Problèmes de Concours et d'Examens

1. Ecole Normale Supérieure de Sèvres, 1921

Arithmétique et Algèbre. — On considère l'équation :

$$x^3 - 9x - m(x^2 - 1) = 0$$

où m est un paramètre.

1° Montrer qu'elle a trois racines réelles, quel que soit m, en représentant graphiquement les variations de la fonction :

$$y = \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 1}$$

2° Choisir m pour que l'une des racines prenne la valeur a et calculer les deux autres b et c. Exprimer, de toutes les manières possibles, une des racines en fonction d'une autre.

3° Montrer que les points d'un plan qui représentent les nombres complexes :

$$\frac{a + i\sqrt{3}}{a - i\sqrt{3}} \qquad \frac{b + i\sqrt{3}}{b - i\sqrt{3}} \qquad \frac{c + i\sqrt{3}}{c - i\sqrt{3}}$$

sont les sommets d'un triangle équilatéral.

Géométrie. — On considère les couples de cercles orthogonaux admettant pour centres deux points donnés O et O'.

1° Construire les cercles d'un même couple connaissant leur axe radical, ou la longueur d'une tangente commune limitée aux deux points de contact.

2° Soit A un des points communs aux deux cercles d'un couple quelconque et S un de leurs centres d'homothétie. La droite SA les coupe de nouveau aux deux points P et P'. On mène en P la tangente au cercle qui passe par ce point, de même en P' ; ces deux tangentes se coupent en M. Montrer que les points P, M, P', sont trois des sommets d'un carré dont le centre est l'un ou l'autre des deux points fixes H et K. Trouver le lieu des sommets de ce carré.

3° Appelons α l'angle aigu de l'une des tangentes communes (T) aux cercles d'un couple quelconque avec la ligne des centres OO' et $\frac{\pi}{4}+\beta$ l'un des angles aigus du triangle OAO'.

Prouver la relation : $\sin\alpha = \sqrt{2}\,.\,\sin\beta$.

Trouver le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du point H (ou du point K) sur la droite (T).

2. Baccalauréat 2e Partie-Mathématiques, juillet 1921

Aix-Marseille : On considère une demi-circonférence de diamètre AB, de centre O, de rayon R, et la tangente à l'extrémité B du diamètre.

D'un point M pris sur la circonférence on abaisse la perpendiculaire MP sur la tangente au point B, soit x la longueur MP.

D'autre part, on joint le point M au point A et l'on appelle y la longueur de la ligne brisée AMP.

On demande :

1° De déterminer la position du point M pour laquelle y est égal à une longueur donnée a ;

2° D'étudier la variation de y en fonction de x, lorsque le point M décrit la demi-circonférence ;

3° De construire les positions du point M et de MP pour lesquels on a MP = MA.

Alger : On donne dans un plan deux tiges égales (OA = AB = l) articulées en A. La première tourne autour du point fixe O avec une vitesse angulaire constante ω. L'extrémité B de la seconde glisse sur un axe fixe Ox.

1° Etudier le mouvement du point B.

2° Etudier le mouvement du point M milieu de AB (trajectoire, vitesse, accélération). Déterminer l'hodographe et montrer que l'accélération passe par un point fixe.

3° OA est la manivelle d'un treuil ; le rayon de l'arbre est r et l'axe est perpendiculaire en O au plan xOy. Le câble du treuil supporte un poids P. Au point B est appliquée une force F dirigée suivant Ox. Déterminer dans la position d'équilibre l'angle AOB = θ et calculer la pression du point B sur la droite Ox. On négligera le frottement.

Besançon : On considère une ellipse définie par ses deux axes $2a$, $2b$. Par les foyers F, F', on mène des rayons vecteurs parallèles FM, F'M', faisant avec le grand axe AA' l'angle α tel que $\sin\alpha = x$; on mène la corde MM' et on forme le trapèze FF'M'M.

Cela posé, on demande : 1° d'exprimer la surface de ce trapèze en fonction de x et des éléments de l'ellipse ; 2° d'étudier la variation de la surface du trapèze ; discuter en examinant successivement les valeurs respectives des éléments de l'ellipse. Application numérique avec :

$$a = \sqrt{3}\,.\,16 \text{ m.} \; ; \; b = \frac{24 \text{ m.}}{\sqrt{3}}$$

(*La figure montre* FM *et* F'M' *parallèles et de* même sens).

Bordeaux : Un rectangle ABCD de dimensions $2a$ et $2b$ et de poids P peut se déplacer dans un plan vertical. Il est retenu par un fil OM de longueur l attaché au point fixe O, et le sommet A glisse sans frottement le long d'un mur vertical OZ. Le centre de gravité G est au centre du rectangle et M est le milieu de AB.

1° Déterminer la position d'équilibre et calculer la tension du fil.

2° Le fil OM restant tendu, on déplace le rectangle en faisant glisser A sur OZ. Etudier la variation de GH, distance de G au plan horizontal passant par O. Vérifier que la position d'équilibre corrrespond au maximum de cette distance.

Nota. — On sait que la tension du fil est dirigée suivant le fil. — On pourra prendre pour variable l'angle AOM.

(*Sur la figure* OA *est plus grand que* OM).

Caen : Sachant que l'un des foyers d'une ellipse est un point donné F, que l'une des extrémités de son petit axe est un point donné B, et que la courbe est tangente à une droite donnée TT', construire son deuxième foyer. Discussion.

Clermont : On considère un triangle ABC dans lequel $\hat{A} = 2\hat{B}$.

1° Calculer tous ses éléments en fonction de b et de $\hat{B}$.

2° Vérifier qu'on a l'identité : $a^2 = b(b+c)$ dont on donnera ensuite une démonstration géométrique.

3° Résoudre et construire le triangle connaissant a et c.

4° On pose : $\dfrac{2b - a}{2b + a} = x^2$ et $a + b + c = 2p$. Calculer, en fonction de x et de p : tang $\dfrac{B}{2}$, a, b, c, la surface du triangle et ses trois hauteurs. Le périmètre étant donné, entre quelles limites peut-on faire varier x sans que le triangle cesse d'exister ? Etudier les variations de la hauteur issue du sommet B.

Dijon : Dans un plan vertical, on considère :

a) 2 tiges OP, OQ, de masses négligeables, soudées en O, faisant entre elles un angle $\theta > \dfrac{\pi}{2}$, et reposant sans frottement par le point O sur une horizontale XY ;

b) Une plaque triangulaire homogène pesante ABC dont les sommets A et B peuvent se déplacer sans frottement respectivement sur OP et OQ.

I. Indiquer quelles sont les forces qui agissent :

1° Sur le système POQ ;

2° Sur la plaque ABC.

II. Quelle est la condition d'équilibre de POQ ? — En déduire que les conditions d'équilibre de la plaque se réduisent à ce que les forces agissant sur elle admettant une résultante verticale passant par O.

III. Montrer qu'en général l'équilibre n'est possible que pour une position particulière de POQ. Examiner le cas d'exception.

N. B. — On suppose que OP et OQ sont plus grands que AB

(*Une figure montre* POQ *au-dessus de* XY, *et* C *au-dessus de* AB).

Grenoble : Soit une ellipse d'axes $OA = a$, $OB = b$, et son cercle principal. D'un point C, situé sur le grand axe OA, on mène une tangente CD à l'ellipse et une tangente CD' au cercle ; soient x et x' les angles que font respectivement ces deux droites avec OC. On demande :

1° Trouver la relation qui lie $\operatorname{tg} x$ et $\operatorname{tg} x'$.

2° Calculer l'aire du triangle OCD', en fonction de a et x', et l'aire du triangle OCD, en fonction de a, b et x.

3° Etudier la variation de l'aire OCD lorsque x varie. Minimum de cet aire et construction géométrique de la tangente CD dans ce cas.

4° Résoudre, lorsque l'aire du triangle OCD est minimum, le triangle MFF', F et F' étant les foyers de l'ellipse.

(*Une figure montre que* D *et* D' *sont sur le petit axe de l'ellipse, et que* M *est le point de contact de la tangente à l'ellipse*).

Lille : On considère une ellipse dont le grand axe AA' a pour longueur $2a$, et dont l'excentricité $\left(= \frac{\text{distance focale}}{\text{grand axe}}\right)$ a pour valeur $\frac{1}{2}$. Dans une moitié de cette ellipse, limitée par le grand axe, inscrire un trapèze isocèle convexe AMM'A' de périmètre donné $2p$: on pourra prendre comme inconnue la distance x des points M et M' au petit axe de l'ellipse. Discuter selon la valeur du rapport $\frac{p}{a}$. Calculer avec deux chiffres décimaux exacts la valeur du maximum du rapport $\frac{p}{a}$ et la valeur du rapport $\frac{a-x}{x}$ correspondant.

Lyon : On considère une droite (D) et un point F. Si on joint le point F à un point quelconque B de (D) et qu'en B on mène une droite perpendiculaire à BF, une telle droite s'appellera *droite* Δ. Quand B varie sur la droite (D), on a ainsi une infinité de droites Δ.

1° On se donne un point P du plan. Construire les droites Δ qui passent par ce point P.

2° Quel est le lieu des points P tels que les droites Δ qui passent par le point P soient perpendiculaires l'une sur l'autre.

3° Quel est le lieu des points P tels que les droites Δ qui passent par chacun de ces points P coïncident.

4° Montrer que trois droites Δ quelconques forment un triangle dont les sommets sont avec le point F sur une même circonférence.

5° FA est la perpendiculaire abaissée de F sur la droite (D), A, le pied de cette perpendiculaire. Soit $\overline{AF} = \frac{a}{4}$; O est un point de la droite AF, à gauche de A, et $\overline{OA} = a$. On donne un cercle de centre O et de rayon R. Trouver les droites tangentes au cercle. On prendra comme inconnue $z = AB$; discuter.

(*Une figure confirme que* F *est à droite de* A).

Montpellier : La Terre et la planète Vénus sont supposées décrire des cercles dans le même plan, suivant les lois de Képler. On considérera un cercle comme une ellipse ayant ses axes égaux et ses foyers confondus avec le centre. La distance de la Terre au Soleil, centre commun des deux cercles, étant égale à 1, celle de Vénus au Soleil est égale à 0,723. La durée de la révolution de la Terre est de 365 jours.

1° Calculer la durée de la révolution de Vénus.

2° A la date du 1er janvier 1921, la Terre et Vénus sont en conjonction (c'est-à-dire en ligne droite avec le Soleil et du même côté). Calculer la date de la conjonction suivante.

3° Etudier, en fonction du temps, la variation de la distance de Vénus à la Terre.

Nancy : On donne un cercle C, de rayon R, et une droite D sur laquelle on fixe un sens positif Ox.

Soit AB le diamètre du cercle C qui fait un angle $\frac{\pi}{4}$ avec Ox, a, b, les distances AA', BB' de A, B à la droite D.

On considère un point variable M de la circonférence. Les droites MA, MB coupent Ox en α, β.

On désignera par u, v les angles dont il faut faire tourner Ox dans le sens trigonométrique, pour l'appliquer sur AM, BM.

1° Evaluer la valeur algébrique des vecteurs $\alpha A'$, $\beta B'$ en fonction de u, v.

2° Etudier la variation de la valeur algébrique du vecteur $\alpha\beta$ en prenant pour variable $\operatorname{tg} u = t$, quand M décrit la circonférence. Construire la courbe représentative de cette variation.

3° Trouver pour quelles valeurs de u on a $\alpha\beta = 2.\sqrt{2}$ avec les données numériques $R = 1$, $a = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$, $b = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$

(*Une figure montre la droite* D *extérieure au cercle, et le point* O *coïncidant avec la projection du centre* C *du cercle sur la droite* D).

Paris : On considère un triangle isocèle ABC dans lequel les côtés AB et AC sont égaux.

1° On donne le rayon R du cercle circonscrit ; exprimer le demi-périmètre p en fonction de l'angle A et étudier les variations de p lorsque A varie. Construire la courbe représentative en supposant $R = 1$ cm.

2° Dans le triangle isocèle ABC on donne le rayon R du cercle circonscrit et le rayon r du cercle inscrit ; former l'équation du second degré qui détermine $\sin \frac{A}{2}$. Discuter. Indiquer comment l'on pourrait calculer les angles et les côtés du triangle.

3° Dans un triangle isocèle correspondant à des valeurs données de R et de r, l'angle A peut-il être droit ? peut-il être obtus ?

Poitiers : On donne une sphère de centre O et de rayon r, et l'on prend un point S à la distance x du centre ($x \geq r$) ; la surface conique de sommet S qui a pour directrice le grand cercle C de la sphère dont le plan est perpendiculaire à OS, coupe la surface de la sphère suivant le cercle C et un second cercle C'.

1° Calculer le volume V du tronc de cône limité par ces deux cercles et par la surface conique précédente.

2° En supposant x variable, reconnaître si, pour $x = r\sqrt{5}$, le volume V est croissant ou décroissant.

3° Calculer r à 1/10 près de sa valeur en supposant $x = r\sqrt{5}$ et $V = 0{,}735$ m³.

Rennes : Sur le diamètre A'OA d'un cercle de centre O et de rayon R, on prend un point I. Par ce point on mène une corde MIM' perpendiculaire au diamètre considéré. On joint OM, OM' et l'on construit les tangentes au cercle en M et M'. Ces tangentes se coupent en P sur le diamètre AOA' prolongé. Posant $OI = x$, on demande :

1° De calculer les longueurs IM, OP, MP.

2° De trouver les surfaces des triangles MOM' et MPM' et les volumes des deux cônes engendrés par ces triangles tournant autour de OP.

3° De déterminer x de telle façon que le volume du cône engendré par la révolution de MOM' soit un maximum.

Toulouse : Soient un cercle C de centre O (de rayon donné R) et un point P extérieur par lequel on mène une transversale coupant le cercle en A et B. Soit le cône de sommet O, ayant AB pour diamètre de base. On considère, pour ce cône, la différence entre l'aire latérale et l'aire de la base.

Maximum de cette différence ?

Comment prouver intuitivement, sans calcul, que ce maximum existe ?

Construction géométrique précise, sur une figure définie d'abord par C et P, du triangle AOB correspondant au maximum en question.

Strasbourg : On considère une circonférence variable (C) tangente en un point donné O, à une droite donnée D. On prend sur la droite D deux points fixes P et P'. Soient PM et P'M' les tangentes autres que D, menées de P et de P' à la circonférence (C) ; M. et M' en sont les points de contact.

1° Lieu du point de rencontre N des droites PM et P'M'. On distinguera deux cas suivant que P et P' sont d'un même côté de O ou de part et d'autre de O.

2° Montrer que la droite MM' passe par un point fixe que l'on déterminera.

3° On suppose les points P et P' pris de part et d'autre de O, à des distances $OP = a$ et $OP' = b$. Soit x le rayon du cercle (C). Evaluer en fonction de x les distances PN et P'N' et les rayons du cercle inscrit et des cercles exinscrits au triangle PNP'.

Le Gérant : A. COUESLANT.

CAHORS, IMPRIMERIE COUESLANT *(personnel intéressé).* — 25.034