Deuxième partie

Prière d'adresser au Secrétaire, M. Delcourt, 17, rue Louis-Braille, Paris, 12^{e} toute communication relative à la rédaction de la deuxième partie du *Bulletin*.

En particulier il sera reconnaissant aux membres de l'Association qui voudront bien lui envoyer, dès leur apparition, les énoncés de problèmes d'examens ou de concours qu'ils sont à même de se procurer, ou lui signaler les articles de pédagogie ou d'enseignement mathématiques publiés par les Revues françaises ou étrangères dont ils peuvent avoir connaissance.

Sur le cercle, limite de polygones circonscrits

Dans bien des questions où le cercle est envisagé comme limite d'un polygone, il y a souvent avantage à considérer le polygone circonscrit au lieu du polygone inscrit. Ainsi – un exemple parmi bien d'autres suffisant – pour obtenir la surface latérale du cône circulaire droit, on peut la déduire de celle d'une pyramide circonscrite : les faces latérales de celle-ci ayant toutes pour hauteur l'arête du cône, la surface latérale est mesurée par un produit de deux facteurs dont un seul est variable, tandis que pour une pyramide inscrite les deux facteurs sont variables.

Ch. Bioche.

Sur le premier enseignement de la géométrie (fin)

L'énoncé préalable du théorème de Pythagore n'en facilite nullement la démonstration ; l'observation de la similitude des trois triangles déduits d'un triangle rectangle donné, par la simple construction de la hauteur, y conduit sans effort.

On peut en dire autant des relations métriques dans un triangle quelconque ; l'énoncé des théorèmes, avec distinction à priori de l'angle aigu et de l'angle obtus ne sert à rien. L'idée naturelle est la suivante : les trois côtés d'un triangle étant donnés, on peut construire ce triangle et par suite toutes les longueurs des éléments qui s'en déduisent à l'aide de la règle et du compas. Les mesures de ces éléments à l'échelle étant possibles, on est conduit à voir si des calculs ne permettent pas de les obtenir, en supposant connues les mesures exactes des côtés. La décomposition d'un triangle quelconque en triangles rectangles constituants est aussi une idée simple, utilisée d'ailleurs dans la pratique. La construction d'une hauteur d'un triangle fournit deux triangles rectangles dont l'addition ou la soustraction reproduit le triangle donné. La recherche des segments déterminés par cette hauteur, sur la base correspondante, est un problème naturel, dont la solution s'obtient rapidement, à l'aide du théorème de Pythagore et des seules ressources du calcul arithmétique. La distinction des deux cas classiques est imposée par le problème même et rien n'empêche d'énoncer les théorèmes habituels comme des conséquences immédiates du calcul effectué.

La démonstration des propriétés métriques des sécantes à un cercle, menées d'un point, peut faire place à une recherche du même genre : il suffit de remarquer que trois points déterminent un cercle pour y être conduit tout naturellement.

Mais c'est surtout dans l'application des méthodes de transformation que cette observation s'impose. À toute propriété connue d'une figure correspond une propriété connue ou inconnue de la figure qui s'en déduit par une inversion ; au cas où la seconde propriété est connue, des exemples classiques montrent que l'énoncé préalable est loin d'en faciliter la recherche. On sait que trois points alignés dans l'ordre A, B, C conduisent à la relation $AC = AB + BC$, et que l'axe d'un segment est le lieu des points équidistants de ses extrémités : l'application de l'inversion à ces deux propriétés conduit sans effort au théorème de Ptolémée et au lieu des points dont le rapport des distances à deux points donnés a une valeur constante.

On pourrait multiplier ces exemples. L'algèbre et la trigonométrie en fourniraient de fort intéressants.

Le désir d'abréger la route qui va des hypothèses à la conclusion énoncée, conduit aussi trop souvent à l'emploi d'éléments auxiliaires dont l'introduction n'est justifiée que par les conséquences. La comparaison des angles ou des longueurs d'une figure s'effectue fréquemment au prix d'intermédiaires qui ne s'imposent nullement à l'esprit.

On vérifie, par exemple, que la somme des angles d'un triangle ABC vaut deux droits ; dans une démonstration fréquemment employée, on commence par prolonger BC, puis on mène CD parallèlement à BA et de même sens, etc. N'est-il pas à craindre que l'admiration d'un débutant pour celui qui a eu l'idée de mener ces deux demi-droites à priori ne soit bientôt remplacée par un sentiment d'impuissance à renouveler un pareil exploit ? Pourquoi ne pas se borner à chercher la somme des angles d'un triangle ? On commence par remarquer que l'addition d'angles dispersés sur un plan s'effectue en les plaçant à côté les uns des autres – c'est ainsi que les angles adjacents s'imposent à nous. Il est inutile de déplacer les trois angles du triangle : laissons l'angle A en place et mettons l'angle B à côté, en conservant à chacun un côté porté par AB, ce qui est naturel ; soit Ax le côté libre de l'angle B ainsi déplacé. L'observation de la figure – une règle absolue, en géométrie comme en algèbre, exige que toute opération soit suivie immédiatement d'un examen de la configuration nouvelle – montre que Ax et CB sont parallèles et de même sens, en vertu de propriétés connues. Ce procédé ayant fourni la somme des angles A et B, il y a lieu d'en répéter l'emploi et de placer l'angle C à côté de l'angle A, en conservant à chacun un côté suivant AC ; le côté libre Ay, de l'angle C ainsi transporté est parallèle à BC et a méme sens. Ici se place l'inventaire des constructions effectuées : les deux demi-droites Ax et Ay menées parallèlement à BC, en sens inverse l'une de l'autre, sont en prolongement d'après le postulatum d'Euclide. La conclusion arrive de suite et on voit nettement comment *elle est conditionnées.*

La recherche de la somme des angles extérieurs d'un polygone convexe s'effectue tout aussi aisément. L'expérience tentée maintes fois, comme la précédente, intéresse toujours les élèves ; elle est d'ailleurs bien connue.

Étant donnés un demi-cercle et un point situé sur le diamètre, la comparaison des distances de ce point à deux autres, placés sur le demi-cercle, conduit à mener l'axe du segment limité aux deux derniers points ; l'observation de la figure montre de suite quelle est la plus grande des distances envisagées : la notion de distance d'un point à un cercle eu découle sans effort.

L'énoncé de la propriété des segments déterminés sur la base d'un triangle, par une bissectrice de l'angle opposé, est souvent suivi de constructions artificielles. La recherche des points qui partagent la base en segments proportionnels aux côtés adjacents est au contraire un problème naturel, dont la solution s'obtient sans difficulté.

Le théorème relatif aux segments proportionnels, découpés sur deux droites par trois plans parallèles, se démontre habituellement soit en menant, par le point de rencontre d'un plan et d'une droite, une parallèle à l'autre droite, soit en utilisant la droite qui joint le point de rencontre de l'une des droites et de l'un des plans donnés au point où l'autre droite rencontre un autre plan. Ne vaudrait-il pas mieux partir de la proposition correspondante du plan ? On sait que trois droites parallèles D, D', D'', situées dans un plan P, découpent, sur deux droites Δ, Δ' de ce plan, des segments proportionnels. Or on peut regarder D, D', D''. comme les intersections de P et de trois plans parallèles. Si Δ et Δ' ne sont plus dans un plan, il suffit d'envisager une droite auxiliaire, qui les rencontre toutes deux, pour étendre à l'espace la proposition du plan.

Ces exemples pris un peu au hasard montrent qu'il est parfaitement possible de substituer un problème à une démonstration ; mais il ne convient de le faire que si le problème vient se placer de lui-même dans une trame logique, comme conséquence d'une observation. Les définitions même ne devraient s'introduire qu'à l'instant où le besoin s'en fait sentir.

Un enseignement où la préoccupation de découvrir serait mise au premier plan aurait une portée incalculable. Le passage constant du connu à l'inconnu stimulerait la curiosité des élèves. Quelle ne serait pas leur confiance en une méthode qui les conduirait sans arrêt à des propositions nouvelles, qui leur donnerait l'illusion de la création ! Quels progrès ne pourrait-on espérer dans leur aptitude à traiter les problèmes de géométrie, et surtout quel intérêt n'y a-t-il pas, au point de vue de la culture générale, à faire de l'enseignement géométrique un exercice perpétuel de l'esprit d'observation !

Mais des objections d'ordre pratique se présentent immédiatement à l'esprit. Les classes nombreuses rendent difficile l'emploi permanent de la méthode socratique. On peut craindre que l'élève s'égare dans des chemins de traverse, si on n'a pas soin de lui montrer nettement le but. Les nécessités des examens obligeront longtemps encore à présenter aux élèves des démonstrations que leur mémoire leur fournira aisément au jour de l'épreuve. Parmi les problèmes de toutes sortes, que pose la géométrie, n'en est-il pas dont 1a solution soit grandement facilitée par la simple prévision des résultats. Enfin, un enseignement ainsi conçu exigerait plus de temps que nous n'en avons à notre disposition.

La réponse est aisée. La méthode préconisée portera plus de fruits si la classe participe directement à l'élaboration, mais cette condition n'est pas indispensable. Au cas où elle serait réalisée, le maître peut toujours, si cela devient nécessaire, diriger le choix des élèves en les orientant vers le but visé et provisoirement invisible ; c'est à lui de trouver les raisons qui motivent ce choix. Rien n'empêche, lorsque la découverte a fait son œuvre et que les résultats en sont consignés dans une formule définitive, de reprendre les arguments utilisés et de constituer une démonstration d'autant plus facile à suivre que le travail d'approche aura été mieux fait ; la synthèse s'opérera sans réelle difficulté. C'est cette démonstration qui fera l'objet de l'interrogation et servira au contrôle du travail de l'élève.

Ce procédé est parfaitement compatible avec l'emploi d'un livre très simple, qui fixerait l'effort demandé à la mémoire. Il est vrai que, dans ce cas, le professeur devrait s'astreindre à suivre l'ordre du livre ; que lui importe, pourvu que cet ordre soit logique ! La part du maître, qui consiste à préparer la voie, reste encore assez belle ; les plus exigeants, parmi ceux qui éprouvent le besoin de penser par eux-mêmes – et on ne saurait trop les en féliciter – trouveront largement à se satisfaire. La mise en pratique de cette méthode sera poux eux une source d'observations et de réflexions ; certains trouveront parfois un aspect nouveau aux objets qui leur paraissaient les plus familiers : ils ne seront plus surpris des résistances rencontrées dans le passé.

Rien n'empêche non plus ceux qui se sont aidés de la prévision des résultats, pour arriver à la solution d'un problème, de continuer à prévoir ; la prévision s'appuie sur l'observation. Mais qu'ils ne se fassent pas trop d'illusions à ce sujet, car deviner et trouver sont deux choses fort différentes. Sans doute, soupçonner qu'un lieu géométrique de points est une droite ou un cercle conduit à des essais de démonstration qui peuvent aboutir. Mais, il faut bien se l'avouer, un tel soupçon ne vient guère armer celui qui n'est pas convaincu que l'auteur de la question n'a pu viser au-delà de la droite ou du cercle. L'aide reçue, dans ces conditions, est secourable au candidat à un examen ; elle est sans importance pour un chercheur désintéressé. En réalité, à partir du moment où l'on a des raisons logiques de penser qu'un lieu est une droite ou un cercle, la démonstration est bien près du terme.

Quant à l'argument tiré du temps, on l'a jugé tellement important que le titre même de cet article répond à l'objection. Les débuts de l'enseignement géométrique sont régis par des programmes qui ne sont que des têtes de chapitres. Chaque année, le maître doit exposer les points essentiels, pour préparer les élèves à entrer dans la classe suivante. Il est juge des développements à donner à chaque question, suivant 1e niveau moyen de la classe. L'essentiel n'est pas de former quelques élèves brillants, mais de réduire au minimum le nombre des traînards. Il ne faut pas surtout que le professeur arrive seul au bout de son programme. C'est à lui de régler son action et à subordonner la quantité de faits étudiés à la portée de son enseignement ; il peut donc employer les moyens les plus propres à en assurer la pénétration.

Sans doute, la méthode de découverte offre encore un grand intérêt pour des élèves déjà formés au raisonnement mathématique et on doit continuer à l'employer, aussi souvent que possible, dans les hautes classes : mais on peut alors opérer beaucoup plus vite et on est obligé de tenir compte des exigences des examens.

Une dernière remarque à l'adresse des professeurs qui me liront : je désire qu'ils trouvent ici, non les instructions d'un chef qui impose ses conceptions, mais les conseils d'un homme qui ne vise que le bien de l'enseignement, qui a beaucoup observé – souvent en silence, toujours sans parti pris – et qui veut faire partager à ses anciens collègues le bénéfice de l'expérience acquise en leur compagnie.

E. BLUTEL,
Membre honoraire de l'Association des Professeurs de Mathématiques.

PROBLÈMES DE CONCOURS ET D'EXAMENS

Institut national Agronomique 1920. – On donne une demi-conférence de diamètre AB et de centre O, ainsi que sa tangente AC en A. Un point M décrit cette demi-conférence, et sa position est définie par l'angle MAB, égal à a.

Sur AM, on prend à partir du point M et dans le sens MA une longueur MP égale à une longueur donné l, et on projette orthogonalement le point P en H sur AB, en K sur AC. Étudier le mouvement des 2 points H et K.

D'autre part, on prend le point de rencontre P' du rayonOM et de la perpendiculaire à AM en A, et on le projette de même en H' sur AB, en K' sur AC. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles H' vient se confondre avec H, ou bien K' avec K.

Bacc. 1$^{\text{re}}$ CD. - *Paris, Juillet 1920* : Un rectangle $OAMB$ a deux de ses côtés OA et OB sur les côtés fixes d'un angle droit xOy. Le rectangle se déforme de manière que la diagonale OM conserve une longueur constante d. On construit le carré $MACD$ extérieur au rectangle.

1. Calculer en fonction de d et de l'angle $AOM = x$ l'aire du rectangle $OCDB$ et déterminer x pour que cette aire ait une valeur donnée md^2. Discuter.