

Sur les progressions arithmétiques à deux raisons

I. Le problème consiste à étudier l'ensemble E des nombres de la forme $na + pb$, a et b désignant des nombres donnés, n et p des entiers variables, positifs nuls ou négatifs.

Il est à peine besoin de rappeler que la question est classique, que M. GOURSAT, dans son *Cours d'Analyse* la traite dans le domaine complexe à propos des périodes des fonctions et que TANNERY s'en est occupé dans la seconde édition de *L'Introduction à la théorie des fonctions*. L'expression de progression arithmétique à deux raisons est tirée d'un article de M. LEBESQUE (*Bulletin de la Société Mathématique*, tome XXXV, 1907) que l'auteur m'a signalé à l'occasion de ce travail d'adaptation auquel il s'est intéressé.

On le voit déjà, la présente note a un but des plus modestes. Nous allons simplement introduire ces progressions en reprenant un raisonnement tout à fait intuitif, celui de la recherche de la commune mesure, puis, rassembler quelques unes des applications de cette notion qui se rencontrent à des degrés divers de notre enseignement.

II. Supposons $|a| > |b|$ et considérons les deux suites :

$$\begin{aligned} & b, 2b, 3b, \dots \\ & -b, -2b, -3b, \dots \end{aligned}$$

Ou bien a est un terme de l'une de ces suites et $\frac{a}{b}$ est entier, ou bien a est compris entre deux termes consécutifs. Soit kb le terme le plus voisin de a (ou l'un des deux plus voisins si a est équidistant de deux termes) ; posons $c = a - kb$; c est tel que $|c| \leq \frac{|b|}{2}$. Montrons, ce qui est presque immédiat, que l'ensemble E est identique à l'ensemble E' formé des nombres $n'b + p'c$, n' et p' désignant des entiers variables ; tout nombre de la forme $na + pb$ peut en effet se mettre sous la forme $n'b + p'c$ comme on le voit en y remplaçant a par $kb + c$, et inversement, tout nombre de la forme $n'b + p'c$ se met sous la forme $na + pb$ comme on le voit en y remplaçant c par $a - kb$. Recommencons l'opération avec b et c ; ou bien $\frac{b}{c}$ est entier ou bien nous aurons un reste d tel que $|d| \leq \frac{|c|}{2}$ et nous verrons encore que l'ensemble E' (et par suite l'ensemble E) est identique à l'ensemble E'' formé des nombres de la forme $n''c + p''d$, n'' et p'' désignant des entiers variables.

Poursuivons ces opérations. Deux cas peuvent se produire :

1° La suite des opérations est limitée. C'est dire qu'il existe deux restes consécutifs f et g tels que $\frac{f}{g}$ soit entier, ou que le reste suivant, h , est

nul. Par suite, on voit que l'ensemble E se réduit à la progression arithmétique ordinaire de terme général Ng , N désignant un entier variable.

Ce cas est celui où $\frac{a}{b}$ est rationnel.

Il est bon de faire la remarque suivante : Le cas de $\frac{a}{b}$ rationnel est caractérisé par ce fait qu'il existe deux nombres de l'ensemble E égaux bien qu'ils correspondent aux deux couples différents d'entiers n', p' et n'', p'' . Il résulte en effet de cette hypothèse que $\frac{n' - n''}{p' - p''} = \frac{b}{a}$ et par suite, que $\frac{a}{b}$ est rationnel. Réciproquement, $\frac{a}{b}$ étant rationnel et égal à la fraction irréductible $\frac{h}{k}$, les couples d'entiers n'', p'' qui donnent la même valeur au nombre de l'ensemble E que le couple n', p' s'obtiendront en écrivant les rapports égaux :

$$\frac{n' - n''}{p' - p''} = \frac{b}{a} = \frac{k}{h}$$

et en déduisant de là : $n'' = n' - \lambda k$, $p'' = p' + \lambda k$, λ désignant un entier quelconque. En particulier, les nombres de l'ensemble E qui sont nuls correspondent aux couples d'entiers $-\lambda k, \lambda h$.

2° La suite des opérations est illimitée. Nous avons formé une suite infinie de nombres a, b, c, \dots . Deux consécutifs quelconques d'entre eux peuvent être pris comme raisons pour définir l'ensemble E. Il est essentiel de remarquer qu'à partir du troisième, chacun de ces nombres est inférieur à la moitié du précédent. Cette suite a donc une limite nulle. Disons encore, puisque ces nombres appartiennent à l'ensemble, que nous avons pu former une suite infinie de nombres de l'ensemble E tous différents de zéro et tendant vers zéro.

La différence avec le premier cas est en évidence. Ici, $\frac{a}{b}$ est irrationnel.

Montrons maintenant que, dans ce cas, il est possible de trouver des nombres de l'ensemble aussi voisins que l'on voudra de tout nombre x choisi arbitrairement, ce qui s'exprime d'un mot en disant que l'ensemble est partout *dense* lorsque $\frac{a}{b}$ est irrationnel.

Reprenons la suite a, b, c, \dots des nombres de l'ensemble qui tend vers zéro sans contenir de nombres nuls. Soit j un terme quelconque de cette suite. L'ensemble E contient la progression... $-2j, -j, 0, j, 2j, \dots$; ou bien x est l'un des termes de cette progression, ou bien x est compris entre deux termes consécutifs. Dans les deux cas, il existe un nombre de l'ensemble de la forme $x + j'$, j' ne dépassant pas j en valeur absolue.

Nous avons donc trouvé une suite infinie $x + a'$, $x + b'$, $x + c'$,...
..... $x + j'$,... de nombres de l'ensemble qui admet pour limite un nombre x
arbitrairement choisi.

III. Faisons quelques remarques au sujet de cet exposé :

1° Dans le premier cas, celui où $\frac{a}{b}$ est rationnel, il suffit de supposer
 a et b entiers, pour obtenir la résolution en nombres entiers de l'équation
du premier degré à deux inconnues à coefficients entiers ou, ce qui
revient au même, la résolution de la congruence du premier degré à une
inconnue.

2° Nous aurions pu, dans le cas où $\frac{a}{b}$ est irrationnel, présenter les
faits sous une forme plus générale de la façon suivante qui utilise une
idée simple et importante : Soient i et j deux termes consécutifs quelcon-
ques de la suite a, b, c, \dots . Les nombres de l'ensemble E sont de la forme
 $Ni + Pj$, N et P désignant des entiers variables. Cherchons les nombres de
l'ensemble contenus dans un intervalle quelconque d'étendue j , soit x ,
 $x + j$. Pour cela, fixons N et faisons varier P . Nous obtenons une progres-
sion arithmétique de raison j qui possède, dans l'intervalle considéré, un
seul terme à moins que les deux limites x , $x + j$ ne fassent partie de cette
progression. Donnons maintenant à N toutes les valeurs entières et nous
aurons formé la suite infinie des nombres de l'ensemble appartenant à
l'intervalle x , $x + j$.

3° C'est, au fond, l'idée de progression arithmétique à deux raisons qui
intervient dans la démonstration classique du théorème de LEJEUNE-
DIRICHLET qu'on trouvera dans les *Leçons d'Arithmétique* de TANNERY
(Exercice 317 de la 1^{re} édition). Je me borne à rappeler l'énoncé de ce
théorème :

Soit a un nombre irrationnel donné et m un entier positif donné. Il
existe des entiers n et p dont le premier est inférieur ou égal à m , et tels
que l'on ait $|na - p| < \frac{1}{m}$

IV. Nos résultats contiennent l'étude de la distribution des points
d'abscisses curvilignes na sur le cercle trigonométrique, n étant un entier
variable.

Ces points ont aussi pour abscisses curvilignes $na + p.2\pi$, p désignant
un entier quelconque. Nous voilà ramenés à une progression arithmétique
à deux raisons.

Lorsque $\frac{a}{2\pi}$ est rationnel, les points considérés sont en nombre fini.
Le problème est celui de l'inscription des polygones réguliers ; il n'y a
pas lieu de s'y attarder.

Lorsque $\frac{a}{2\pi}$ est irrationnel, il suffit de traduire géométriquement un
résultat que nous avons obtenu et de dire : Nous savons extraire de l'en-

semble des points d'abscisses $na + p.2\pi$ une suite infinie de points admettant pour position limite un point arbitrairement choisi sur le cercle.

Ces résultats peuvent être présentés autrement en introduisant les suites dont les termes généraux sont $\sin na$, $\cos na$, $\operatorname{tg} na$.

N'insistons pas sur le cas où $\frac{a}{2\pi}$ est rationnel sauf pour dire que la première et la dernière de ces suites n'admettent alors de limites que si a est multiple de π et leurs termes sont tous nuls. La seconde n'en admet que si a est multiple de 2π et ses termes sont tous égaux à 1.

Lorsque $\frac{a}{2\pi}$ est irrationnel, non seulement ces suites n'admettent pas de limites mais, précisons-le avec la tangente, par exemple, on peut former une suite infinie $\operatorname{tg} n_1 a$, $\operatorname{tg} n_2 a, \dots$ extraite de la suite $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{tg} 2a, \dots$ $\dots \operatorname{tg} na, \dots$ admettant pour limite un nombre L arbitrairement choisi, ou encore, admettant une limite infinie.

On trouvera, sur cette question, des articles de MM. LAPOINTE, MICHEL, MONTEL, dans la *Revue de l'Enseignement des Sciences* (10^e et 11^e années, 1916 et 1917).

V. Rappelons en quelques mots que les points d'abscisses curvilignes en progression arithmétique se rencontrent lorsqu'on cherche les symétriques du point d'abscisse curviligne x par rapport à deux diamètres du cercle que nous fixerons en disant qu'ils passent par les points d'abscisses curvilignes 0 et a . On obtient ainsi les deux suites de symétriques :

$$\begin{array}{ccc} x, & x + 2a, & x + 4a, \dots \\ -x, & -x - 2a, & -x - 4a, \dots \end{array}$$

Les points de la première suite sont symétriques de tous les points de la seconde par rapport aux axes na , n désignant un entier quelconque. D'où la disposition de la rosace finie ou infinie d'axes de symétrie qui se déduit de l'existence des deux premiers axes supposés concourants.

VI. M. LAPOINTE a cherché les cas où $\sin na$ admet une limite, tout simplement en utilisant les formules d'addition des lignes trigonométriques.

Il est bon, en effet, dès que la notion de limite est acquise, de parler aux élèves de telles suites qui les intéressent et de leur faire ainsi toucher du doigt certaines difficultés aussitôt que possible.

On peut, suivant une méthode analogue à celle de M. LAPOINTE, utiliser les deux formules :

$$\begin{array}{l} \sin (n+2)a - \sin na = 2 \sin a \cos (n+1)a. \\ \cos (n+2)a - \cos na = -2 \sin a \sin (n+1)a. \end{array}$$

Mettons à part le cas où $\sin a$ est nul. La première formule montre que, $\sin na$ admettant une limite, $\cos (n+1)a$ ou, plus simplement $\cos na$ tend vers zéro. La seconde montre que $\cos na$ admettant une limite, $\sin (n+1)a$ ou, plus simplement $\sin na$ tend vers zéro. La contradiction est manifeste puisque $\sin na$ et $\cos na$ ne peuvent tendre simultanément vers zéro.

La suite dont le terme général est $\operatorname{tg} na$ s'étudie, à ce point de vue, tout aussi facilement. Il est immédiat d'après ce qui précède que $\operatorname{tg} na$ ne peut admettre de limite infinie car cela exigerait que $\cos na$ tende vers zéro. $\operatorname{tg} na$ ne peut non plus admettre de limite finie (hors le cas où a est multiple de π). La formule :

$$\operatorname{tg}(n+1)a - \operatorname{tg} na = \frac{\sin a}{\cos na \cdot \cos(n+1)a}$$

montre en effet que le premier membre tendant alors vers zéro, le dénominateur du second membre croîtrait donc indéfiniment, ce qui est absurde.

VII. Pour terminer, indiquons que l'étude de $f(na)$, $f(x)$, désignant une fonction continue périodique résulte de ce qui précède.

Rappelons aussi que les développements du paragraphe II conduisent immédiatement aux théorèmes suivants (dans le domaine réel bien entendu).

1° Si une fonction admet deux périodes a et b telles que le rapport $\frac{a}{b}$ soit rationnel, ces deux périodes se réduisent à une seule.

2° Une fonction continue qui admet deux périodes a et b telles que le rapport $\frac{a}{b}$ soit irrationnel reste constante.

TH. LECONTE.