Interdisciplinarité, voyage en terres inconnues

Corinne Castela(*)

Résumé. L'objectif de ce texte est d'analyser la complexité épistémologique et institutionnelle de tout projet interdisciplinaire, déjà s'il s'agit d'une collaboration entre deux sciences ou entre une science et une profession, encore plus quand on parle de projet scolaire. Col-laborer, c'est-à-dire travailler ensemble, suppose de connaître et reconnaître le point de vue de l'autre, de comprendre ses besoins authentiques et de mesurer la distance qui les sépare de ceux que sa propre discipline a l'habitude de satisfaire. C'est pourquoi le titre insiste sur la dimension dépaysement de l'interdisciplinarité et sur la nécessité d'une relation ouverte, permettant la reconnaissance de ce que l'autre sait et sait faire. Cela ne s'improvise pas.
Mots clés. Interdisciplinarité, professions, transposition inter-institutionnelle, EPI.

Introduction : penser la complexité de l'interdisciplinarité

On fait beaucoup référence à la complexité du monde dans les attendus de la réforme du collège mise en œuvre à la rentrée 2016, à l'objectif d'aider les élèves à appréhender cette complexité, en particulier pour justifier le besoin de décloisonnement des savoirs, d'interdisciplinarité dans l'éducation. L'objectif de ce texte est de mettre en évidence la complexité de l'introduction de l'interdisciplinarité dans l'enseignement, plus spécifiquement du dispositif des Enseignements Pratiques Interdisciplinaires (EPI dans la suite), compte tenu des objectifs qui lui sont assignés. L'**approche écologique** introduite par Yves Chevallard pour lutter contre tous les volontarismes réformateurs en éducation[1], fournit une méthode pour cela : analyser les **contraintes** sociales de tous ordres, épistémologiques, pédagogiques, institutionnelles, sociétales, culturelles, qui pèsent sur les activités que l'on prétend réformer et déterminer les **conditions** qu'il

(*) corine.castela@univ-rouen.fr.
Corine Castela, maitre de conférences émérite
LDAR-Universités de Rouen, Paris Diderot, Artois, Paris-Est Créteil, Cergy Pontoise

[1] Ceci ne signifie pas qu'Y. Chevallard soit hostile à l'interdisciplinarité, bien au contraire.

faudrait réunir pour permettre la réforme. À partir de cette double enquête, on détermine au sein des conditions nécessaires, celles qu'il est possible d'atteindre moyennant certains changements et celles que des contraintes intouchables, inamovibles, rendent inaccessibles.

Loin de moi l'idée d'avoir mené à bien cette exploration écologique. Mon objectif ici est modestement de lutter contre un certain discours qui prétend rassurer les craintes des enseignants en affirmant que cela n'est pas si compliqué de mettre en œuvre un EPI. Effectivement les sites académiques fourmillent de fiches dites d'aide à la conception d'EPI qui tiennent en une page. Ce point de vue simpliste conduit selon moi tout droit à l'impossibilité d'atteindre les objectifs de cette réforme. Concevoir, mettre en œuvre et réussir des EPI est compliqué, je vais essayer d'en montrer certaines raisons dans la suite. Autrement dit, cela va demander du travail, beaucoup de travail aux enseignants et créer des besoins de recherche et de formation.

Avant d'entrer dans le vif du sujet, il me faut préciser que je ne considèrerai pas du tout des configurations interdisciplinaires où les mathématiques sont objets d'étude, ce qui pourrait être le cas avec l'histoire ou le français, me centrant sur des cas où elles sont discipline de service.

La transposition didactique n'est qu'un cas particulier parmi les phénomènes de modification des savoirs et savoir-faire qui circulent

Le premier exemple est un dispositif d'enseignement en 3e sur les nanotechnologies, considérées comme au cœur d'une question de société. Il est mis en place dans un collège français de façon interdisciplinaire[2] et implique des chercheurs en nanotechnologie et les enseignants de mathématiques, physique-chimie, technologie, d'histoire-géographie, anglais et français. Quatre séances de science ont pour objectif la compréhension de l'ordre de grandeur nanométrique ; elles sont co-dirigées par deux professeurs, les deux premières par les professeurs de mathématiques et physique-chimie, la dernière, d'une durée double, par les professeurs de physique-chimie et technologie. Centrons l'analyse sur l'une des difficultés rencontrées. Les séances 2 et 3 amènent les élèves à calculer une quatrième proportionnelle.

- Séance 2 : le professeur de mathématiques conduit le travail qui consiste à calculer la taille d'un atome en sachant que le rapport de taille entre une balle de tennis et l'atome de carbone est le même qu'entre la Terre et une balle de tennis. La vidéo permet de voir que la trace écrite au tableau semble s'appuyer sur un calcul de coefficient de proportionnalité.
- Séance 3 : les élèves doivent calculer la longueur réelle d'un élément apparaissant sur une image dont on connaît l'échelle et ceci en mesurant la représentation. Les

[2] M-H. Lecureux-Têtu (2015), L'ordre de grandeur nano, une difficulté didactique interdisciplinaire et un enjeu citoyen. GT5, Colloque Espace Mathématique Francophone, Alger. Téléchargeable.

professeurs de sciences physiques et chimiques, et de technologie imposent le produit en croix, ce qui pose problème à certains élèves.

On constate donc l'absence d'harmonisation des pratiques entre les disciplines, malgré l'implication dans le projet et la co-animation des séances.

Creusons un peu le thème de la quatrième proportionnelle.

- Régulièrement, les jeunes étudiants frais émoulus de la licence de mathématiques privilégient la technique par introduction du coefficient de proportionnalité : $d = \frac{a}{b} \times c$. C'est le modèle linéaire qui ne pose pas de problème dans les mathématiques académiques puisque 1. quelle que soit la nature des nombres a et b, le quotient $\frac{a}{b}$ est un nombre parfaitement défini, 2. l'expression obtenue donne la valeur exacte de d et cela satisfait totalement le mathématicien.
- Si on considère maintenant les professeurs de mathématiques de 6^e et 5^e, les programmes de 2008 cadrent leurs choix de techniques, en donnant une place importante à la diversité, avec l'objectif de construire chez les élèves le concept de proportionnalité dans sa complexité. Le produit en croix n'est présenté qu'en 4^e.
- En 3^e, le nouveau est la notion de fonction et la proportionnalité est revisitée du point de vue des fonctions linéaires qui fait évidemment jouer un rôle crucial au coefficient de proportionnalité, également coefficient directeur. Dans ce contexte, on peut s'attendre à ce que cette technique soit privilégiée pour le calcul d'une quatrième proportionnelle.
- Pour ce qui concerne les sciences physiques et chimiques, la proportionnalité de grandeurs joue un rôle crucial dans l'expression des relations[3]. Dans l'histoire, nombre de lois sont exprimées en termes de proportionnalité : c'est par exemple le cas des lois de Charles (V-volume- et T-température), de Mariotte (P-pression- et 1/V), de Gay Lussac (P et T) qui débouchent sur la loi des gaz parfaits PV= nRT. Il suffit de faire une recherche sur Google Scholar pour trouver jusqu'à nos jours des articles scientifiques dont certains résultats ou hypothèses s'expriment par une proportionnalité. Le coefficient n'est pas toujours conceptualisé ; la proportionnalité est alors une affaire de proportion c'est-à-dire d'égalités de rapports :
$\frac{P}{T} = \frac{P^*}{T^*}$, d'où $P \times T^* = P^* \times T$ et par exemple si P^* est l'inconnue, $P^* = \frac{P \times T^*}{T}$.
Pourquoi pas $P^* = \frac{P}{T} \times T^*$? Parce que le passage à l'application numérique

[3] Avec un symbole spécifique. Voir Chevallard
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/FM_DM_UE35_YC_TD.pdf.

implique des valeurs exprimées par des nombres décimaux et que la première formule évite de multiplier l'erreur d'arrondi sur le quotient par la valeur de T*[4]. En résumé, historiquement, il y a des raisons de nature scientifique (liées au domaine de savoirs) pour que la technique du produit en croix soit privilégiée en physique.

- Et du point de vue du professeur de physique ? Pourquoi imposer une seule technique ? Parce que la proportionnalité n'est pas un enjeu d'apprentissage de la discipline, il a besoin de pouvoir considérer ce type de tâches comme n'étant pas objet de discussion. On retrouvera ce même phénomène plus loin dans l'exemple de la formation des infirmiers. Mais de manière générale, la dispersion des façons de faire n'est pas appréciée dans les environnements professionnels non plus.

Cet exemple me semble représentatif des situations conduisant les enseignants de mathématiques à collaborer avec une autre discipline scolaire dans l'étude d'une question parce que des savoirs mathématiques fournissent des techniques permettant de résoudre des problèmes posés dans le cadre de l'autre discipline. Quatre contextes culturels différents sont a minima impliqués dans le parcours qui produit le mode d'utilisation de l'outil mathématique par la discipline non mathématique. Quels contextes sont en jeu dans l'exemple précédent ? Celui des mathématiques académiques, productrices de savoirs et de techniques ; son équivalent du côté de la physique (domaines scientifiques de référence) ; les deux disciplines scolaires. Un schéma simplificateur de circulation des savoirs mathématiques peut se présenter comme suit :

$$
\begin{tikzcd}
\text{Mathématiques académiques} \atop \text{(nombres réels, fonctions linéaires)} \arrow[r] \arrow[d] & \text{Physique académique} \atop \text{Grandeurs proportionnelles} \arrow[d] \\
\text{Mathématiques scolaires} \arrow[r] & \text{Physique scolaire}
\end{tikzcd}
$$

Mais ceci est une simplification puisque la proportionnalité dans le domaine de la physique ne dérive pas directement du point de vue des mathématiques académiques contemporaines, qu'il a aussi à voir avec la théorie des proportions produites par des mathématiques plus anciennes (par exemple Eudoxe). De même, la proportionnalité dans le cadre scolaire du collège jusqu'en 4e n'est pas un simple transfert du point de vue académique. Enfin, le point de vue de la physique scolaire sur la proportionnalité n'est pas une simple importation des outils de la discipline scolaire mathématique.

4 http://jl.bregeon.perso.sfr.fr/Regletrois.htm Donne de très nombreux exemples de manuels d'école élémentaires (XXe siècle) où est affirmé et vérifié sur exemples le fait qu'il est préférable de multiplier avant de diviser.

On le sait, des contraintes dues au projet éducatif de l'enseignement produisent des effets de **transposition didactique**[5] sur les savoirs et savoir-faire produits par le domaine scientifique. Mais existent également des effets de **transposition interdisciplinaire** : des contraintes dues à la fois à la nature de la physique comme science et à son enseignement produisent eux aussi des effets transpositifs sur les outils produits et enseignés par les institutions mathématiques. Les contextes culturels considérés ne sont donc pas de simples environnements qui seraient des terrains d'application pour des mathématiques. Conformément à la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD dans la suite), je les considèrerai comme des institutions : une institution est une organisation sociale, elle encadre les activités qui s'y déroulent, met à disposition des ressources et fait peser des contraintes. Quand une institution, par exemple une science, une discipline scolaire ou une profession, utilise des outils produits par les mathématiques, elle se les approprie et les adapte pour résoudre ses problèmes dans les conditions et sous les contraintes qui lui sont propres.

Ce qui veut dire que l'affirmation selon laquelle « les mathématiques sont un «bien commun» que partagent toutes les matières » (Le collège en 2016 : faire réussir tous les élèves – Questions / réponses » de la DGESCO -FAQ dans la suite-, p.8) est très superficielle si elle entend que les mathématiques enseignées seraient un dénominateur commun insensible aux changements de disciplines, hypothèse qui d'une certaine façon dispenseraient les acteurs mathématiciens de l'interdisciplinarité de se préoccuper de ce qui se passent chez leurs collègues. C'est plus conforme aux analyses précédentes s'il s'agit de considérer que dans ce trésor commun, chaque discipline choisit puis adapte suivant ses besoins les outils mathématiques. Du fait des effets transpositifs provoqués, le mathématicien engagé dans une collaboration interdisciplinaire ne peut pas supposer qu'il connaît tout de la vie des mathématiques dans les domaines avec lesquels il collabore. Ceci justifie le titre donné à ce texte : l'interdisciplinarité est un voyage en terres inconnues.

Poursuivons ce voyage. La première escale nous a conduits à évoquer un cas d'utilisation en physique d'une technique issue des mathématiques. Les deux suivantes ont pour cadre des situations professionnelles, le calcul de doses en milieu hospitalier et la détermination de distances inaccessibles en topographie.

Comment vivent les mathématiques dans les professions : deux exemples

Le calcul de doses en milieu infirmier

Ce qui suit est emprunté à une recherche réalisée par Eric Roditi (2014)[6] concernant la formation des infirmiers. Il s'agissait d'interroger certaines pratiques concernant la

[5] Chevallard, Y. (1985). La transposition didactique. Grenoble : La Pensée Sauvage. Rééd. augmentée (1991).

[6] Roditi E. (2014), Le calcul de doses médicamenteuses. Pratiques professionnelles et choix de formation en soins infirmiers. Recherches en Didactique des Mathématiques 34(2-3), 103-132.

formation à donner aux infirmiers pour les préparer à un type de tâches professionnel tout à fait crucial et lourd de dangers, notamment en milieu hospitalier, le calcul de doses médicamenteuses.

Exemple de tâche : Une injection de dobutamine est prescrite à 9h à un patient de 75kg, ce médicament étant disponible en ampoules de 250mg/20ml, il faut fournir 10µg/kg/min en SAP (seringue auto-poussée). Effectuer les calculs pour administrer cette prescription pendant 12h.

L'infirmier doit déterminer le débit en ml/h qu'il doit programmer sur la SAP (consulter internet pour des images) pour assurer qu'en 12 h, le patient recevra par transfusion la quantité du principe actif prescrit. Celle-ci est l'objet d'un premier calcul :

750 µg/mn pendant 12 h, donc 750 µg x 6012 ; ceci donne 540 mg.

Deux ampoules de 20 ml apportant 500 mg, il manque 40 mg.

C'est un calcul de quatrième proportionnelle qui permet de déterminer le volume à prendre dans une troisième ampoule. La position défendue en formation et dont la validité est l'un des objets de la recherche est que « l'enseignement d'une méthode de calcul systématique, indépendante des particularités mathématiques des tâches à effectuer, permettrait d'éviter les erreurs, notamment par les étudiants qui sont le plus en difficulté. » (Roditi 2014, p. 105). Cette méthode est en l'occurrence, comme en physique, le produit en croix :

Le volume en ml est donc : $\frac{40 \times 20}{250}$ = 3,2 ml.

Au total, le volume de produit entré dans la SAP est de 43,2 ml.

Le débit est donc de $\frac{43{,}2\,ml}{12\,h}$ = 3,6 ml/h.

Mais aucun professionnel infirmier ne terminera la détermination du débit de cette façon. Il complètera les 43,2 ml de Dobutamine par un solvant neutre jusqu'à 48 ml. Roditi fournit deux justifications : d'une part, « l'infirmier cherche à simplifier les calculs pour minimiser les risques d'erreurs » (*ibidem*, p. 114) ; d'autre part, avoir un débit entier permet au personnel de s'assurer, quand il passe de chambre en chambre pour effectuer des contrôles, que « le débit n'a pas été déréglé par inadvertance : il y aurait peu de chances, en effet, que le débit déréglé soit un nombre entier de ml/h » (*ibidem*, p. 114).

Cette même stratégie de simplification des calculs grâce à une dilution peut aussi être utilisée dans les services pour éviter le calcul réalisé ci-dessus : le contenu d'une ampoule étant transféré dans une seringue, il suffit de compléter le volume à 25 ml pour obtenir une concentration de 10 mg/ml (ce qui se fait sans calcul) ; un calcul mental très simple permet d'obtenir le volume manquant, soit 4 ml, au total 44 ml complété à 48 ml pour un débit identique.

Dans cet exemple, les contraintes (absolue nécessité d'éviter des erreurs, parfois mortelles) et les ressources (dispositif de la seringue, présence de solvant neutre) de la profession, conduisent les utilisateurs de mathématiques à éviter les formes les plus élaborées des outils disponibles, considérées comme difficiles, risquées, pour adopter des variantes de bas niveau.

Détermination de distances inaccessibles

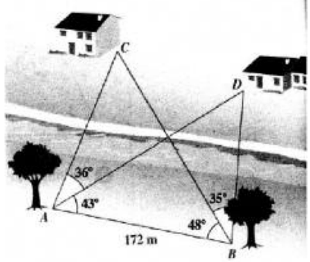
Dans ce nouvel exemple, sont utilisées les formules des sinus et d'Al Kashi dans une situation classique de détermination de distances inaccessibles. Voyons d'abord comment ceci est traité par un manuel de mathématiques en Première S (Terracher, 2001, p. 111)

PROBLÈME 1

Calculer la distance CD entre les deux maisons avec les données du schéma ci-contre.

❶ Recherche

On pourrait calculer CD dans le triangle ACD si AC et AD nous étaient connus (situation ③ : un angle « entre » deux côtés). Or, nous pouvons résoudre le triangle ABC (situation ② : un côté « entre » deux angles ($AB = 172$, $\hat{A} = 43° + 36°$, $\hat{B} = 48°$)) et pour les mêmes raisons, le triangle ABD.
C'est parti.



La solution utilise d'abord deux fois la loi des sinus pour terminer par la troisième étape dont nous nous contenterons, citant exactement le manuel :
La relation d'Al'Kashi $CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2\ AC \times AD \times \cos 36°$ livre, tous calculs faits : $CD \approx 111{,}46$ m, soit $CD \approx 111$ m (restons raisonnables).
On constate que toutes les mesures sont entières, que l'auteur juge déraisonnable de prétendre à une précision de l'ordre du centimètre et qu'il utilise un signe d'approximation et non d'égalité pour donner les résultats approchés du calcul.
Voyons ce qu'il en est dans le monde professionnel de la topographie. L'exemple suivant est emprunté à un cours de Topographie et Topométrie générale proposé par J-B. Henry[7], Ingénieur Géomètre-Topographe, dans le cadre de la Maitrise de Sciences et Techniques « Eaux, Sols, Pollutions » à l'ULP Strasbourg. On trouverait le même traitement en BTS pour les métiers du bâtiment.

> Une ligne d'opération AB est utilisée pour déterminer la distance horizontale séparant deux sondages piézométriques. L'opérateur stationne un théodolite en A puis en B et mesure les angles horizontaux indiqués sur le schéma ci-dessous. A et B ont été choisis de sorte que la distance horizontale AB ait pour valeur :
>
> $Dh_{AB} = 50{,}00$ m.

[7] http://jb.henry.free.fr/cours/cours.html

Calculer la distance horizontale entre les deux sondages, notés G_1 et G_2.

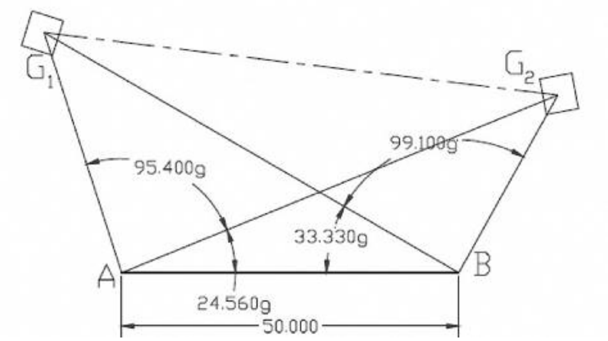


Figure 1. Distance inaccessible

On remarquera que les mesures, qui ont été déterminées avec la précision permise par les instruments de la profession, sont exprimées en grades et données avec trois chiffres après la virgule pour les angles ; exprimée en mètres et (dans l'énoncé) avec deux chiffres pour la distance. Ces chiffres peuvent être nuls car cette écriture a un sens précis : elle signifie que ces chiffres sont significatifs au sens où l'erreur possible sur la mesure ne les affecte pas. La notation Dh_{AB} = 50,00 m précise donc que cette distance est comprise entre 49,995 m et 50,005 m. Dh_{AB} = 50 m signifierait une erreur maximale de 0,5 m.

Solution proposée dans le corrigé

La résolution du triangle A-B-G_1 donne : • Angle A-G_1-B = 46,7100 gon ; • A-G_1 = 37,3303 m ; • B-G_1 = 71,0274 m. La résolution du triangle A-B-G_2 donne : • Angle A-G_2-B = 43,0100 gon ; • A-G_2 = 69,8018 m ; • B-G_2 = 30,0855 m.	La résolution du triangle A-G_1-G_2 donne : • G_1-G_2 = 76,7438 m. La résolution du triangle B-G_1-G_2 donne : • G_1-G_2 = 76,7407 m. On peut donc dire que **G_1 - G_2 = 76,74 m.** Remarquez que le double calcul ne permet qu'un contrôle des calculs et non une vérification des mesures de terrain, la solution étant ici unique.

L'auteur ne précise pas les résultats mathématiques utilisés ; on peut supposer qu'il utilise un des logiciels permettant la résolution de triangles. Il effectue les calculs à 4 décimales, en utilisant les deux cheminements possibles pour réduire l'erreur produite par l'accumulation des approximations de calculs. Il signale que ce double calcul ne lui fournit aucun moyen de contrôler les mesures, c'est-à-dire de repérer les fautes de manipulation (et non les erreurs dues aux instruments). Or, contrôler les mesures est un type de tâches crucial dans la profession qui développe des techniques spécifiques. Il est intéressant pour des mathématiciens de savoir que des énoncés mathématiques fournissant des relations exactes sont utilisées dans certaines de ces techniques. Par exemple, pour contrôler les relevés angulaires d'un cheminement polygonal fermé, on utilisera la relation Somme des angles intérieurs = (nombre de côtés - 2) × 200 gon, non pas pour éviter une mesure mais pour contrôler l'ensemble des mesures. Si l'écart entre la valeur théorique et la valeur mesurée est inférieure au seuil de tolérance, il est équi-réparti sur chaque mesure.

Ce bref aperçu nous donne à voir une différence sémiotique entre les deux institutions : le signe = accompagné d'une mesure décimale en topographie sert à exprimer une mesure et sa précision ; en mathématiques, le signe = exprime une égalité parfaite, le signe une valeur approchée dont l'incertitude n'est pas exprimée, quel que soit le nombre de chiffres après la virgule.

Enfin, cet exemple nous a montré qu'il y a quelques risques pour un mathématicien auteur de manuel à s'aventurer seul sur le terrain professionnel ; celui-ci n'est souvent pas ce qu'il s'imagine en béotien de la profession considérée qu'il est.

Un exemple paradigmatique d'inadéquation : les applications du théorème de Pythagore dans les manuels de quatrième

Comme nous l'avons vu à propos du travail du topographe-géomètre, le mesurage, c'est-à-dire la détermination de mesures par des instruments est centrale dans plusieurs des domaines qui utilisent des mathématiques. Déterminer les incertitudes sur les mesures prises et sur celles qui, issues d'un calcul, sont à implémenter, contrôler le mesurage pour en éliminer les gestes fautifs, sont deux types ou genres de tâches cruciaux de ces domaines. Je me risquerai à avancer deux hypothèses :

- de telles préoccupations sont étrangères à la formation mathématique de la plupart des enseignants qui sont recrutés à l'issue d'une licence de mathématiques en France,
- ceci n'est pas un accident mais une conséquence de l'épistémologie des mathématiques enseignées.

Les mathématiques visent des résultats possédant les caractéristiques suivantes : ils ont un domaine de validité le plus large possible grâce à des hypothèses minimales, les propriétés établies ont un caractère idéalisé (exactitude absolue, alignement parfait…) et le résultat est certain pour chaque élément du domaine. Ceci est complètement incompatible avec l'emploi d'instruments, notamment en tant qu'outils producteurs d'informations valides. En France, ceux-ci sont évacués dès le cycle 4 du collège dont l'un des enjeux est encore, dans les nouveaux programmes, l'apprentissage de la démonstration. Ils le sont définitivement dans les cours de mathématiques. L'évolution relativement récente apportée par le développement des outils numériques se traduit-il à l'université par une réflexion sur la nouvelle forme de preuve liée à ces ressources ? Je n'ai aucun élément objectif pour répondre à cette question.

Ainsi les enseignants de mathématiques n'ont jamais vraiment réfléchi aux problèmes posés par le mesurage, ils s'engouffrent donc d'autant plus volontiers dans l'éviction des instruments que légitiment les textes officiels dans le but de rendre incontournable la preuve par démonstration. Diabolisation du mesurage et, parallèlement, promotion du type de résultats produits par les mathématiques et notamment des mesures exactes, y compris dans les domaines non mathématiques : le travail proposé sur le théorème de Pythagore, sa contraposée et sa réciproque est exemplaire de ce que peuvent faire les manuels à ce propos quand ils veulent montrer l'utilité des mathématiques.

Verticale ou pas ?

Voici deux énoncés classiques issus de deux manuels de quatrième édités en 2011.

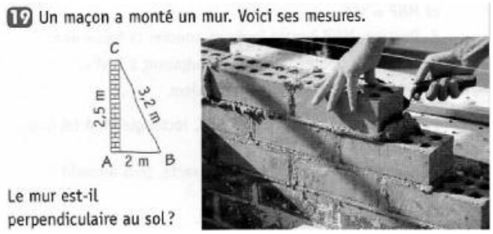


Figure 3. Un cas de non verticalité (Magnard, p. 249)

Calculs : $2^2 + 2{,}5^2 = 10{,}25$; $3{,}2^2 = 10{,}24$

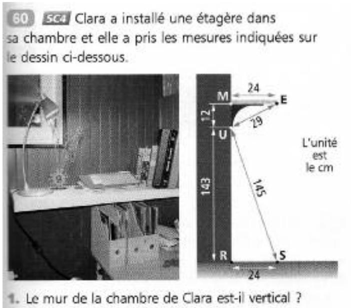


Figure 4. Un cas de verticalité (Belin, p. 217)

Calculs : $143^2 + 24^2 = 21025$; $145^2 = 21025$

Une petite enquête : l'écart de verticalité toléré en maçonnerie

Dans le premier cas (Magnard), avec un écart de 1 cm², l'enseignant de mathématique en 4e insistera pour que ses élèves concluent que le mur n'est pas vertical. Qu'en serait-il en maçonnerie ? J'ai commencé l'enquête en utilisant les ressources fournies par Internet.

La requête « Tolérance sur maçonnerie » me conduit sur un site : http://sos-expert.com/batiment/fiches-construction/maconnerie/tolerances-de-pose-sur-maconnerie-briques-parpaings. J'y trouve que, selon les normes françaises du DTU (document technique unifié) maçonnerie 2008, l'écart de verticalité doit être inférieur à 1,5 cm pour un étage. Il faudrait donc pouvoir calculer cet écart dans le cas de l'exercice, en supposant que 2,5 m est une hauteur plausible pour un étage. Un élève de 4e pourrait mener à bien ce calcul s'il connaissait la valeur de l'angle en A. Mais il sait seulement que cet angle n'est pas droit, ce qui n'est guère utile. De nouveau, la requête « Calculer les angles d'un triangle » fournit une solution en me conduisant sur le site http://calculis.net/triangle qui propose un outil permettant la résolution de triangle[8]. L'entrée des valeurs correspondant à notre situation fournit la mesure des trois angles sous la forme suivante que nous donnons pour l'angle en A cherché :

γ= arccos [(a^2+b^2-c^2) ; γ= arccos[(2^2+2.5^2-$3{,}2^2$) ; γ= 89.94°

[8] J'invite le lecteur à consulter les deux sites mentionnés ici.

Il faudrait ensuite déterminer le cosinus… sauf qu'un certain recul peut faire prendre conscience à un élève que l'usage d'un arccos indique que le cosinus était connu et vaut :

$$\frac{2^2+2{,}5^2-3{,}2^2}{2\times 2\times 2{,}5}=0{,}001$$

Il aurait aussi pu déduire cette relation de la formule d'AlKashi fournie par le site. L'écart de verticalité est donc de 2,5 mm, très en deçà du seuil toléré.

Le théorème de Pythagore s'avère donc tout à fait inapproprié pour conclure dans le contexte de la maçonnerie, c'est un résultat mathématique plus perfectionné qui permet de le faire. Par curiosité, utilisons ce résultat pour analyser la deuxième situation (Belin) en prenant en compte les incertitudes de mesure, ce que ne fait pas l'exercice en donnant ainsi implicitement une légitimité aux informations obtenues par des instruments dont on ne parle pas.

Admettons une incertitude de 1mm, ce qui est très généreux dans le cas de la mesure US (usage difficile d'un mètre ruban). Sachant que l'écart de verticalité est $e=\dfrac{UR^2+RS^2-US^2}{2\times RS}$, des techniques de majoration et minoration fournissent l'encadrement suivant : -1,2943 cm $\leq e \leq$ 1,3056 cm.

Donc l'écart est en valeur absolue inférieur à 1,31 cm pour une hauteur de 1,43 m, ce qui donne pour 2,5 m un majorant supérieur à 2 cm. Autrement dit, là où le manuel de mathématiques voit une verticalité, le maçon ne peut pas conclure compte tenu des incertitudes de mesure.

Terminons en regardant d'un autre œil une application du théorème direct de Pythagore pour un calcul de longueur :

> Un triangle ABC est rectangle en B, AB mesure 3 cm et BC 5 cm. Donc AC mesure $\sqrt{34}$ cm.

En réalité, il s'agit d'un énoncé conditionnel dont les hypothèses sont impossibles à valider dans une situation matérielle : « Supposons qu'un triangle ABC soit exactement rectangle en B et que les côtés de l'angle droit aient pour mesure exacte 3 cm et 5 cm ». Quant à la conclusion, « AC a pour mesure exacte $\sqrt{34}$ cm » dont les enseignants de mathématiques sont si fiers, que peut-on en faire matériellement, sinon en donner une valeur approchée ?

C'est donc au prix d'une vision non pertinente des autres disciplines et professions que les manuels prétendent parfois (souvent ?) montrer l'intérêt de la géométrie théorique (géométrie axiomatique naturelle de Houdement et Kuzniak[9]) enseignée au collège. Ils traitent des questions qui ne se posent pas dans ces institutions et laissent de côté celles qui se posent en vrai, en particulier celles qui concernent les incertitudes

[9] Houdement C., Kuzniak A. (1998-99), Géométrie et paradigmes géométriques. Petit x n° 51, pp. 5-21. Accessible en ligne

de mesure et le contrôle des gestes de mesurage. Des mathématiques sont impliquées dans le traitement des incertitudes : encadrement, statistique, géométrie théorique plus élaborée, ne correspondant pas toujours au niveau scolaire considéré. Il est intéressant de signaler que certains résultats relativement simples de la géométrie du collège sont utilisés pour le contrôle. J'ai déjà signalé en topographie l'utilisation de la valeur exacte de la somme des angles d'un polygone. En maçonnerie, une technique de construction d'une dalle rectangulaire est la suivante : implanter par exemple en utilisant une fois le triplet (3,4,5) le premier angle droit, prolonger les côtés aux dimensions voulues pour obtenir deux nouveaux sommets, terminer en reportant les mêmes longueurs de l'autre côté de la diagonale, par un usage astucieux du triple décamètre. En théorie, on obtient un parallélogramme ayant un angle droit, ce qui suffit pour avoir un rectangle. Dans la pratique, l'artisan cherchera un contrôle en vérifiant que les deux diagonales sont de même longueur, quitte à ajuster jusqu'à ce qu'elles le soient.

Les exemples professionnels considérés confirment la pertinence de l'approche transpositive : l'utilisation des outils mathématiques en dehors du monde mathématique les transforment, non par ignorance ou incompréhension mais pour des raisons légitimes. L'interdisciplinarité suppose donc de la part des mathématiciens un travail de type ethnologique, humble et curieux vis-à-vis des domaines partenaires, sciences et professions :

- Dans quels types de tâches des outils mathématiques sont-ils utilisés ?
- Quels outils ? Comment sont-ils utilisés ? Pourquoi le sont-ils ainsi ?

Bilan : le difficile ajustement du programme de mathématiques aux projets interdisciplinaires

Le document FAQ affirme qu'une différence notable des EPI avec les IDD est que « ceux-ci constituent l'une des modalités explicites de mise en œuvre des programmes. » (p. 17). Si ceci signifie qu'ils fourniront un terrain d'utilisation, voire d'introduction, de certains éléments figurant dans le programme disciplinaire, la réalisation d'un tel objectif sera difficile. Plusieurs configurations sont en effet possibles, comme j'ai tenté de le montrer par les exemples précédents :

* Les problèmes à résoudre peuvent l'être au moyen de savoirs mathématiques de niveau inférieur à celui du programme, compensés par une ingéniosité qui tient compte des ressources de la situation.

Nous avons vu avec le calcul de doses que ceci est un comportement professionnel légitimé par son ergonomie, il est fort probable qu'un tel phénomène soit fréquent dans des situations issues de la vie quotidienne. Qu'il le soit prouverait que l'un des objectifs des activités interdisciplinaires serait atteint, à savoir : « Chaque élève est incité à proposer des solutions originales, à mobiliser ses ressources pour des réalisations valorisantes et motivantes. » (BO SPE 11 26-11-2015 p. 138)

* Des savoirs mathématiques du programme sont nécessaires pour traiter le problème à résoudre, avec deux cas possibles :

** Ils ont déjà été enseignés, il s'agit alors d'une situation d'utilisation.

Mais on connaît les difficultés créées par le mélange de savoirs récemment acquis avec d'autres, ce qui devrait être nécessairement le cas dans une situation interdisciplinaire[10]. On peut prédire qu'une intervention un peu directive de l'enseignant de mathématiques soit nécessaire dans ce cas.

** La situation interdisciplinaire est au contraire une occasion utilisée par l'enseignant de mathématiques pour introduire un savoir nouveau.

Les nombreuses expérimentations réalisées depuis des années dans les IREM et par la recherche en didactique des mathématiques ont largement montré que de telles situations sont possibles mais qu'elles nécessitent un pilotage bien pensé et difficile par l'enseignant de mathématiques, même dans le cas de problèmes internes à la discipline. L'origine non-mathématique du problème ajoute un niveau de complexité car pour qu'un outil mathématique s'impose comme incontournable, il faut une mathématisation du problème à résoudre, c'est-à-dire des attentes sur la généralité et/ou sur la précision et/ou sur le type de preuves qui n'appartiennent pas nécessairement au problème initial dans l'autre discipline, lequel pourrait se contenter de mathématiques de bas niveau.

* Enfin, il est possible que le traitement de la situation passe par l'utilisation de savoirs hors programme.

Même si ce n'est pas exclu, on peut penser que l'enseignant de mathématiques n'en fera pas l'enjeu d'une situation d'enseignement du type évoqué ci-dessus pour les objets du programme. Néanmoins, le potentiel offert par les media actuels, internet notamment, conduit à considérer vraisemblable qu'une enquête menée par les élèves, leur fasse rencontrer en autonomie des logiciels et des savoirs, notamment mathématiques, utiles pour traiter le problème qu'ils cherchent à résoudre. C'est bien ce à quoi m'a menée l'enquête que j'ai présentée sur l'écart de verticalité.

Comme le soutient Yves Chevallard depuis plusieurs années, cette dernière configuration est sans doute celle que nos élèves, comme nous-mêmes, auront le plus souvent à rencontrer dans leur vie professionnelle mais aussi en tant que citoyen. Il apparaît donc crucial de les y former de façon à ce qu'ils apprennent à interroger la légitimité de leurs sources, à tester la valeur d'une technique, d'un savoir trouvé, mais aussi qu'ils apprennent à s'approprier l'outil. Est centralement en jeu ici la dialectique

[10] Consulter les travaux réalisés autour d'A. Robert. Par exemple Robert A., Rogalski M. (2002), Comment peuvent varier les activités mathématiques des élèves sur des exercices ? Le double travail de l'enseignant sur les exercices et la gestion de classe. Petit x n° 60, 6-25.

media-milieu dont les formes sont explorées dans les travaux récents menés dans le cadre de la TAD[11]. Je me contenterai ici d'examiner la question des boites noires.

Comment aborder les boites noires ?

Pour faire comprendre ce dont il est question, je donnerai deux exemples de boites qui restent noires pour certains de leurs utilisateurs :

* Les logiciels d'analyse des données et les techniques qu'ils embarquent seraient fort peu utilisées en Sciences Humaines s'il fallait en connaître le substrat géométrique et algébrique.
* Nombre de chercheurs physiciens ont oublié les raisons mathématiques qui leur permettent de passer d'une somme finie à une intégrale, intégrale dont ils ne connaissent plus la définition mathématique académique.

Ceci témoigne du fait suivant : apprendre à utiliser un outil donné, qu'il soit numérique ou théorique, ne passe pas nécessairement par l'ouverture de la ou des boites noires embarquées, c'est-à-dire pour les mathématiques, par l'inscription du résultat utilisé comme outil dans une théorie mathématique légitime qui lui donne un sens et en prouve la validité. Ceci est très difficile à admettre pour des enseignants de mathématiques qui voient difficilement comment faire autrement.

Prenons l'exemple de la formule d'Al Kashi que des élèves pourraient rencontrer en réalisant l'enquête que je vous ai présentée. Cette formule peut être prouvée au collège, en tout cas pour un triangle scalène (3 angles aigus). Mais compte tenu de ce qui a été dit précédemment, est-ce cela le plus important à apprendre ici ? Que pourrait-on faire d'autre ? Tester la formule sur des cas connus tels les triangles rectangles, équilatéraux. Mais aussi, confronter les réponses du logiciel de calcul à celles de GeoGebra et prendre ainsi conscience par glissement qu'il fonctionne aussi si un angle est obtus. Examiner la question de la valeur du cosinus dans un tel cas. Et, plus sophistiqué, observer qu'à angle A et produit bc constants, la formule dit que la quantité $b^2+c^2-a^2$ ne varie pas puis elle dit que, si A est constant mais que bc varie, $b^2+c^2-a^2$ et bc, deux quantités interprétables comme des aires, varient proportionnellement. Ceci pourrait se contrôler avec Geogebra par une exploration graphique.

Ne pas ouvrir une boite noire ne signifie pas renoncer à la soumettre à un certain examen critique, il s'agit au contraire d'utiliser les ressources dont on dispose pour s'en approprier l'usage et en tester la validité. Par les quelques suggestions envisagées à propos de la formule d'Al Kashi, mon intention est de donner ici une idée de ce que peut être un tel travail sur des outils mathématiques hors programme rencontrés fortuitement en EPI et, en même temps, de suggérer la portée de l'apprentissage à réaliser pour les élèves … et pour les professeurs.

---

[11] Consulter le site d'Y. Chevallard, http://yves.chevallard.free.fr, par exemple, Didactique de l'enquête codisciplinaire et des parcours d'étude et de recherche, 2010 ou une enquête sur la proportionnalité qui rejoindra l'exemple sur la lois gaz parfaits http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/FM_DM_UE35_YC_TD.pdf .Mais voir les travaux du groupe CD-Ampères à l'IFE (http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/ressources/documents/cdamperes/)

Inversement, certaines boites noires méritent d'être ouvertes. Dans le domaine de la formation professionnelle en LP, les protocoles d'atelier, suivis pas à pas sans être questionnés, sont une mine de formules non justifiées. Certaines sont de nature empirique. Mais d'autres associent des raisons d'être professionnelles à des raisonnements mathématiques. C'est par exemple, en Seconde Bac Pro Métiers de la Mode, le cas de la formule qui permet de calculer la largeur des pinces à dessiner sur le patron d'une jupe droite. La faire établir par les élèves peut être l'occasion de mieux comprendre la dimension couturière et de pratiquer des mathématiques du collège.

Conclusions

À travers la notion de transposition inter-disciplinaire et inter-institutionnelle, j'ai insisté sur le fait que les enseignants de mathématiques engagés dans les EPI avaient rendez-vous avec des versions inconnues de leurs propres savoirs dans les autres disciplines et professions. Je voudrais ajouter dans cette conclusion, que pour que le dispositif des EPI fasse véritablement réussir les élèves, il faut aussi que les enseignants se préparent à être interloqués par ce que feront les élèves. Il faudra laisser vivre leurs bricolages, même si cela ne correspond pas aux outils proposés par le programme. Sous cette condition, cela pourra être aussi un rendez-vous avec un potentiel mathématique inconnu chez les élèves. Mais cela rentrera nécessairement en contradiction avec les contraintes temporelles du programme.

Le deuxième élément de conclusion qui dérive des analyses présentées est que trouver des situations interdisciplinaires pertinentes nécessite pour les mathématiciens une immersion dans les autres domaines, dont les professions même au collège, afin d'en comprendre les questions, les techniques et d'y repérer les mathématiques immergées. Et au-delà, c'est tout un travail de conception et d'expérimentation des savoir-faire et savoirs (praxéologies) du travail interdisciplinaire, avec les collègues et avec les élèves, qu'il s'agit de réaliser, c'est-à-dire identifier différents types de tâches qui jalonnent la mise en œuvre d'un EPI, inventer et expérimenter des techniques pour traiter ces tâches et enfin développer un discours rationnel qui permette d'échanger ensemble sur ce qui est à faire et sur ce qui est fait, puis de conceptualiser les techniques efficaces comme les échecs rencontrés. Ceci ne doit pas être laissé à la charge des enseignants seuls. Dire cela n'est pas une marque de défiance vis-à-vis des personnes, c'est la reconnaissance de la complexité et de l'importance du problème à résoudre, un problème de la profession qui doit donner lieu à des recherches collaboratives au niveau des laboratoires de didactique et des IREM[12].

Je voudrais m'attarder sur l'importance de choisir pour les EPI des thèmes liés aux professions. En effet, j'ai été frappée par l'insistance mise par le texte présentant les nouveaux programmes (BO SPE 11 26-11-2015) sur l'importance d'une compréhension scientifique du monde, sur la distinction entre ce qui relève de la science et de la technologie et ce qui relève d'une opinion ou d'une croyance (p. 113), les progrès technologiques étant présentés comme liés aux avancées dans les connaissances scien-

[12] L'exemple le plus récent : la thèse de Michèle Prieur intitulée : « La conception codisciplinaire de métaressources comme appui à l'évolution des connaissances des professeurs de sciences », soutenue à Lyon.

tifiques (p. 144). Loin de moi l'idée de nier l'importance de la science dans l'explication du monde et dans l'action sur ce monde, mais il me semble qu'il existe dans les professions et dans la vie quotidienne des modes d'action efficaces qui précèdent la recherche scientifique et technique ou l'ignorent, au moins en partie, et ne fonctionnent pas selon la (une) rationalité scientifique tout en étant rationnels. L'inventivité pratique qui se manifeste ainsi semble tout à fait ignorée des programmes du collège, l'action non scientifique n'y ayant sa place qu'en arts. N'est-ce pas l'indice que la culture de toute une partie de l'humanité, et de toute une partie des parents des enfants scolarisés reste négligée par un collège qui n'a donc pas fini de reconnaître les valeurs, rapports au mode, savoirs et savoir-faire de toutes les familles.
Je terminerai par une réflexion sur ce que représente pour les enseignants de mathématiques ce voyage en terres inconnues qu'est l'interdisciplinarité. Tous les éléments présentés dans ce texte convergent pour expliquer ce que m'ont déjà dit certains anciens étudiants, fraichement recrutés : ils ne se reconnaissent pas dans ce qu'on attend d'eux, plus précisément dans l'approche des mathématiques qu'ils prévoient dans les enseignements inter-disciplinaires. Leur identité de mathématicien, mais aussi certainement de jeune adulte ayant choisi cette discipline comme domaine de prédilection, est construite sur l'épistémologie que j'ai mentionnée précédemment, basée sur l'abstraction et l'idéalisation des objets ainsi que sur la certitude absolue permise par la démonstration. Leur science a pris depuis très longtemps ses distances avec le monde matériel qui ne les concerne plus. C'est une composante importante de leur identité qui se trouve contestée par l'interdisciplinarité, cela ne se règlera pas par injonction institutionnelle mais, il faut l'espérer, par des formations, en MEEF et en FC, histoire des mathématiques, y compris anciennes, et projets interdisciplinaires notamment. Selon moi, l'objectif de telles formations est d'identifier ce qui dans le monde réel est le domaine d'étude spécifique des mathématiques, et ce depuis qu'elles existent. Autrement dit, caractériser les mathématiques par leurs objets et par les problèmes à résoudre, non par leur mode de preuve. Les ingénieurs qui ont conçu le nouveau ballon de football de la coupe du monde, nommé Brazuca, ont résolu un problème de nature mathématique, réaliser une approximation satisfaisante d'une sphère en assemblant certaines surfaces initialement planes. Etienne Ghys, mathématicien et vulgarisateur de mathématiques,[13] a prouvé que l'assemblage inventé par les ingénieurs est une application d'un théorème mathématique. Mais il dit dans sa conclusion, « je suis émerveillé par l'inventivité des ingénieurs de Adidas qui ont tout simplement « redécouvert » le théorème de Alexandrov-Pogorelov : je suis convaincu qu'ils ne le connaissaient pas (et même qu'ils ne le connaissent toujours pas) ». Ainsi, on peut résoudre des problèmes mathématiques sans s'inscrire dans les démarches des mathématiques académiques. Fait-on alors œuvre mathématique ? œuvre de mathématicien ?
Ce voyage en terres inconnues provoqué par l'interdisciplinarité devrait donc être pour les enseignants de mathématiques un rendez-vous avec d'autres disciplines, avec des professions, avec la vie hors système scolaire, avec leurs élèves, avec leurs collègues …et aussi avec leur discipline.

---

[13] http://images.math.cnrs.fr/Le-Brazuca-le-ballon-cubique-de-la-Coupe-du-monde.html. Merci à Simon Modeste de m'avoir informée de l'existence de ce travail passionnant.