



interdisciplinarité

mathématiques comme discipline de service (1)

J.P. Kahane

La science est continuellement mouvante dans son bienfait. Tout remue en elle, tout change, tout fait peau neuve. Tout nie tout, tout détruit tout, tout crée tout, tout remplace tout. La colossale machine science ne se repose jamais ; elle n'est jamais satisfaite. Cette agitation est superbe. La science est inquiète autour de l'homme ; elle a ses raisons. La science fait dans le progrès le rôle d'utilité. Vénérons cette servante magnifique.

Victor HUGO

L'art et la science, in William Shakespeare

Le titre de cette étude peut choquer. Les mathématiques sont la plus ancienne des sciences. Pourquoi serait-elle *au service* des autres, ou pire, *au service* d'activités techniques ? En les réduisant à un rôle utilitaire, ne dégrade-t-on pas leur contenu et leur image ? Disons tout de suite que, pour nous, les "mathématiques comme discipline de service" ne sont pas

(1) Version française de l'introduction aux *Proceedings du Symposium d'Udine* (avril 1987) organisé par la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique (ICMI) et la Commission de l'Enseignement Scientifique du Conseil International des Unions Scientifiques (UCSU-CTS), à paraître dans la collection ICMI Study Series (Cambridge University Press) (éditeurs : A.G. Howson, J.-P. Kahane, P. Lauginie, Elisabeth de Turckheim).





des sous-mathématiques, ou des mathématiques limitées à des champs particuliers. Il s'agit de la totalité des mathématiques, comme science vivante, susceptible — l'histoire nous le montre sans cesse — d'applications imprévues dans des domaines très variés. L'enseignement des mathématiques à des étudiants d'autres disciplines s'impose comme un fait, un besoin social, et aussi une problématique relativement nouvelle. Dans cette introduction nous tenterons de montrer l'ampleur du phénomène et des besoins sociaux qu'il exprime, les évolutions prévisibles et ce qu'elles entraînent pour le choix des matières et des méthodes, et enfin l'étendue des problèmes nouveaux qui se posent aux étudiants et aux enseignants.



On a besoin de mathématiques partout

Comme on sait, le hasard des inimitiés personnelles entre Nobel et Mittag-Leffler a fait qu'il n'y a pas de prix Nobel en Mathématiques. Mais il y a des prix Nobel mathématiciens. Le prix Nobel de chimie 1985 a été attribué à deux mathématiciens, H.H. Hauptman et J. Karle, pour le développement de méthodes de détermination de structures cristallines, fondées sur l'analyse de Fourier et les probabilités. Suivant les mots du rapporteur du Prix, W. Lipscomb : "The Nobel Prize for chemistry is all about changing the field of chemistry. And this work changed the field". Auparavant, G. Debreu et L.V. Kantorovič avaient reçu le prix Nobel d'économie, pour des travaux réellement mathématiques. La mathématique ne peut pas être exclue du concert des sciences. Elle est partie constitutive de la pensée scientifique, et composante nécessaire des avancées scientifiques contemporaines.

En physique, le lien avec les mathématiques est évident depuis Galilée : la mécanique, l'optique, l'électromagnétisme, la relativité, la théorie quantique sont inséparables du calcul différentiel et intégral, de la géométrie des surfaces, des équations aux dérivées partielles, des géométries non euclidiennes, des espaces de Hilbert. Le recours aux ordinateurs vient de créer, en physique, une composante intermédiaire entre la théorie et l'expérience : la simulation. La simulation sur ordinateurs est très proche d'une activité purement mathématique : l'expérimentation sur ordinateurs. La simulation physique et l'expérimentation mathématique opèrent souvent sur les mêmes objets, et de même manière. Elles créent de nouveaux sujets d'intérêt, et ressuscitent des sujets anciens, par exemple en géométrie fractale.

L'informatique influe profondément sur toutes les sciences. Cependant le lien avec les mathématiques est essentiel. Les premiers ordinateurs ont réalisé la machine idéale de Turing. Les problèmes mathématiques




Année 1988



sont un banc d'essai pour l'informatique. Les aspects algébriques et algorithmiques des théories mathématiques se trouvent favorisés. Les mathématiques discrètes émergent. Les ordinateurs parallèles suggèrent déjà des recherches impliquant combinatoire et géométrie différentielle.

— La chimie est une source de problèmes mathématiques difficiles — comme le prouve le prix Nobel attribué à Hauptman et Karle —.

La médecine utilise des outils sophistiqués qui nécessitent une interaction entre médecins, physiciens, et ingénieurs. Les mathématiques peuvent jouer un rôle de référence commune.

La biologie, comme l'économie, utilise des modèles statistiques. La linguistique, la géographie, la géologie utilisent des concepts et des techniques que seule une bonne formation en mathématique permet de maîtriser.

Les ingénieurs, quelle que soit leur branche d'activité, ont à calculer, à construire des modèles, à tester des hypothèses. Des questions techniques — le codage, le secret bancaire ou militaire, la prospection géologique — conduisent à des recherches importantes en mathématiques "pures" : la divisibilité des entiers, la recherche des facteurs premiers, la théorie des "ondelettes" en analyse du signal.

Cela n'est pas tout. Les concepts mathématiques affleurent à tous les niveaux de vie sociale. Prenons trois exemples simples.

Chaque individu est confronté aujourd'hui à une avalanche de données numériques, et à des changements d'échelle constants (du prix des denrées au budget de l'Etat, des atomes aux galaxies, de la nanoseconde aux ères géologiques). Les outils conceptuels pour maîtriser ces données et ces changements d'échelle existent : ce sont — au niveau de base — les nombres écrits en notation exponentielle, le calcul des ordres de grandeur, et — à un niveau supérieur — les représentations géométriques, les traitements de données. Les changements d'échelle dans l'exploration des figures — sorte de zoom intellectuel — correspondent aux notions modernes de mesure et de dimension. Pour comprendre nos différents environnements, les aspects actuels de "l'art du calcul", de la géométrie, de l'analyse, sont des outils remarquablement adaptés.

Au niveau de chacun, des collectivités, de l'humanité entière, l'évaluation des risques (accident de voiture, accident nucléaire, catastrophe géologique) devient nécessaire, et elle seule permet de fonder des décisions rationnelles. Le calcul des probabilités est "l'art du calcul" appliqué à de telles évaluations. Les concepts des probabilités permettent l'examen critique des données et des présupposés. Ainsi, l'apprentissage des probabilités devrait être — nous en sommes loin — un des éléments d'apprentissage de l'esprit critique.

Dans la production et dans les services, l'informatisation et l'automatisation rendent primordiales les activités proprement humaines de programmation et de contrôle. L'outil conceptuel adapté à la program-





mation est l'algorithme, c'est-à-dire un procédé systématique pour résoudre une classe de problèmes. Ainsi, l'algorithme est un art de gouverner la pensée bien adapté au gouvernement des machines.

Arithmétique et géométrie, analyse, probabilités, algèbre et en particulier algorithmique ont aujourd'hui un aspect bien différent d'il y a deux siècles — pour nous référer à une époque où l'on discutait encore si ∞ pouvait être appelé un nombre —. Des concepts modernes doivent maintenant faire partie de la conscience commune, et ils doivent être intégrés aux enseignements professionnels si l'enseignement en général ne leur fait pas une place suffisante.

En fait, dans l'enseignement supérieur, les mathématiques sont maintenant enseignées à des étudiants très divers — par leur origine, et par leur orientation —. On pouvait, au début du siècle — comme l'avait fait la CIEM en 1911 —, se préoccuper de la formation mathématique des ingénieurs. On doit aujourd'hui prendre en compte les besoins de tous les futurs professionnels : architectes, médecins, gestionnaires, etc. Quelle que soit la disciple "majeure", des enseignements de mathématiques sont nécessaires : c'est ce que nous appelons les "mathématiques comme discipline de service".

Ce sujet est important au regard d'une conception générale de l'enseignement mathématique pour au moins trois raisons.

Numériquement, il mobilise une bonne partie des mathématiciens des universités (selon une enquête canadienne, 70 % à 80 %).

Socialement, il correspond à l'impact des mathématiques dans tous les aspects de la vie sociale.

Intellectuellement, il force à considérer les choses sous un angle nouveau — par exemple, à admettre qu'il y a plusieurs portes d'entrée pour les mathématiques —.

Cependant, la variété des situations est extrême. Elle tient non seulement aux origines différentes des étudiants arrivant à l'université, et à leurs différentes orientations, mais encore aux différentes traditions nationales, aux différents types de structure universitaire. Une description d'ensemble est presque impossible.

Quoique important et varié, le sujet est relativement mal connu. Généralement, les mathématiciens professionnels ne tirent pas gloire de ces enseignements de service lorsqu'ils les assument. C'est une face de leur activité qui est souvent dissimulée, en particulier aux étudiants en mathématiques et aux futurs enseignants de mathématiques. Ainsi, l'enseignement secondaire ne tire pas parti, en général, des innovations introduites dans les universités au titre des enseignements de service.





Insistons encore sur l'importance sociale de cet enseignement de service. L'importance va au-delà de la demande sociale explicite. Actuellement, la demande sociale s'exprime seulement (faiblement d'ailleurs) par la voix des employeurs, et (un peu plus fortement) par la voix des collègues des autres disciplines.

Sur les demandes des employeurs, on pourra consulter les textes réunis par l'association Bernard Grégory. Notons une donnée surprenante : parmi les ingénieurs d'Electricité de France, questionnés sur la discipline dont ils se trouvent le plus proches (mathématique ou physique), 90 % indiquent mathématique et 10 % physique. L'étude de H. Pollak dans notre symposium montre les énormes besoins de formation mathématique qui se sont manifestés dans la Bell Telephone Cie, et l'étendue de la demande actuelle.

Les demandes des disciplines sont évidemment très diverses, et dépendent non seulement de la discipline mais du niveau des études. On peut distinguer deux types de disciplines. Dans les disciplines du premier type (physique, astronomie, chimie théorique, une partie des sciences de l'ingénieur) des concepts essentiels sont de nature mathématique, les données sont traitées de façon quantitative, les mathématiques permettent d'obtenir des solutions numériques à des problèmes posés ; on peut dire que les mathématiques imprègnent l'ensemble de la discipline. Dans les disciplines du second type (biologie, économie, etc.), les mathématiques éclairent quelques concepts, et sont utilisées pour constituer ou exploiter des modèles qualitatifs, souvent assez éloignés de la réalité. L'attitude des étudiants à l'égard des mathématiques est très différente selon le type de leur discipline majeure. Il en résulte des problèmes pédagogiques également différents.

Résumons :

1. Plus que jamais, et de façon croissante, les mathématiques interagissent avec les autres sciences, et avec les activités techniques à forte composante scientifique.
 2. Une partie — mobile — des mathématiques fait partie de la culture générale de chaque époque. A notre époque, aucun individu ne devrait être exclu de cette composante de la culture générale.
 3. Les mathématiques comme discipline de service constituent une activité très importante dans les universités, très variée, très intéressante, et cependant mal connue.
 4. La demande explicite pour des mathématiques enseignées comme discipline de service est déjà importante, et elle augmente. Suivant les types d'emplois à venir et de disciplines majeures, les mathématiques apparaissent tantôt comme indispensables, tantôt comme utiles mais secondaires. La pédagogie doit s'adapter à ces différents types de demandes.
- 
- 



Ce qui change. Quoi faire et pourquoi ?



Nous vivons dans un monde en changement rapide : les sciences progressent, les technologies changent, les sociétés se modifient. Il en résulte des problèmes, des moyens, des besoins nouveaux. Examinons rapidement ce que cela signifie pour les mathématiques.

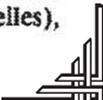
Comme dans toutes les sciences, la production mathématique, exprimée en termes d'articles publiés, augmente exponentiellement : elle double régulièrement tous les dix ans depuis le début du siècle. En 1987, il s'agit de plus de 100 000 articles. Il n'est pas exclu que ce mouvement se poursuive sous d'autres formes (on imagine mal une nouvelle multiplication par mille de la production sur papier au cours du siècle prochain), si, comme on doit le souhaiter, un nombre croissant de pays prend part à la recherche mathématique.

L'assimilation sociale des connaissances nouvelles est-elle possible ? C'est une grande question qui vaut pour toutes les sciences. Le véritable progrès scientifique, c'est à la fois le développement des connaissances, leur communication, et leur assimilation par la société. La question est donc de passer du développement au progrès. Cela intéresse la société dans son ensemble, et chaque individu. Il n'est pas possible que chacun sache tout, mais il est inadmissible que certaines connaissances soient considérées comme à jamais hors de portée de la majorité des hommes.

Les technologies de l'information sont venues à point pour permettre le stockage et la diffusion des données par voie électronique et télématique. Il a donc des moyens nouveaux pour conserver les connaissances acquises, et pour communiquer les connaissances nouvelles. Cependant la **consultation** des documents stockés sous forme de disques et de cassettes, et la **diffusion** des connaissances nouvelles, nécessitent des mises au point, des synthèses, des manuels, des guides de lecture. Ces outils intellectuels, qui apparaissent lentement mais sûrement, sont l'accompagnement indispensable des outils purement techniques. Ils conserveront sans doute la forme imprimée. Ils serviront dans la recherche, dans la production, dans l'enseignement. Contrairement peut-être à une idée reçue, les nouvelles technologies ne vont pas supprimer le recours aux livres dans l'enseignement : elles vont le rendre plus nécessaire que jamais.

D'autre part, les nouvelles technologies produisent à la fois des possibilités et des exigences nouvelles, pour la recherche mathématique et pour l'enseignement des mathématiques. La première étude de la CIEM a justement concerné l'influence de l'informatique et des ordinateurs sur les mathématiques et leur enseignement. Dégageons quelques idées qui intéressent directement l'enseignement des mathématiques comme discipline de service.

Nouvelles possibilités : l'usage des ordinateurs permet d'illustrer des concepts et des méthodes (exemple type : les équations différentielles),

Année 1988



d'expérimenter (phase essentielle de la recherche), de soulager la mémoire et de remplacer la virtuosité technique (en particulier avec l'essor du calcul symbolique), d'adapter l'apprentissage aux capacités et au rythme de chaque étudiant (enseignement assisté par ordinateur).

Nouvelles exigences : dans leur vie professionnelle, les utilisateurs des ordinateurs doivent savoir quoi leur demander, et comment interpréter les résultats qu'ils fournissent. Ces utilisateurs doivent donc avoir des connaissances et maîtriser des concepts plus variés qu'autrefois. Les ordinateurs les débarrassent de la partie la plus mécanique de l'apprentissage des mathématiques (mémorisation et exécution des algorithmes), mais exigent plus d'imagination, de créativité, d'esprit critique (conception des algorithmes, stabilité, sensibilité aux conditions initiales, détection des erreurs, contrôle et exploitation des résultats). En particulier, les logiciels de statistique deviennent de plus en plus familiers, et une demande de compréhension des méthodes statistiques devient explicite.

Heureusement, face à ces nouvelles exigences, les mathématiques ont produit et produisent sans cesse des concepts généraux et des méthodes puissantes. Le développement de la science n'est pas une simple accumulation de connaissances, mais une restructuration permanente. C'est cette restructuration qui permet aux mathématiciens de ne pas être perdus dans l'immensité de la production contemporaine, et aux étudiants d'assimiler rapidement et profondément une partie non négligeable des mathématiques. Plus précisément, lorsque sont élaborés des concepts généraux et des méthodes puissantes, qui sont les grands outils intellectuels pour le monde des machines et le monde des hommes, commence le problème de leur assimilation. Des choix sont nécessaires pour les matières à enseigner, et des méthodes d'enseignement nouvelles sont à introduire.

Examinons comment se présente le choix des matières. Il dépend évidemment de la profession future des étudiants, et de l'enseignement qu'ils reçoivent dans les disciplines majeures.

Il y a deux critères possibles. Le premier est de choisir les matières qu'on suppose devoir être les plus utiles au cours de la vie professionnelle. Le second est d'enseigner ce qui est immédiatement utilisable par les étudiants dans leur apprentissage des disciplines majeures.

Le second critère est souvent la demande spontanée des collègues enseignant la discipline majeure : les mathématiques nécessaires sont celles dont nous avons besoin, au rythme même où nous les utilisons dans notre enseignement. Il peut correspondre également à la demande des étudiants, soucieux d'une certaine cohérence entre les cours de mathématiques, et les cours utilisant des mathématiques. Il peut, dans bien des cas, amener les mathématiciens à améliorer le choix de ce qu'ils enseignent, l'ordre de présentation des sujets et la manière d'introduire ou d'illustrer des concepts mathématiques. Il peut être l'occasion d'une remise en cause





de certaines habitudes ou programmes traditionnels. Cependant, il conduit souvent à des impossibilités (par exemple le chimiste ou le physicien utilisant des fonctions de plusieurs variables avant que le mathématicien ait pu les introduire). Et son défaut de principe est d'ignorer le premier critère.

Le premier devrait être le critère fondamental. Mais il fait dépendre le choix d'un avenir que nous ne connaissons pas. Il est donc hasardeux, et il nécessite, **plus encore que le second**, un travail en commun avec les collègues de la discipline majeure. Très souvent, ces collègues demandent aux mathématiciens tout autre chose qu'une justification de l'utilisation qu'ils en font. Ils souhaitent que leurs étudiants aient un apprentissage des modes de pensée et d'expression du mathématicien : l'exploration abstraite, la représentation géométrique, l'intuition du calcul, puis la déduction logique et la rigueur formelle. Citons par exemple, l'opinion des physiciens de l'Académie des Sciences de Paris, demandant que la géométrie retrouve une place importante, parce que l'intuition géométrique est essentielle pour le physicien. Il y a également une demande explicite des ingénieurs dans ce sens.

Le mathématicien, face à ces deux critères, peut légitimement prendre l'initiative. Bien souvent, ce qu'on peut et doit enseigner aujourd'hui dépend de découvertes ou de mises en forme datant de moins de 30 ans, donc ignorées de nos collègues des autres disciplines quand ils faisaient leurs études. Le mathématicien peut donc faire des propositions.

Commençons en proposant une suppression : celle des exercices de calcul sur dérivées et intégrales, décomposition de fractions rationnelles en éléments simples, fonctions trigonométriques inverses, etc. qui forment encore aujourd'hui une bonne partie des mathématiques imposées aux étudiants en première année. L'apprentissage de l'analyse n'est pas facilité, mais obscurci par ces calculs. La bonne façon de mener ces calculs est une branche de l'algèbre, et il est bon d'être instruit des principes pour comprendre l'origine et l'usage des programmes de calcul symbolique qui se substituent au calcul à la main ; par contre, la répétition de tels calculs à la main quand les réponses sont disponibles à la machine peut être une simple perte de temps. Un seul calcul, bien mené jusqu'au bout, peut être plus instructif que des exercices répétitifs. Le temps économisé permettrait avec profit un meilleur apprentissage des notions fondamentales en analyse (par exemple, champs de vecteurs et courbes intégrales devraient se substituer aux exercices répétitifs sur la résolution d'équations différentielles du premier ordre), et un apprentissage des mathématiques discrètes.

L'étude sur l'influence des ordinateurs (ICMI Study I) avait mis en évidence l'essor des mathématiques discrètes, et suggéré son introduction dans l'enseignement. Des recommandations ont été établies à cet effet par un comité ad hoc de l'American Mathematical Society. En quelques pages, J. van Linté présenta une vision personnelle et stimulante des





mathématiques discrètes, et de leur intervention dans des problèmes d'origines diverses. C'est un champ des mathématiques qui a toujours eu peu de place dans l'enseignement, et les exemples de J. van Lint montrent que les ingénieurs doivent en avoir connaissance. C'est une façon nouvelle et intéressante d'aborder certains sujets d'algèbre et de théorie des nombres (en particulier les groupes de permutations et les corps finis).

L'introduction des mathématiques discrètes peut sembler tout à fait étrangère au souci, que nous évoquions, exprimé par des physiciens, de donner une plus grande part à la géométrie. En fait, la géométrie entendue au sens large s'applique aussi bien au discret qu'au continu. Son importance en physique — et dans bien d'autres activités humaines — tient, classiquement, à ce que les physiciens appellent symétries et les mathématiciens invariants, liés à un groupe de transformations. Selon G. Châtelet — qui se réfère à des textes très remarquables de Hamilton et de Maxwell — les concepts géométriques fondamentaux expriment non des visions, mais des actions. Ainsi vecteurs, flèches, diagrammes, expriment des actions, comme aussi bien la fibration d'une variété ou la connexion des fibrés. La portée de l'intuition géométrique est qu'elle est une pensée en action. Quel que soit le choix des sujets géométriques à enseigner — qui ne peut être le même en physique, en ingénierie, en architecture — l'aspect actif de la pensée géométrique est à retenir.

Sur le choix des matières à enseigner à de futurs physiciens, particulièrement en analyse, la réunion d'Udine a clairement montré que l'énumération (le catalogue des matières) est une impasse, et qu'au contraire un débat constructif peut se mener autour des questions fondamentales : sujets dispersés ou concepts unificateurs, procédés ad hoc ou méthodes puissantes, fidélité à la tradition ou modernisme. J.M. Bony plaide ouvertement pour les concepts unificateurs, et les méthodes puissantes et modernes. Les exemples qu'il donne sont excellents, mais ce ne sont que des exemples. L'intérêt de cette approche n'est pas d'établir un choix, mais de donner une méthode de choix.

Sans prétendre balayer l'ensemble des mathématiques, il nous faut dire un mot des probabilités. Les probabilités interviennent, ou devraient intervenir, aux quatre niveaux de besoins en mathématiques dégagés par H. Pollak : la vie de tous les jours, la citoyenneté intelligente, la profession, la culture générale. Il n'est pas raisonnable qu'un étudiant puisse quitter l'université, dans quelque secteur que ce soit, sans avoir jamais entendu parler de probabilités.

Il est frappant que les non mathématiciens insistent, encore plus que les mathématiciens, sur la portée du mode de pensée mathématique. L'idée est exprimée avec la même force par des biologistes ("peu importe ce que vous enseignez ; enseignez aux étudiants à bien raisonner") et des ingénieurs. Indiquons une réserve (Tonnelat) : "le raisonnement mathématique est un bon serviteur mais un mauvais maître". Les démarches intellectuelles acquises au cours des études sont la condition sine qua non





pour une mise à jour des connaissances au cours de la vie professionnelle, c'est-à-dire pour la formation continue. Empruntons un exemple à G. Aillaud : un ingénieur entraîné au raisonnement combinatoire pourra facilement s'adapter à la recherche opérationnelle, à la programmation, aux systèmes experts, mais il peut être complètement bloqué pour passer de la combinatoire à l'analyse numérique.

La conséquence est que, dans le choix des matières, il ne faut pas penser seulement aux connaissances à acquérir, mais aux modes de pensée associés à ces matières.

C'est encore l'expérience des écoles d'ingénieurs qui attire particulièrement notre attention sur l'autre versant des choses : l'importance des connaissances, à distinguer de la capacité à les mettre en œuvre. Au cours de sa vie professionnelle, un ingénieur aura rarement à résoudre un problème mathématique, mais il aura fréquemment à reconnaître si une question à laquelle il est confronté est susceptible ou non d'une modélisation et d'un traitement mathématique. Comme en toute autre science, l'important pour lui est de savoir assez de mathématiques pour consulter le mathématicien à bon escient.

La conséquence est que, dans le choix des matières, il ne faut pas penser seulement aux modes de pensée mathématique, mais au large éventail de connaissances permettant au professionnel de reconnaître ce qui est éventuellement susceptible d'un traitement mathématique.

Chaque activité professionnelle nécessite un certain type de culture mathématique permettant d'être un utilisateur intelligent des mathématiques. Cela signifie être capable : 1) de lire les mathématiques utilisées dans la littérature professionnelle, 2) de s'exprimer en utilisant des concepts mathématiques, 3) de consulter des références ou des mathématiciens compétents en cas de besoin. En biologie et sciences humaines par exemple, le besoin couramment ressenti est de pouvoir utiliser la mathématique comme langage pour exprimer les problèmes de la discipline. Ce concept de culture mathématique ou de familiarité avec les mathématiques, propre à chaque discipline ou chaque profession, nous paraît mieux adapté aux besoins actuels que celui, couramment utilisé, de connaissances et techniques de base. En effet, les connaissances et techniques de base doivent se modifier en fonction de la culture mathématique à acquérir ; elles ne sont fondamentales que par référence à un but, et ce but nous paraît être la culture mathématique, variée et variable comme les activités et les technologies.

La culture mathématique doit intégrer ces aspects contradictoires que sont les modes de pensée mathématique, et l'éventail des connaissances nécessaires.





Nous avons choisi d'insister sur ce qui bouge, et qui par conséquent force à modifier les programmes d'enseignement. Comme les sociétés, les technologies, les sciences, les mathématiques ne vont pas s'arrêter, il semble que, dans l'avenir, les programmes devront se modifier en permanence. Est-ce que le bouleversement des programmes ne va pas laisser les pays en développement constamment en arrière ? L'inquiétude s'est manifestée à Udine, et elle est à examiner sérieusement.

Même et surtout dans les pays en développement, un enseignement qui se sclérose est une catastrophe. Il faut donc, partout, être à l'affût de ce qui bouge. Mais cela ne veut pas dire que, partout, les programmes doivent changer de la même façon. Il serait absurde de prétendre enseigner des sujets nouveaux, s'il n'existe personne pour les enseigner. Le choix des matières, au niveau universitaire, doit être fait par les enseignants en fonction des compétences, des intérêts, de toutes les circonstances particulières à chaque situation concrète.

Terminons par une idée-force, qui a dominé l'ensemble de l'étude. Beaucoup plus qu'autrefois, et de plus en plus (en particulier grâce aux ordinateurs, et à cause d'eux) les utilisateurs ont besoin de comprendre les mathématiques, d'assimiler des concepts plutôt que des techniques. Soulignons que cette exigence est exprimée avec une force particulière par les ingénieurs. Les ingénieurs sont spécialement sensibles aux changements rapides qui interviennent dans les technologies. Le rôle de l'enseignement est de les préparer au changement et, dans l'ensemble, ils sont prêts à reconnaître ce rôle pour l'essentiel. Préparer au changement est nécessaire quelle que soit l'orientation future des étudiants. Ainsi il n'y a aucune contradiction, au contraire, entre un enseignement plus fondamental et un enseignement plus près de la pratique.

Plus fondamental, plus pratique, moins technique : il semble que ces orientations valent en règle générale pour l'enseignement des mathématiques comme discipline de service.

Ce qui se fait et pourrait se faire. Avec qui et comment ?

Nous venons de parler de technologies, de science, de matières, de programmes. Cependant, lors de la réunion à Udine, l'essentiel de la discussion a porté sur un autre aspect : les méthodes d'enseignement et d'apprentissage, les expériences et les problèmes pédagogiques, les rapports entre enseignants et étudiants, la fonction sociale de ceux qui participent aux enseignements de service.

Nous allons considérer successivement :

- les étudiants, de la première année à la formation continue,
- des orientations souhaitables (concernant, entre autres, le raisonnement mathématique, la rigueur, la théorie et les exemples, la modélisation),



- les outils (ordinateurs, livres, examens),
- les rapports entre enseignants, et les rapports au sein même de la communauté mathématique.

Les étudiants, de la première année à la formation continue

L'accueil des étudiants à l'université mérite une attention spéciale. Le rapport de F. Simons y est consacré. Indiquons quelques questions en débat.

C'est un fait remarquable et paradoxal que les programmes de première année soient pratiquement les mêmes dans le monde entier pour tous les enseignements de service. Or, les étudiants viennent à l'université avec des connaissances inégales. Certains, mal formés en mathématiques au cours des études secondaires, se trouvent en difficulté devant des cours accessibles aux autres. On a évoqué deux solutions : imposer de façon plus stricte le niveau des connaissances exigibles à l'entrée à l'université, ou organiser des remises à niveau. Les remises à niveau ont donné lieu à des expériences intéressantes, mais sans bilan d'ensemble. En tous cas, un effort est indispensable pour expliciter les prérequis des enseignements de première année, en précisant les sujets et les moments où ils sont nécessaires. Lorsque les prérequis ont été explicités, avec les documents utiles et les enseignements de complément permettant les remises à niveau, l'accueil des étudiants et des collègues a été favorable. C'est aussi la voie par laquelle on peut influencer sur l'enseignement secondaire.

Numériquement — nombre d'étudiants, nombre d'heures de cours, nombre d'enseignants — les enseignements de première année sont très importants. C'est à ce niveau que se posent de la façon la plus aiguë des questions communes à tous les enseignements de service : la motivation des étudiants, et celle des enseignants. C'est à ce niveau qu'un enseignement mal adapté peut tuer chez les étudiants le goût et l'inventivité mathématique, et aussi que peuvent se révéler les vocations. C'est à ce niveau que le "soin pédagogique", est décisif. C'est à ce niveau qu'une recherche pédagogique serait particulièrement nécessaire — on peut supposer de la part des étudiants en mathématiques une motivation pour les apprendre ; la motivation pour les autres étudiants est à créer —. C'est à ce niveau qu'existent les amphithéâtres les plus chargés, et que la nécessité de petites classes ou d'enseignement tutorial est la plus grande. Lorsque les filières d'enseignement ne sont pas tracées dès le départ, c'est aussi le niveau des orientations et des réorientations, qui nécessitent un enseignement de mathématiques multivalent. C'est à ce niveau que les mathématiques sont considérées souvent comme la discipline de sélection, permettant de trier les bons et les mauvais étudiants ; l'avantage et l'inconvénient de cette conception est qu'elle ne nécessite pas d'autre effort intellectuel que le dressage aux concours.

Année 1988



A l'autre extrémité, la formation continue est un champ fascinant, riche d'expériences, et cependant insuffisamment exploré. L'histoire de la formation continue des ingénieurs de la Bell Telephone Cie est à méditer. Ici la motivation est claire. Mais la pédagogie qui convient à des adultes ayant une expérience professionnelle est très loin des habitudes universitaires. Il faut laisser aux étudiants beaucoup d'initiative pour avancer à leur rythme (livres, documents, logiciels), et l'enseignant a plus encore qu'ailleurs le rôle d'expert et de conseil. L'édition de documents adaptés à la formation continue est un problème d'actualité.

Orientations souhaitables

La situation actuelle est parfois dépeinte sous de sombres couleurs, sous l'angle de la motivation des études :

- a. les utilisateurs demandent une quantité fantastique de techniques, de trucs, en n'accordant aux mathématiques qu'un temps ridicule ;
- b. les étudiants ne se préoccupent que de l'examen, et aiment beaucoup mieux des formules à appliquer que des méthodes et des raisonnements ;
- c. les étudiants se moquent de l'époque où vivait Fourier, de la raison d'être des espaces de Hilbert... C'est sans intérêt pour l'examen !

La situation désirable peut se présenter ainsi. Il s'agit d'enseigner les mathématiques de sorte que :

- a. les étudiants puissent ensuite apprendre plus de choses par eux-mêmes ;
- b. qu'ils puissent voir comment, où et quand appliquer leurs connaissances.

Examinons ce que cela signifie pour l'introduction des concepts, le raisonnement mathématique, le rôle de la rigueur, la relation entre la théorie et les exemples, la modélisation, et le style d'enseignement.

Les concepts les plus généraux et les plus importants (convergence, linéarité, différentiabilité, orthogonalité) sont aussi les plus difficiles à assimiler. Les étudiants doivent apprendre à les reconnaître dans des situations très diverses. Par exemple, l'orthogonalité — concept géométrique — se rencontrera plus souvent en analyse qu'en géométrie. En même temps, pour être efficaces, ces concepts doivent prendre la forme la plus simple. Par exemple, la différentiabilité, au niveau qui convient à la plupart des enseignements de service, signifie qu'on a une bonne approximation du premier ordre. La linéarité est à la fois un concept géométrique fondamental (espaces, vecteurs) et l'étude, au premier ordre, de tout ce qui est différentiable (applications linéaires). La notion de convergence est l'une de celles que le recours aux ordinateurs peut le mieux éclairer (calculs, graphiques). Elle est souvent obscurcie par des recettes, et des exercices répétitifs, qui ne font intervenir que des techniques de calcul. Il est bon que l'étudiant ait conscience de toute sa richesse (rapidité de





convergence, convergences diverses apparaissant en analyse et en probabilités, défauts de convergence pour des séries naturelles — Taylor, Fourier —). Mais il est encore plus important qu'il sache bien les choses simples et générales (par exemple, que, dans un sens convenable, toutes les séries de Fourier sont convergentes.

Le raisonnement mathématique est un apprentissage précieux. C'est en mathématiques, et en mathématiques seulement, que les étudiants peuvent voir un système hypothético-déductif formalisé, comprendre le rôle des hypothèses, des déductions, des réfutations par contre-exemples, des démonstrations par l'absurde : en bref, d'une logique formelle en action. Mais l'aspect logique du raisonnement mathématique ne doit pas dissimuler les autres : l'intuition géométrique, la recherche des bonnes images, l'heuristique, les analogies, les généralisations, l'étude des cas particuliers. Les livres de G. Polya — inspiré par l'enseignement aux élèves-ingénieurs du Polytechnicum de Zurich, ainsi que par des enseignements à de futurs architectes et de futurs chimistes — sont une mine d'indications très intéressantes à ce sujet.

La rigueur est nécessaire. "Sous des conditions très générales, on a telle conclusion" n'est pas un énoncé mathématique, parce que rien ne donne le moyen de vérifier que les hypothèses ("les conditions très générales") sont réalisées. En mathématique, la rigueur du langage est garante de la rigueur de la pensée. Il faut donc que les étudiants sachent critiquer les formulations incorrectes, et s'exprimer eux-mêmes correctement, oralement et par écrit. Il faut aussi que la rigueur mathématique soit pour eux efficace, et qu'ils ne confondent pas correction et pédanterie. En fait, la rigueur la plus efficace a souvent l'expression la plus élégante.

Les démonstrations ne sont pas indispensables dans un enseignement de service. Cependant, elles sont bienvenues si elles éclairent les concepts et stimulent l'intérêt des étudiants.

Certains modules d'enseignement peuvent être organisés à partir de la lecture d'ouvrages. Entraîner les étudiants à la critique des textes, au contrôle de leur propre expression, à la rigueur et à l'élégance, nécessite des moyens que d'ordinaire les enseignants n'ont pas : voir les étudiants individuellement, les faire parler, lire et corriger des textes écrits par eux. L'enseignement "par l'exemple" est nécessaire ; il n'est pas suffisant.

Insistons aussi sur le rôle de la rigueur dans le choix des énoncés. Les énoncés doivent être, autant que possible, rigoureux et *simples*. Par exemples, les énoncés suivants sont excellents, si on les place dans le cadre convenable :

- toute série de Fourier est convergente (cadre : L^1 , ou distributions),
- toute fonction intégrable sur \mathbb{R} tend vers zéro à l'infini (cadre : distributions),



Année 1988



- toute fonction de \mathbf{R} dans \mathbf{R} est mesurable au sens de Lebesgue (cadre : un modèle de théorie des ensembles excluant l'axiome du choix),
- toute forme linéaire sur l'espace $C^1(\mathbf{R})$ (ou $\mathcal{D}(\mathbf{R})$, ou $L^1(\mathbf{R})$) est continue (même cadre).

Le choix des bons énoncés nécessite une bonne concertation entre les enseignants et les chercheurs en mathématiques de toutes les disciplines, et la recherche permanente de ce qui peut simplifier la vie aux étudiants et aux utilisateurs des mathématiques.

Le choix des exemples, et le moment où les exemples sont donnés, est une question pédagogique délicate. Pour motiver les étudiants, pour leur faire comprendre l'intérêt d'une théorie, rien ne vaut les bons exemples dans leur discipline majeure. La recherche de ces exemples nécessite évidemment un contact entre les enseignants et les spécialistes de la discipline majeure.

Faut-il commencer par les exemples, ou commencer par la théorie ? Il n'y a pas de réponse universelle. La réunion d'Udine a montré que chacune des démarches pouvait se justifier. Voici deux exemples donnés par un collègue australien. En recherche opérationnelle, il semble bon de commencer par un exemple, et de dégager progressivement la théorie, qui permet d'unifier et d'harmoniser le traitement d'autres exemples. En statistique au contraire, il semble plus efficace d'enseigner la théorie en premier lieu ; les étudiants sont alors armés pour considérer comme un réel problème une question de statistique. Le choix peut dépendre du niveau des étudiants. En fin d'études, les étudiants peuvent avoir rapidement des exemples en tête, et il est bon de les choisir assez variés pour que la théorie apparaisse avec toute sa puissance. Au début des études au contraire, les exemples doivent être très significatifs et complètement développés.

La combinaison des deux démarches peut être excellente.

Le transfert des mathématiques vers les autres disciplines nécessite généralement la connaissance des théories mathématiques, celle des problèmes à traiter, et une modélisation qui permette de transformer les problèmes posés dans la discipline en problèmes traitables par le mathématicien. La modélisation, dans l'enseignement, est donc inséparable de la considération d'exemples significatifs. Elle peut intervenir dès les premières années à un niveau élémentaire. C'est au cours des dernières années d'université, si les mathématiciens interviennent encore, que la modélisation avancée prend son intérêt : traitement de problèmes réels dans des laboratoires ad hoc, en liaison avec l'industrie, la production et les services.

Quelles que soient les matières enseignées, il faut tenter de donner aux étudiants le sentiment de la beauté des mathématiques en même






temps que de leur utilité. Ce sentiment peut se développer à l'occasion d'un détail du cours : un beau problème, une belle démonstration, un bel énoncé. Il peut être stimulé si les étudiants voient le caractère expérimental et heuristique de la découverte en mathématique. Il peut aussi se développer si les étudiants voient l'ensemble des mathématiques comme une science vivante. Des aperçus sur leur histoire, ancienne ou contemporaine, sur les développements à venir, sur leurs liens avec la philosophie ou la musique aussi bien qu'avec la physique ou l'informatique, peuvent, s'ils interviennent au bon moment, stimuler durablement l'intérêt des étudiants non mathématiciens.

Il est bon que les étudiants puissent apprécier par eux-mêmes le caractère particulier que l'appropriation intellectuelle présente en mathématiques, en particulier le rôle respectif de la preuve en mathématiques et de l'expérience en physique.

Les outils

L'ordinateur et l'informatique donnent des moyens nouveaux pour l'enseignement. Ils modifient le rapport entre l'enseignement et l'étudiant, en rendant à la fois l'étudiant plus actif, plus libre, plus disposé à expérimenter, et l'enseignant plus nécessaire comme expert (en mathématiques ! pas nécessairement en maniement des outils), comme guide et comme conseil. Ces nouvelles relations, comme les possibilités techniques (informatique graphique, auto-évaluation, correction automatique, enseignement assisté) et les problèmes nouveaux qui surgissent (fabrication des logiciels, commercialisation, conséquences culturelles, sociales et économiques) se trouvent analysés dans l'étude de Strasbourg.

Sans y revenir, indiquons l'importance particulière de ces questions pour les enseignements de service. Signalons des expériences d'utilisation du calcul formel et l'apparition de livres et de cours assortis d'un logiciel, ce qui répond à un besoin à tous les niveaux d'enseignement.

L'importance de la lecture a été soulignée. Les étudiants doivent pouvoir lire les mathématiques utilisées dans les publications de leur discipline, et ces lectures peuvent être une motivation pour leurs études. Dans quelques langues (français, allemand, anglais) la littérature mathématique de 1700 à nos jours est une réserve considérable de lectures intéressantes. On commence à trouver, dans des ouvrages d'enseignement pour ingénieurs, de grands chapitres constitués par des extraits d'œuvres classiques (20 pages de Laplace dans un livre français récent "Probabilités pour l'ingénieur").

Cependant, les ouvrages de références manquent, ainsi que les mises au point à l'intention d'un public informé mais non spécialiste.






Les examens, s'ils ne se renouvellent pas, peuvent bloquer l'évolution de l'enseignement. Inversement, ils peuvent être un outil pour la transformation de l'enseignement. Il n'est pas difficile d'imaginer des sujets ne nécessitant aucune virtuosité technique, mais une bonne assimilation des concepts et un certain esprit critique (de tels sujets ont l'avantage, parfois, de se présenter sous forme de QCM). Cependant, la réflexion est seulement amorcée à cet égard.

Dans les cours orientés vers la modélisation, les méthodes d'évaluation se sont naturellement adaptées.

Les rapports entre enseignants, rapports au sein même de la communauté mathématique.

La plupart des participants à la réunion d'Udine étaient mathématiciens. Il y avait également des ingénieurs, un physicien, un biologiste. Qui enseigne ? Qui doit enseigner ? était une question posée dans le document préparatoire. On peut maintenant apporter quelques éléments de réponse. Examinons successivement trois questions : le rôle spécifique de la discipline majeure et de ceux qui l'enseignent, l'importance pédagogique et la nécessité d'une reconnaissance dans les carrières universitaires du travail des mathématiciens qui se consacrent aux enseignements de service, et enfin le rôle de toute la communauté mathématique dans ce domaine.

La physique ne se conçoit pas sans mathématique, et il y a nécessairement beaucoup de mathématiques dans les cours de physique. Il est concevable — et cela a été expérimenté — que les physiciens se chargent entièrement des cours de mathématiques, au rythme où ils en ont besoin. En tous cas, la physique est une mine de sujets et d'illustrations pour un cours de mathématiques. L'une des meilleures introductions possibles à un cours d'analyse de Fourier est celle du cours de physique de Berkeley (*Waves*, p. 91) : "libérez les cordes d'un piano en appuyant sur la pédale droite, dites "oh", et écoutez la réponse "Ohhh" des cordes qui entrent en résonance avec votre voix. Votre voix est analysée par les cordes, puis synthétisée. Essayez toutes les voyelles". La transformation de Fourier — et tous ses avatars contemporains —, c'est justement la théorie de cette analyse et de cette synthèse harmonique. Lorsque des cours de mathématiques sont confiés à un mathématicien, il est très utile que des physiciens aient la charge des travaux dirigés ; la liaison entre les points de vue du mathématicien et des physiciens doit être garantie par des contacts permanents. L'apport du mathématicien est de *simplifier* ce qu'auraient pu faire ses collègues physiciens ; ce faisant, son rôle peut être apprécié et reconnu.

L'enseignement aux ingénieurs se présente un peu de la même façon que l'enseignement aux physiciens. Soulignons un autre aspect. Les ingé-





nieurs constituent une grande réserve pédagogique, par leur expérience professionnelle et les problèmes qu'ils connaissent ; cela va bien au-delà de l'enseignement pour ingénieurs.

Les mathématiques pour biologistes se présentent un peu différemment. Selon P. Kelly, les relations entre mathématiques et biologie peuvent se présenter ainsi :

- intégration (exemple : génétique quantitative) : les mathématiques font partie des concepts biologiques, et doivent être enseignées en même temps, par le biologiste ;

- disjonction (exemple : croissance de populations) : les mathématiques peuvent être présentées de façon autonome, dans un cours introductif ;

- relation instrumentale (exemples : plans d'expérience, analyses des données) : les techniques mathématiques sont seulement les auxiliaires d'un cours de biologie ; elles sont à enseigner dans des modules séparés, au moment exact où on en a besoin en biologie ;

- relation conceptuelle : il arrive que les mathématiques aient donné naissance à des concepts biologiques, ou à une meilleure conception de la biologie (les probabilités pour la théorie de l'évolution, la logique ensembliste pour la taxonomie) ; cela justifie un enseignement, par les mathématiciens, de concepts susceptibles de servir à l'avenir.

Pratiquement, il y a quelques succès remarquables d'enseignements intégrés. Voici un exemple. A l'institut agronomique de Paris-Grignon un cours de théorie des sondages a été enseigné pendant plusieurs années conjointement par une statisticienne et un économiste. L'économiste présentait les différentes étapes d'un sondage réalisé par des professionnels sur l'économie d'une région viticole et la statisticienne dégagait les principes généraux de la théorie des sondages. L'articulation entre l'exemple et la théorie générale apparaissait aux étudiants à travers le dialogue permanent et parfois animé des deux enseignants.

Plus la discipline majeure s'éloigne des mathématiques, plus le mathématicien doit être à l'écoute des préoccupations des collègues. Le travail en équipe, avec des représentants de la discipline majeure, constitue une sérieuse garantie, et c'est parfois la seule chance pour les mathématiciens de participer à l'enseignement. Le cas a été signalé d'un bon exemple de collaboration avec des architectes, pour un enseignement avancé d'architecture.

Ainsi au plan pédagogique (toujours) et au plan scientifique (souvent), les enseignements de service nécessitent, lorsqu'ils sont assurés, en totalité ou en partie, par des mathématiciens, plus d'invention et plus d'effort que les enseignements destinés aux futurs mathématiciens ou enseignants de mathématiques. Ceux qui s'y consacrent ont le sentiment de faire œuvre utile. Ils y intègrent souvent le meilleur d'eux-mêmes



Année 1988



— comme enseignants et aussi, nous l'avons indiqué à plusieurs reprises, comme chercheurs —. Et cependant, dans les carrières universitaires, le travail effectué à ce titre est peu pris en considération. La réunion d'Udine a été l'occasion d'une sorte de revendication à cet égard : la reconnaissance par les autorités universitaires, et par la communauté mathématique, des services rendus par ceux qui se consacrent aux enseignements de service.

Certains collègues se consacrent entièrement à ces enseignements. Le plus souvent, les enseignements de service sont répartis parmi les mathématiciens de l'institution, en mettant à l'écart ceux qui apparaissent comme les plus "purs". Or, si notre étude est concluante sur un point, c'est que les mathématiques les plus "pures" (disons, la théorie axiomatique des ensembles, évoquée par deux fois au sujet de la simplicité et de la rigueur des énoncés) peuvent être très utiles dans les enseignements de service. Trop souvent, l'image que se font les mathématiciens des "mathématiques appliquées" est celle du siècle dernier : une spécialité de l'analyse, assortie d'un peu de statistique. Aujourd'hui, géomètres, théoriciens des nombres, algébristes sont en prise directe avec des applications importantes. En particulier, la nécessité d'un enseignement de mathématiques discrètes à des millions d'étudiants appelle la collaboration de mathématiciens orientés vers l'algèbre, la géométrie algébrique, la théorie des nombres, la combinatoire. Référons-nous encore à G. Polya, qui était analyste de formation. Ses travaux en combinatoire — la fameuse "théorie de Polya" — sont issus d'une question de chimie — le décompte des isomères des alcools aliphatiques —. Ainsi, même au plan de la recherche, la collaboration à des enseignements de service peut être stimulante, et aucun mathématicien ne devrait se considérer à l'écart de ce type d'enseignement.

Rappelons encore l'exemple des mathématiciens Prix Nobel de chimie et d'économie. Notre étude s'inspire des immenses services que les mathématiciens peuvent rendre à la science et aux hommes. Au contraire d'une subordination à des ordres extérieurs, ces services nécessitent une intime collaboration, qu'appelle notre étude, est garante des progrès à venir dans l'éducation comme dans la science..

