Enveloppe d’une famille de courbes

Alain Satabin(*)

Ce texte d’Alain Satabin revisite de deux manières et à travers des exemples richement illustrés, la notion d’enveloppe d’une famille de courbes du plan. Une belle occasion de se replonger dans la géométrie et de découvrir ou redécouvrir les noms, équations et représentations de jolies courbes paramétrées.

1. De quoi s’agit-il ?

1.1. Définissons la chose

Considérons dans le plan une famille $\mathscr{F}$ de courbes. Lorsqu’elles sont toutes tracées, on remarque bien souvent qu’elles ne remplissent pas la totalité du plan et qu’il existe une courbe E tangente en tout point une des courbes de *F*.

$\mathscr{E}$ est appelée l’enveloppe de la famille $\mathscr{F}$.

1.2. Un exemple purement graphique

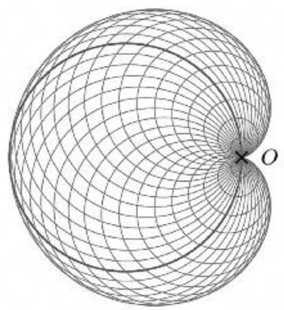
Considérons un point fixe O et un cercle Γ (en gras) passant par O.

$\mathscr{F}$ (en gris) est la famille de cercles définie par

$\mathscr{F}$ = {cercles de diamètre $[OM]$; $M \in \Gamma$}

Tout logiciel de tracé mathématique qui se respecte donnera le tracé ci-contre.

L’enveloppe $\mathscr{E}$ de $\mathscr{F}$ nous fait fortement penser à une cardioïde.



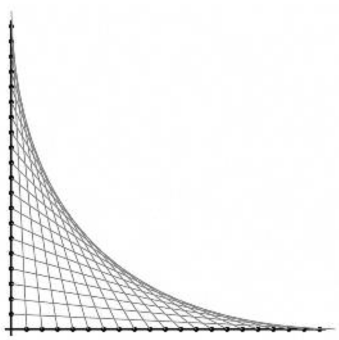
1.3. Le cas des droites

Très souvent, l’ensemble $\mathscr{F}$ est une famille de droites.

La figure obtenue est alors comparable à un tableau de fils tendus entre des clous enfoncés dans une planche à dessin.

Le cas le plus classique est celui de fils tendus entre des clous régulièrement espacés sur deux droites perpendiculaires.

L’enveloppe $\mathscr{E}$ est bien visible... mais difficile à identifier précisément ! Arc de cercle ? Parabole ? Hyperbole ? Autre ?



(*) Professeur retraité du lycée de Lunéville

2. Un traitement mathématique

2.1. Une représentation de $\mathscr{F}$

A priori, $\mathscr{F}$ est un ensemble de courbes planes du plan $\mathscr{P} = (O,x,y)$: $\mathscr{F} = \{C_t ; t \in I\}$

où I est un intervalle réel et, pour chaque valeur de $t \in I$, C_t est une courbe plane.
Une équation implicite permet de résumer la situation :

$$\mathscr{F} = \{M(x;y) \in \mathscr{P}; \exists\, t \in I, f(x;y;t) = 0\}.$$

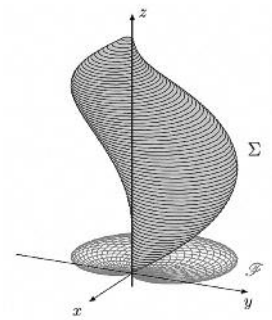
Cela remplit une partie du plan et l'enveloppe est en quelque sorte la frontière de cette partie « noircie » par les points de $\mathscr{F}$.
Si on reprend l'exemple du §[1.2] avec Γ le cercle de centre $(-1;0)$ et de rayon 1, M_t le point d'affixe $(-1+e^{it})$ et $I = [0;2\pi]$, l'écriture de l'équation cartésienne du cercle C_t de diamètre $[OM_t]$ donne $f(x,y,t) = x^2 - (cos(t) - 1)x + y^2 - sin(t)y$.

2.2. Une autre façon de voir

Si on considère dans l'espace la nappe définie par $\Sigma = \{(x,y,t) ; t \in I ; f(x,y,t) = 0\}$,

il est clair que $\mathscr{F}$ est la projection sur le plan de base $\mathscr{P}$ de Σ ... un peu comme son ombre obtenue par un éclairage vertical.
On dit aussi que $\mathscr{F}$ est le *contour apparent projeté suivant Oz* de Σ, l'œil étant placé à l'infini.
La figure ci-contre a été obtenue à partir de l'exemple du §[1.2].
Dans le plan ($z = t$) on trace le cercle de centre

$\left(\dfrac{cos(t)-1}{2} ; \dfrac{sin(t)}{2} ; t\right)$ et de rayon $\left|sin\left(\dfrac{t}{2}\right)\right|$.



2.3. La méthode

Les points de la nappe Σ situés sur le contour apparent suivant (Oz) sont ceux où le plan tangent Σ est « vertical », c'est-à-dire contient la direction (Oz).
Le plan tangent Σ en (x,y,t) ayant pour vecteur normal

$\left(\dfrac{\mathcal{D}f}{\mathcal{D}x}(x,y,t), \dfrac{\mathcal{D}f}{\mathcal{D}y}(x,y,t), \dfrac{\mathcal{D}f}{\mathcal{D}t}(x,y,t)\right)$, le point conviendra si et seulement si

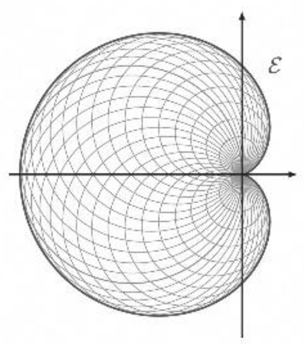
$\dfrac{\mathcal{D}f}{\mathcal{D}t}(x,y,t) = 0.$

L'enveloppe $\mathscr{E}$ de $\mathscr{F}$ étant la projection dans le plan de base de ces points, on en déduit que pour obtenir l'équation cartésienne de l'enveloppe il suffit d'éliminer le paramètre

t dans le système d'équations $\begin{cases} f(x,y,t) = 0 \\ \dfrac{\mathcal{D}f}{\mathcal{D}t}(x,y,t) = 0 \end{cases}$.

On peut aussi exprimer x et y en fonction de t pour obtenir une équation paramétrique de l'enveloppe. L'exemple du §[1.2] nous conduit ainsi à résoudre le système $\begin{cases} x^2 - (cos(t) - 1)x + y^2 - sin(t)\,y = 0 \\ sin(t)\,x - cos(t)\,y = 0 \end{cases}$

Cela donne $\begin{cases} (cos(t)\,x + sin(t)\,y = x^2 + y^2 + x \\ -sin(t)\,x + cos(t)\,y = 0 \end{cases}$



En sommant les carrés de ces deux équations, le paramètre t s'élimine.

En paramétrant ensuite en polaire $\begin{cases} x = \rho\,cos(\theta) \\ x = \rho\,sin(\theta) \end{cases}$

on obtient $\rho = 1 - \cos(\theta)$, ce qui est bien l'équation d'une *cardioïde*.

3. Quelques exemples d'enveloppes de droites

Passons ici en revue une série de classiques dans lesquels $\mathcal{F}$ est une famille de droites.

3.1. Le tableau de fils du §[1.3]

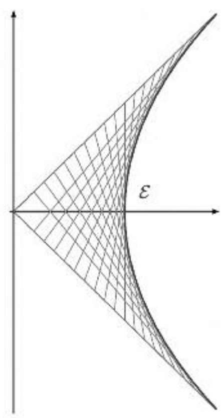
Afin de faciliter les calculs par la suite, nous allons planter les clous du tableau de fil sur les droites $(y = x)$ et $(y = -x)$, qui sont bien perpendiculaires et donc ne changent rien au problème. De plus, nous supposerons que le dernier clou est planté à l'abscisse 10 alors que le plus proche de l'intersection est à l'abscisse 1. Les autres étant régulièrement espacés entre ces deux-là.

La famille $\mathcal{F}$ est composée des droites reliant le point (t,t) au point $(11-t\,,t-11)$ pour t variant de 1 à 10.

Ainsi $\mathcal{F} = \{D_t : 11x + (11-2t)\,y = 2t(11-t) ; t \in [1,10]\}$

et $f(x,y,t) = 11x + (11-2t)\,y - 2t(11-t)$.

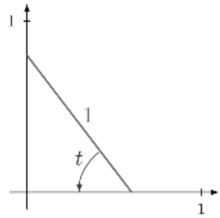
La recherche de l'enveloppe conduit donc au système $\begin{cases} 11x + (11-2t)\,y = 2t(11-t) \\ -2y = 2(11-2t) \end{cases}$.



La seconde équation nous donne aisément t en fonction de y et en reportant dans la première on obtient
$\mathcal{E} : y^2 = 22\,x - 121$

ce qui est une portion de *parabole* de sommet $\left(\frac{11}{2},0\right)$, de directrice (Oy) et de foyer $(11,0)$.

3.2. L'échelle qui glisse



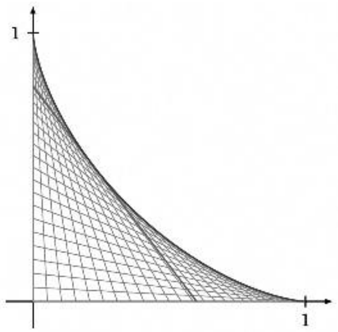
Quelle est la courbe enveloppée par une échelle glissant le long d'un mur tandis que son pied glisse sur le sol en s'éloignant du mur ?

Cela revient considérer tous les segments de longueur donnée dont une extrémité est sur le demi-axe des abscisses positives et l'autre sur celui des ordonnées positives.

Sans restreindre le problème, considérons que l'échelle est de longueur 1 et prenons pour paramètre t l'angle qu'elle fait avec le sol, variant dans $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Ce paramétrage nous donne $\mathscr{F}=\left\{\mathcal{D}_t : sin(t)x+cos(t)y=cos(t)sin(t);t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\right\}$

et les coordonnées des points de l'enveloppe doivent satisfaire au système



$$\begin{cases} sin(t)x+cos(t)y=cos(t)sin(t) \\ cos(t)x-sin(t)y=cos^2(t)-sin^2(t) \end{cases}$$

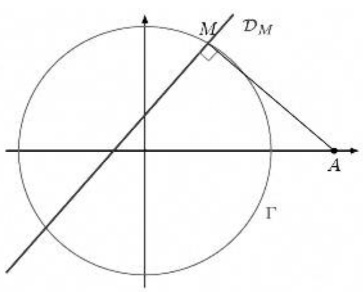
La résolution paramétrée en t conduit à

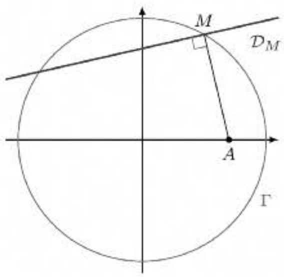
$$\begin{cases} x=cos3(t) \\ y=sin^3(t) \end{cases} \quad t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

ce qui est un quart d'*astroïde*.

3.3. Enveloppe orthogonale d'un cercle

Nous considérons ici un cercle Γ, un point A ne lui appartenant pas et prenons la famille de droites $\mathscr{F}=\left\{D_M ; M\in D_M ; D_M\perp(AM) ; M \text{ décrivant } \Gamma\right\}$





Prenons pour Γ le cercle de centre O et rayon 1, et pour A le point d'affixe a réel positif. Le point M décrivant Γ a pour affixe e^{it} avec t parcourant l'intervalle $[0,2\pi]$. La droite D_M a alors pour équation $\left(a-cos\left(t\right)\right)\left(x-cos\left(t\right)\right)-sin\left(t\right)\left(y-sin\left(t\right)\right)=0$

Cela mène au système suivant pour les coordonnées de points de l'enveloppe :

$$\begin{cases}\left(a-cos\left(t\right)\right)x-sin\left(t\right)y-a\,cos\left(t\right)+1=0\\ sin\left(t\right)x-cos\left(t\right)y+a\,sin\left(t\right)=0\end{cases}$$

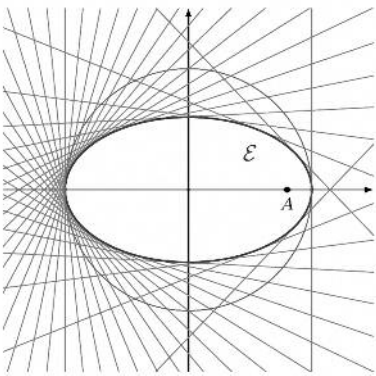
ce qui peut aussi s'écrire en un système en $(\cos(t),\sin(t))$:

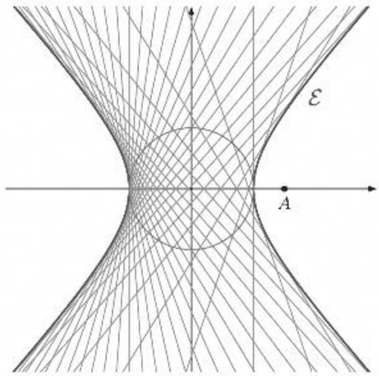
$$\begin{cases}cos\left(t\right)\left(a+x\right)+sin\left(t\right)y=ax+1\\ cos\left(t\right)y-sin\left(t\right)\left(a+x\right)=0\end{cases}$$

qui nous donne : $\begin{cases}cos(t)=\dfrac{\left(ax+1\right)\left(a+x\right)}{\left(a+x\right)^2+y^2}\\ sin(t)=\dfrac{\left(a+x\right)y}{\left(a+x\right)^2+y^2}\end{cases}$

et t s'élimine en sommant les carrés pour aboutir à l'équation cartésienne de l'enveloppe de $\mathscr{F}$: $x^2+\dfrac{y^2}{1-a^2}=1$

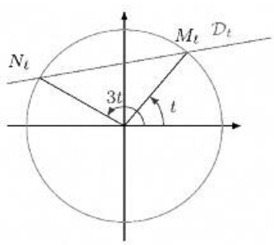
C'est une conique de centre O, dont A est un foyer et $(1,0)$ le sommet associé, *hyperbole* si $a > 1$ et *ellipse* lorsque $a < 1$.





3.4. Enveloppons les tables de multiplication

Prenons k un entier au moins égal à 2 et sur le cercle trigonométrique, relions le point d'argument t au point d'argument kt, modulo 2π évidemment. Sur le dessin j'ai pris $k = 3$.



Considérons la famille $\mathscr{F}_k$ réunissant ces droites pour t variant de 0 à 2π :

$\mathscr{F}_k = \left\{ \left(M_t N_t \right); M_t\left(e^{it}\right); N_t\left(e^{ikt}\right); t \in \left[0, 2\pi\right] \right\}$ c'est-à-dire

$$\mathscr{F}_k = \left\{ D_t : \left(sin(kt) - sin(t)\right)\left(x - cos(t)\right) - \left(cos(kt) - cos(t)\right)\left(y - sin(t)\right) = 0; t \in \left[0, 2\pi\right] \right\}$$

La recherche de l'enveloppe se traduit par le système :

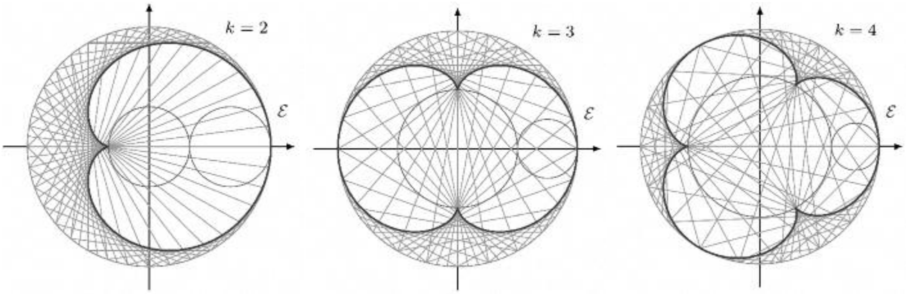
$$\begin{cases} \left(sin(kt) - sin(t)\right)x - \left(cos(kt) - cos(t)\right)y = sin\left((k-1)t\right) \\ \left(kcos(kt) - cos(t)\right)x + \left(ksin(kt) - sin(t)\right)y = (k-1)cos\left((k-1)t\right) \end{cases}$$

ce qui donne, après quelques manipulations trigonométriques fastidieuses :

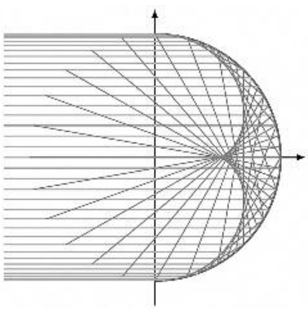
$$\begin{cases} (k+1)x = kcos(t) + cos(kt) \\ (k+1)y = ksin(t) + sin(kt) \end{cases} \quad t \in \left[0, 2\pi\right]$$

On reconnaît là (il faut quand même avoir l'œil !) l'équation paramétrique d'une *épicycloïde* d'ordre ($k - 1$) d'un cercle de rayon $\dfrac{1}{k+1}$ roulant sans glisser sur un cercle fixe de rayon $\dfrac{k-1}{k+1}$.

Voici quelques exemples dans lesquels on retrouve la *cardioïde* (pour $k = 2$) et la *néphroïde* (pour $k = 3$).



3.5. Soyons caustique



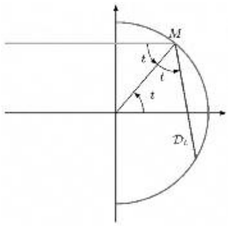
En physique, une *caustique* (par réflexion) est la courbe matérialisée par les rayons réfléchis dans un miroir, pour autant qu'elle existe. Dans le cas d'une parabole et de rayons arrivant parallèlement l'axe, la caustique est réduite un point : le foyer. C'est d'ailleurs probablement de là que vient la dénomination puisque qu'à l'origine, « caustique » désigne une matière brulante ou corrosive.

De notre point de vue, la caustique est l'enveloppe des rayons réfléchis par le miroir.

Nous allons déjà nous intéresser ici à un cas particulier de réflexion sur un miroir concave circulaire avec une source placée l'infini.

La caustique est alors ce que vous observez sur le fond d'une casserole placée au soleil.

Prenons un miroir de rayon 1 et considérons le rayon venant le frapper au point $M_t(e^{it})$, avec $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.



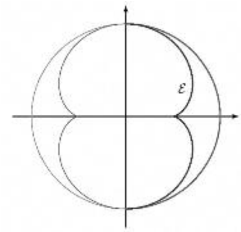
La droite D_t qui nous intéresse est celle passant par M_t, dirigée par le vecteur d'affixe (e^{i2t})

Son équation est donc

$$\sin(2t)(x-\cos(t))-\cos(2t)(y-\sin(t))=0$$

et $\mathscr{F}$ est caractérisé par $f(x,y,t)=\sin(2t)x-\cos(2t)y-\sin(t) \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

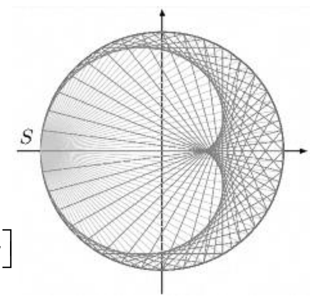
La résolution du système $\begin{cases} \sin(2t)x-\cos(2t)y=\sin(t) \\ 2\cos(2t)x+2\sin(2t)y=\cos(t) \end{cases}$



conduit à $\begin{cases} 2x=\frac{1}{2}(3\cos(t)-\cos(3t)) \\ 2y=\frac{1}{2}(3\sin(t)-\sin(3t)) \end{cases} \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

c'est-à-dire la moitié d'une *néphroïde* engendrée par un cercle de rayon $\frac{1}{4}$ roulant sur un cercle de rayon $\frac{1}{2}$.

Intéressons-nous maintenant au cas où la source de lumière S est placée sur la circonférence du miroir. La figure ci-contre nous laisse imaginer le résultat.



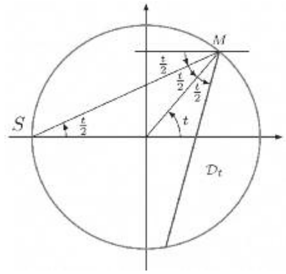
D_t est maintenant dirigée par le vecteur d'affixe $(e^{i3t/2})$ et F est caractérisé par :

$$f(x,y,t)=\sin\left(\frac{3t}{2}\right)x-\cos\left(\frac{3t}{2}\right)y-\sin\left(\frac{t}{2}\right) \qquad t \in [0,2\pi]$$

Le système à résoudre est : $\begin{cases} \sin\left(\frac{3t}{2}\right)x-\cos\left(\frac{3t}{2}\right)y=\sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ 3\cos\left(\frac{3t}{2}\right)x-3\sin\left(\frac{3t}{2}\right)y=\cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{cases}$

et fournit $\begin{cases} x = \frac{1}{3}\left(2\cos(t) - \cos(2t)\right) \\ y = \frac{1}{3}\left(2\sin(t) - \sin(2t)\right) \end{cases}$ $t \in \left[0, 2\pi\right]$

On retrouve bien la cardioïde engendrée par un cercle de rayon $\frac{1}{3}$ roulant sur un cercle de même rayon.



4. Quelques exemples plus courbes

Nous avons déjà vu dans le §[1.2] et analysé dans le §[2.3] un cas où $\mathcal{F}$ n'est pas constitué de droites. Voyons-en d'autres.

4.1. Une parabole pour guide

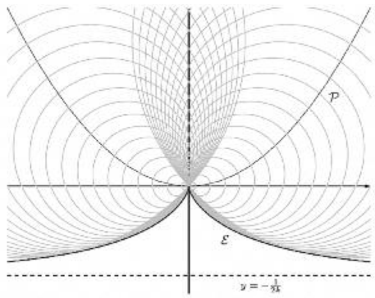
Considérons la parabole P : ($y = kx^2$) et considérons pour $\mathcal{F}$ la famille de cercles centrés sur cette parabole et passant par son sommet (0,0).
La fonction associée est $f\left(x\right) = x^2 - 2tx + y^2 - 2kt^2 y \quad t \in R$.

Les coordonnées des points de l'enveloppe doivent vérifier le système :

$$\begin{cases} x^2 - 2tx + y^2 - 2kt^2 y = 0 \\ -2x - 4kty = 0 \end{cases}$$

qui donne, en éliminant le paramètre t entre ces équations : $y\left(x^2 + y^2\right) = -\frac{1}{2k}x^2$,

ce qui est l'équation d'une *cissoïde de Dioclés*, alias *cissoïde droite*.



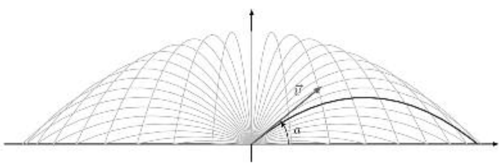
4.2. La parabole de tir

Intéressons-nous ici à l'enveloppe des trajectoires paraboliques d'un objet lancé une vitesse donnée d'un point fixé, sous un angle variable.

Pour l'exemple, je prendrai une vitesse initiale $v = 5ms^{-1}$ et une accélération de la pesanteur $g = 10ms^{-2}$.

Pour $a \in [0,\pi]$, la trajectoire du tir sous un angle a est

$$\begin{cases} x\left(t\right) = 5\cos\left(a\right)t \\ y\left(t\right) = -5t^2 + 5\sin\left(a\right)t \end{cases}$$



pour un temps t variant de 0 à sin(a), instant où le projectile retouche le sol.
La famille $\mathcal{F}$ est caractérisée par la fonction
$f(x,y,a) = 2x^2 - 5x\sin(2a) + 10y\cos^2(a) = 2x^2 - 5x\sin(2a) + 5y(1 + \cos(2a)) \quad a \in [0,\pi]$
et les points de l'enveloppe doivent satisfaire au système :

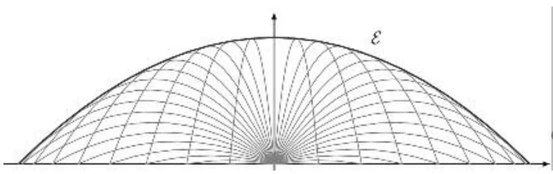
$$\begin{cases} 2x^2 - 5x\,sin\left(2a\right) + 5y\left(1 + cos\left(2a\right)\right) = 0 \\ x\,cos\left(2a\right) + y sin\left(2a\right) = 0 \end{cases}$$

qui s'écrit aussi $\begin{cases} -y\,cos(2a) + x\,sin(2a) = \dfrac{2}{5}x^2 + y \\ x\,cos(2a) + y\,sin(2a) = 0 \end{cases}$

en sommant les carrés de ces deux équations, le paramètre a disparaît pour donner l'équation fonctionnelle de l'enveloppe $\mathscr{E} : y = -\dfrac{1}{5}x^2 + \dfrac{5}{4} \qquad x \in \left[\dfrac{-5}{2}, \dfrac{5}{2}\right]$,

ce qui est une *parabole*.

Cette parabole de tir délimite la zone de dangerosité en dehors de laquelle le projectile ne peut vous atteindre, quel que soit l'angle de tir.



4.3. Les courbes anallagmatiques

Ce terme a été défini la section [5] du document sur l'inversion géométrique. Par exemple ce sont les courbes globalement invariantes par l'inversion par rapport au cercle Γ de centre Ω(1,0) et de rayon 1. Nous avions signalé qu'en prenant une courbe dite *déférente* D une anallagmatique pouvait Œtre obtenue en considØrant l'enveloppe des cercles C_M centrés sur un point M parcourant D et orthogonaux au cercle d'inversion Γ.

Prenons l'exemple de la parabole P : $(4x = y^2)$ et le point $M(t^2, 2t)$ parcourant P.

Le cercle de diamètre $[\Omega M]$ a pour équation

$$x^2 - (t^2 + 1)x + y^2 - 2ty + t^2 = 0$$

son intersection A avec le cercle Γ doit aussi vérifier

$$x^2 - 2x + y^2 = 0 \qquad \text{[eq 1]}$$

ce qui conduit, en soustrayant, à

$$(t^2 - 1)x + 2ty - t^2 = 0 \qquad \text{[eq 2]}$$

Le carré du rayon du cercle C_M est donc, en développant et tenant compte du fait que (x_A, y_A) satisfait aux équations [eq 1] et [eq 2] :

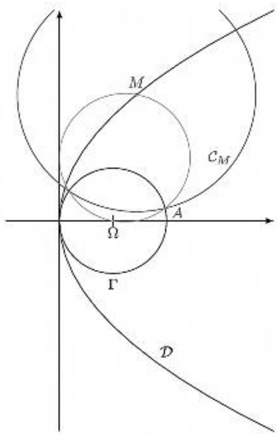
$$MA^2 = (x_A - t^2)^2 + (y_A - 2t)^2 = t^4 + 2t^2$$

Cela nous permet d'obtenir l'équation de C_M :

$$(x - t^2) + (y - 2t)^2 = t^4 + 2t^2$$

et la famille $\mathscr{F}$ est ici caractérisée par

$$f(x,y,t) = x^2 - 2t^2x + y^2 - 4ty + 2t^2 \qquad t \in \mathrm{R}$$



et son enveloppe est donnée par le système :

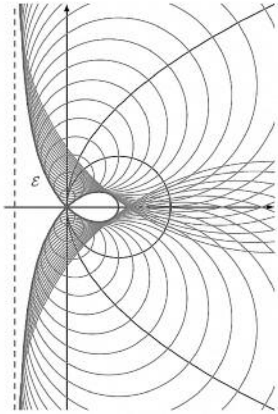
$$\begin{cases} x^2-2t^2x+y^2-4ty+2t^2=0 \\ -4tx-4y+4t=0 \end{cases}$$

La seconde nous permet d'obtenir y en fonction de x et en reportant dans la première on obtient :

$$\begin{cases} x^2(1+t^2)=t^2 \\ y=t(1-x) \end{cases}$$

et en paramétrant $t=tan(\theta)$,

$$\begin{cases} x=\varepsilon\, sin(\theta) \\ y=tan(\theta)(1-\varepsilon\, sin(\theta)) \end{cases} \quad \theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\quad \varepsilon=\pm 1$$



ce qui est une *strophoïde droite*, alias *strophoïde de Newton*.

5. Une autre approche

5.1. Avec des équations paramétrées

Supposons que les courbes C_t de la famille $\mathscr{F}$ soient données de façon paramétrée plutôt que cartésienne, sous la forme $\forall t\in I, C_t=\{(x(u,t);y(u,t)) \ u\in J\}$.

De la même façon qu'au §[2.2], cela définit une nappe tridimensionnelle Σ.

Au point M $(x(u,t);y(u,t),t)$, le plan tangent à Σ est dirigé par les vecteurs

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}\frac{\mathcal{D}x}{\mathcal{D}u}\\ \frac{\mathcal{D}y}{\mathcal{D}u}\\ 0\end{pmatrix} et\ \vec{b}=\begin{pmatrix}\frac{\mathcal{D}x}{\mathcal{D}t}\\ \frac{\mathcal{D}y}{\mathcal{D}t}\\ 1\end{pmatrix}.$$

Ce plan contient la direction (Oz) lorsque $\vec{a}\wedge\vec{b}\cdot\vec{k}=0$, c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix}\frac{\mathcal{D}x}{\mathcal{D}u} & \frac{\mathcal{D}x}{\mathcal{D}t}\\ \frac{\mathcal{D}y}{\mathcal{D}u} & \frac{\mathcal{D}y}{\mathcal{D}t}\end{vmatrix}=0$$

L'enveloppe $\mathscr{E}$ est donc caractérisée par le système :

$$\begin{cases} x=x(u,t)\\ y=y(u,t)\\ \frac{\mathcal{D}x}{\mathcal{D}u}\cdot\frac{\mathcal{D}y}{\mathcal{D}t}-\frac{\mathcal{D}y}{\mathcal{D}u}\cdot\frac{\mathcal{D}x}{\mathcal{D}t}=0 \end{cases}$$

5.2. Parallèle à une courbe

Pour une courbe donnée Γ, on définit la parallèle à Γ distante de *R* comme étant l'enveloppe des cercles de rayon *R* centrés sur Γ.

Prenons l'exemple de la parabole P d'équation $x = y^2$ et cherchons sa parallèle distante de 2.

Pour un point $M(t^2;t)$ de P, le cercle C_t centré sur *M* et de rayon 2 est paramétré par :

$$\begin{cases} x(u,t) = t^2 + 2cos(u) \\ y(u,t) = t + 2sin(u) \end{cases} \quad u \in [0;2\pi]$$

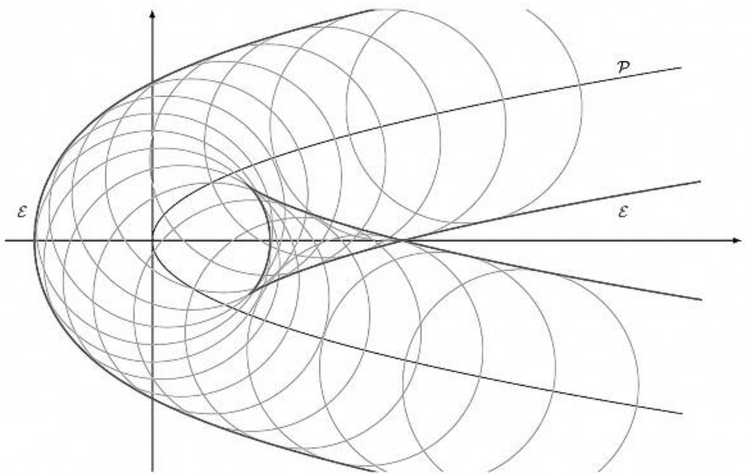
et les points de l'enveloppe E doivent en plus obéir à la contrainte :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\mathcal{D}x}{\mathcal{D}u} & \dfrac{\mathcal{D}x}{\mathcal{D}t} \\ \dfrac{\mathcal{D}y}{\mathcal{D}u} & \dfrac{\mathcal{D}y}{\mathcal{D}t} \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad sin(u) + 2t\,cos(u) = 0$$

ce qui conduit à $cos(u) = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{1+4t^2}} \quad sin(u) = \dfrac{-2\varepsilon t}{\sqrt{1+4t^2}} \quad \varepsilon = \pm 1$

et finalement aux deux courbes formant la parallèle à P distante de 2 :

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + \dfrac{2}{\sqrt{1+4t^2}} \\ y(t) = t - \dfrac{4t}{\sqrt{1+4t^2}} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(t) = t^2 - \dfrac{2}{\sqrt{1+4t^2}} \\ y(t) = t + \dfrac{4t}{\sqrt{1+4t^2}} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$



Ce ne sont pas des courbes répertoriées ... mais c'est joli !

5.3. Enveloppe des normales

Ici, nous considérons un point M parcourant une courbe Γ et la famille des normales Γ en M. L'enveloppe de cette famille est la *développée* de Γ.

Prenons l'exemple de l'ellipse Γ de centre O dont les demi-axes valent 5 et 3.

Son paramétrage est $\begin{cases} x(t) = 5cos(t) \\ y(t) = 3sin(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$

sa tangente en $M(t)$ est dirigée par $\begin{pmatrix} -5\,sin(t) \\ 3\,cos(t) \end{pmatrix}$ et sa normale par $\begin{pmatrix} 3\,cos(t) \\ 5\,sin(t) \end{pmatrix}$

et donc la droite normale en $M(t)$ s'écrit sous forme paramétrique

$$\mathcal{D}_t \ : \begin{cases} x(u,t) = 5\,cos(t) + u \times 3\,cos(t) = (5+3u)\,cos(t) \\ y(u,t) = 3\,sin(t) + u \times 5\,sin(t) = (3+5u)\,sin(t) \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}$$

ce qui nous donne comme contrainte pour l'enveloppe

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\mathcal{D}x}{\mathcal{D}u} & \dfrac{\mathcal{D}x}{\mathcal{D}t} \\ \dfrac{\mathcal{D}y}{\mathcal{D}u} & \dfrac{\mathcal{D}y}{\mathcal{D}t} \end{vmatrix} = 25\,sin^2(t) + 9\,cos^2(t) + 15u = 0$$

d'où nous déduisons $\begin{cases} 5 + 3u = \dfrac{16}{5}\,cos^2(t) \\ 3 + 5u = -\dfrac{16}{3}\,sin^2(t) \end{cases}$

pour aboutir à l'équation de l'enveloppe :

$$\mathcal{E} \ : \begin{cases} x(t) = \dfrac{16}{5}\,cos^3(t) \\ y(t) = -\dfrac{16}{3}\,sin^3(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

ce qui est un cas particulier de *courbe de Lamé*, affinité d'une astroïde.