de calculer les angles du triangle lorsque $k = \frac{1}{2}$.

Alger : On donne une sphère de rayon R ayant pour grand cercle le cercle O, et dans le plan du cercle un point fixe A à l'intérieur de ce cercle ($OA=a$). Par le point A on mène un plan perpendiculaire au plan de la figure et dont la trace est la corde BD. Ce plan coupe la sphère suivant un cercle C. On considère le cône ayant pour base le cercle C et pour sommet un point fixe S pris sur OA ($OS=b$).

1° Exprimer le volume du cône en fonction de l'angle $OAC = x$.

2° Étudier la variation de ce volume quand x varie (Représentation graphique). Construire géométriquement la position de la corde BD pour laquelle le volume est maximum.

(Le plan de la figure est le plan du cercle O ; le point S est représenté extérieur au cercle O et sur le prolongement du rayon OA ; les droites SB, SD et OC — C milieu de DB — sont tracées sur la figure).

Besançon, Série C : Un point A se meut sur une ligne droite Ox et l'espace e parcouru sur cette droite à partir du point O et au bout du temps t est donné par la formule :

$$e = 4t - 3t^2.$$

1° On demande les expressions de la vitesse et de l'accélération.

2° Au bout de quel temps le point A s'arrête-t-il pour rétrograder et après avoir parcouru quel espace ? Quelle est alors son accélération ?

3° Au bout de quel temps le point A repasse-t-il au point O ? Quelle est alors sa vitesse et quelle est son accélération ?

4° Etudier les variations de l'espace et de la vitesse en fonction du temps.

Besançon, Série D : Une droite AB, de longueur a , est divisée en trois parties égales par les points C et D. Sur AB comme diamètre, on décrit une circonférence sur laquelle on prend un point quelconque M. On mène $MC = x$ et $MD = y$. On demande :

1° De prouver que $x^2 + y^2 = \frac{5}{9} a^2$.

2° De calculer x et y sachant que l'angle CMD est égal à $\frac{\pi}{8}$.

Bordeaux : Soit un losange ABCD dont les côtés ont pour longueur 1. Deux mobiles P et Q se meuvent sur les deux côtés opposés CA et DB ; leurs mouvements sont uniformément variés. En adoptant comme sens positifs les sens CA et DB, les mouvements sont ainsi définis : les accélérations sont l'une et l'autre égales à $+2$; à l'origine des temps, P est en A et sa vitesse est $+2$, Q est en B et sa vitesse est $+1$. Soit M l'intersection de PQ avec CD :

1° Etudier le mouvement de M en prenant comme sens positif le sens CD, et comme origine le point D.

2° Construire les courbes représentant pour toutes les valeurs positives du temps t les variations de $DM = x$ et de la vitesse de M.

3° t_0 étant une époque quelconque, à quelle époque M occupe-t-il la même position qu'à l'époque t_0 ?

(Une figure montre le sommet B opposé du sommet C).

Caen : Dans un cercle donné de rayon R, on mène une corde et le diamètre perpendiculaire : soient O le centre du cercle, A l'une des extrémités de la corde, P le point d'intersection de la corde et du diamètre ; le triangle OPA, tournant autour de OP, engendre un cône de révolution. Désignant par x l'angle de génération POA du cône, et posant $\cos x = t$, on exprimera en fonction de R et de t le volume du cône ; puis, supposant variable l'angle de génération, on étudiera la variation de ce volume.

Considérant enfin la valeur de t qui donne le volume maximum, on construira à l'aide de la règle et du compas, sans faire intervenir aucun calcul d'approximation, l'angle de génération correspondant. (On expliquera les constructions effectuées).

Clermont : Un triangle isocèle ABC a sa base BC horizontale et son plan fait un angle x avec un plan horizontal. Il se projette horizontalement suivant un triangle abc , dont l'angle en a est égal à u .

1° Calculer la valeur v de l'angle A du triangle dans l'espace.

2° Etant donnés u et v , calculer x ; discuter.

Les candidats pourront, sans obligation, s'aider de l'épure en supposant que BC soit debout.

Dijon : Soit un quadrilatère (*sic*) ABCD dont deux angles consécutifs B et C sont droits. On pose $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$.

1° Quelle relation doit-il exister entre a , b , c pour que les diagonales AC et BD soient perpendiculaires ?

2° a , b , c ayant des valeurs données, *quelconques*, avec $a > c$, calculer les angles et les côtés du triangle AED, E étant le point de rencontre des diagonales.

3° Calculer numériquement à l'aide des tables la valeur de l'angle BEC, en supposant : $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$.

Grenoble : On considère un tétraèdre trirectangle en O, dans lequel les deux arêtes OA et OB sont égales à a ; la troisième arête OC issue de O est égale à $\frac{2\sqrt{2}}{3}a$.

1° On désigne par d la distance OD de O à AB ; calculer d en fonction de a . Déterminer l'angle que fait le plan CAB avec le plan OAB, en calculant la tangente de cet angle.

2° On considère un point M sur OC, entre O et C, et on désigne par α l'angle MDO ; calculer, en fonction de a et de α , la somme des 3 triangles MAB, MAC, MBC. On désignera cette somme par S.

3° Montrer que, entre O et C, il existe un point M et un seul tel que S est égal à a^2 . On déterminera M en prenant pour inconnue $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = t$.

Lille : Résoudre l'équation trigonométrique :

$$\cos 2x = 2a \cdot \cos x.$$

où a est un nombre donné et x un angle inconnu. Discuter le nombre de solutions suivant les valeurs de a . Donner explicitement les solutions

pour $a = \frac{1}{2}$

Lyon : Considérons l'équation :

$$(1) \quad \sqrt{h(x-1)(x-2)} = x - a$$

h est un nombre donné, *plus grand que 1*, a est un nombre donné quelconque. Dans le premier membre on a une racine carrée arithmétique.

Chercher suivant les valeurs données à a combien l'équation (1) admet de racines.

Trouver les valeurs approchées des racines à 0,01 près par défaut lorsque $h = 6$, $a = 0,4$.

Montpellier : xy étant la ligne de terre, on donne deux points A et B par leurs projections (a , a'), (b , b'). On placera les données comme il est indiqué dans le croquis ci-après.

a est sur la ligne de terre ; $\beta a = 4aa'$; $\beta b = \beta b' = 3aa'$; et on pourra prendre $aa' = 2$ cm.

1° Quel est le lieu géométrique des points de l'espace équidistants des deux points A et B ? Définir ce lieu sur l'épure.

2° Déterminer les points du lieu qui appartiennent aux plans de projection.

3° On donne en outre une droite horizontale (h, h') ayant pour trace verticale le point (v, v') et faisant avec le plan vertical un angle $\widehat{xoh} = 45^\circ$, on prendra $av = av' = aa'$, et la disposition indiquée sur le croquis. Déterminer les projections du sommet C d'un triangle isocèle ayant pour base le segment AB, ce sommet C devant se trouver sur cette horizontale (h, h').

4° Vraie grandeur du triangle ABC.

N. B. — On donnera les explications géométriques indispensables et on justifiera brièvement les constructions faites sur l'épure.

(Le croquis montre que β est l'intersection de la projetante bb' avec la ligne de terre, que l'horizontale hh' a même cote que le point aa' et que les points x, β, a, v, y se suivent dans cet ordre de gauche à droite sur la ligne de terre. — A noter que le croquis indique qu'il convient de lire ci-dessus \widehat{xvh} et non \widehat{xoh}).

Nancy : On considère le cône engendré par la révolution d'un triangle équilatéral SAB autour de sa hauteur SO, et l'on désigne par R le rayon de la base de ce cône.

Par un point C de AB tel que $AC = x$ on mène un plan perpendiculaire au plan SAB et parallèle à SB ; il coupe le cercle de base suivant la corde MN et l'arête de SA en un point P ; on considère le triangle PMN.

1° Déterminer x de façon que l'angle MPN soit égal à $\frac{2\pi}{3}$.

2° Déterminer x de façon que la somme des carrés des trois côtés du triangle MPN soit égale à une quantité donnée a^2 ; discuter.

Paris, Série C : On donne deux circonférences de rayon R et $2R$ tangentes intérieurement. On mène par A, point de contact des deux circonférences, une droite faisant avec la ligne des centres. OO' un angle aigu α . Elle coupe les circonférences aux points B et C qui se projettent en B' et C' sur la ligne des centres. On fait tourner la figure autour de OO'.

1° Calculer en fonction de R et de α l'aire latérale, l'aire totale et le volume V du tronc de cône engendré par le trapèze BCB'C'.

2° En posant $y = \frac{3V}{R^3}$ et $\sin^2 \alpha = x$, étudier les variations de y quand x varie de 0 à 1. Construire la courbe représentative des variations et ses tangentes aux points pour lesquels $x = 0$ et $x = 1$.

Paris, Série C : On donne un angle droit XOY, et à l'intérieur de cet angle un point A, on désigne par a et b ses distances AQ et AP à

OY et OX. — Ce point A est le sommet d'un angle droit quelconque dont les côtés rencontrent OX en B et OY en C.

1° On pose $OB = x$, calculer BC en fonction de a , b et x .

2° Pour quelle position de l'angle BAC la longueur de BC est-elle minimum ?

3° Pour quelle valeur de x l'aire du triangle OBC est-elle maximum ? Montrer que dans ce cas BC est perpendiculaire à OA.

Paris, Série C : Dans un triangle ABC donné, $BC = 2a$ et la médiane $AM = a$. On trace la hauteur AD et l'on pose $\widehat{AMB} = 2x$.

1° Dire la valeur de l'angle BAC ; ensuite calculer AB, AC, AD en fonction de a et de x .

2° Déterminer x de façon que $CD = 3 \cdot BD$.

3° On fait tourner la figure autour de la droite BC. Soient S_1 et S_2 les aires engendrées par les deux segments AB, AC et S l'aire d'une zone de hauteur égale à AD de la sphère de diamètre BC. Déterminer x de façon que $S_1 + \sqrt{3} S_2 = \lambda S$, λ désignant un nombre donné. — Discuter.

Application numérique. — Calculer x lorsque $\lambda = \sqrt{2}$.

(Une figure est donnée avec l'angle AMB aigu).

Paris, Série D : La somme des 12 arêtes d'un parallépipède rectangulaire à base carrée est donnée ; soit $4a$ sa valeur, x le côté de la base et y la hauteur.

1° Exprimer le volume V du parallépipède en fonction de x . Etudier les variations de V quand x varie. Quel est le parallépipède qui correspond au maximum de V ? Construire la courbe représentative en supposant $a = 6$ centimètres.

2° Calculer les valeurs de x et de y sachant que la somme des 12 arêtes est $4a$ et que la somme des aires des 6 faces est $2b^2$. — Discuter.

Poitiers : Représenter, par les méthodes de la géométrie cotée, un cube d'arête $a = 5$ unités, sachant qu'une de ses diagonales MN est parallèle au plan de projection et que le sommet le plus bas a pour cote *zéro* et se trouve dans le plan projetant MN.

Donner les cotes de tous les sommets.

N. B. — On nomme diagonale d'un cube toute droite joignant deux sommets n'appartenant pas à une même face.

Rennes : Sur un cercle de centre C et rayon R, on marque deux points diamétralement opposés O et A. On mène par O une sécante OM faisant avec OA un angle égal à φ , coupant le cercle en M et la tangente en A en P.

1° Evaluer en fonction de R et φ les volumes engendrés en tournant autour du diamètre OA par le triangle OCM, par le secteur circulaire CAM, par le triangle OAP.

2° Evaluer en fonction de l'angle φ le rapport de l'aire engendrée par le segment OM à l'aire engendrée par l'arc AM, en tournant autour de OA.

3° Calculer φ pour que ce rapport soit égal à un nombre m donné. — Discussion.

Strasbourg : On considère une ligne brisée polygonale régulière ABCD de 3 côtés, ayant chacun pour longueur a : on appelle α l'angle extérieur au sommet de cette ligne polygonale.

Soit O le centre de la circonférence qui lui est circonscrite ; évaluer, en fonction de a et de α :

Le rayon OA de cette circonférence ;

L'angle au centre total AOD ;

La longueur AD et l'angle de AD avec AB.

En regardant AD comme la somme géométrique des trois vecteurs AB, BC, CD, écrire le théorème des projections en projetant la figure sur la droite AB.

Vérifier par un calcul direct l'identité trigonométrique ainsi obtenue.

Généraliser le problème précédent au cas où la ligne brisée comprend un nombre quelconque n de côtés au lieu de trois seulement.

(Sur la figure, l'angle α est aigu).

Toulouse : Une sphère de centre O et de rayon R est tangente en A à un plan (P). Dans ce plan, on trace de A, comme centre, un cercle de rayon ρ . On désigne par (c) le cône ayant ce cercle pour base et le point O pour sommet.

Un plan (Q), perpendiculaire à OA en un point H situé entre O et A, coupe la sphère et le cône suivant deux cercles.

1° Exprimer en fonction de R, ρ et de $AH = x$, la somme y des aires de ces deux cercles. Etudier la variation de y quand x varie de 0 à R.

2° Dans le cas particulier où $\rho = R$, calculer l'aire de la calotte sphérique intérieure au cône (c).

3. Problèmes de Géométrie

I. — On donne deux points A et A' sur un cercle (O), et on considère les cercles (C) et (C') tangents au cercle (O) en A et A' et tangents entre eux au point M.

1° Lieu de leur point de contact M. Distinguer les parties du lieu d'après la nature des contacts.

2° Lieu des centres d'homothétie des cercles (C) et (C'). Distinguer les parties du lieu d'après la nature de l'homothétie.

II. — Soit un triangle isocèle ABC ($AC=BC$). Construire le foyer F de la parabole tangente en A et B aux côtés AC et BC. Lieu du point I, projection du foyer F sur AC, et enveloppe de la droite FI quand A et B restent fixes, le sommet C du triangle isocèle se déplace.

III. — Soit un cercle de diamètre AA' ; une tangente au cercle coupe en B et B' les tangentes dont les points de contact sont A et A' ; lieu du point de rencontre M des droites AB' et BA' lorsque la tangente BB' varie.

IV. — On donne deux cercles tangents en A et un point P sur la tangente commune en A . Construire le point P' , intersection des cercles qui passent par le point P et touchent les cercles donnés. Lieu du point P' lorsque le point P se déplace sur la tangente.

V. — On considère trois points A, B, C , en ligne droite et les cercles décrits sur AB, BC et AC comme diamètres. Construire les cercles tangents à ces trois cercles. Alignements remarquables.

VI. — Etant donné un triangle ABC , construire la conique tangente aux trois côtés et dont l'un des foyers est soit l'orthocentre, soit le centre du cercle inscrit.