Exercices de-ci de-là

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux, imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire.

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer par Mél à :
francois.moussavou@free.fr
ou par courrier à :
François Moussavou, 23 avenue Norma, 13012 Marseille

Pour l'envoi des propositions et des solutions, privilégiez, si possible, le courrier électronique. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial, une copie au format PDF pour contrôler en particulier les formules qui sont souvent perturbées d'un logiciel à l'autre. Vous faciliterez ainsi notre tâche. Merci d'avance.

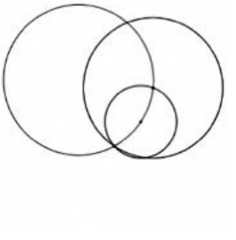
Exercices

Exercice 524 - 1 Jean Couzineau – Massy Palaiseau

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé on considère les points A(-2 ; -1) et B(3 ; 4).

Quel est l'ensemble des points S du plan tels que S soit le sommet d'une parabole passant par A et B et d'axe parallèle à (Oy) ?

Exercice 524 - 2 Robert March – Paris



Un lézard L a aperçu un moucheron M posé sur l'arête d'un parallélépipède rectangle de base carrée ABCD avec AB = 20 et de hauteur AE = 25.

Le moucheron est posé sur l'arête [EH] avec EM = 8.

Le lézard est au sol devant la face BCGF (cf. figure) dans une position non précisée.

Il veut attraper le moucheron en empruntant le plus court chemin.
Il s'avère qu'il a trois parcours possibles de même longueur *l*.

Que vaut *l* ?

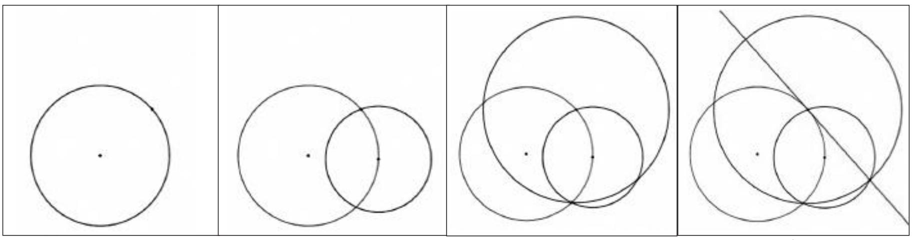
Exercice 524 - 3 *Pour nos élèves* : *Euclidea*[1]

Dans ce jeu, on dispose de deux types élémentaires (E) de constructions :

- la droite qui passe par deux points donnés,
- le cercle de centre donné passant par un point donné.

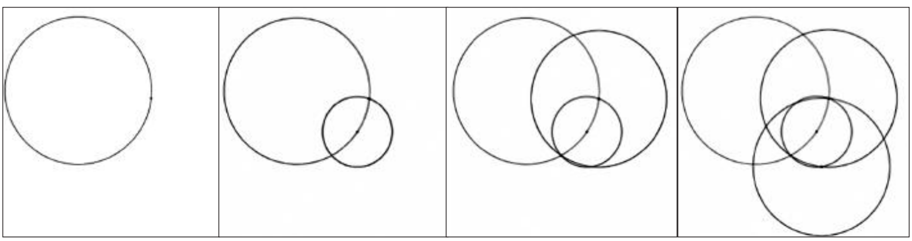
Justifier les constructions suivantes.

A. *Construire la tangente à un cercle de centre donné qui passe par un point donné* (3E).

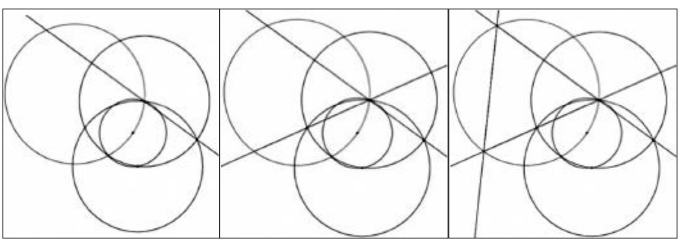


0 1 2 3

B. *Inscrire un triangle équilatéral dans un cercle de centre donné* (6E).



0 1 2 3



4 5 6

Exercice 524 - 4 Marie-Nicole Gras – Le Bourg d'Oisans

On considère un octogone convexe régulier. Construire 7 demi-droites qui partent d'un même sommet et partagent l'octogone en 8 parties d'aires égales.

[1] https://www.euclidea.xyz/

Solutions

Exercice 522 - 1 *À sommer par nos élèves*

A. x, y et z sont trois réels tels que $x=\sqrt{11-2yz}$; $y=\sqrt{12-2xz}$; $z=\sqrt{13-2xy}$.

Combien vaut $x+y+z$?

B. Le produit d'un ensemble de nombres entiers positifs est 23166. Le plus grand des nombres est le double du plus petit nombre. Quelle est la somme des nombres ?

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Michel Lafond (Dijon), Alain Bougeard (Les Lilas), Bernard Collignon (Coursan), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans).

A. Voici la solution de Michel Lafond.

x, y, z sont des réels tels que $x=\sqrt{11-2yz}$, $y=\sqrt{12-2xz}$, $z=\sqrt{13-2xy}$.

On a (1) $x^2=11-2yz$ (2) $y^2=12-2xz$ (3) $z^2=13-2xy$.

En sommant (1), (2) et (3) on trouve $x^2+y^2+z^2=36-2xy-2xz-2yz$.

Donc $(x+y+z)^2=36$ ou puisque x, y, z sont positifs $x+y+z=6$ (4).

Ça, c'était pour nos élèves. Les grands se doivent de calculer x, y, z.

(1), (2) et (4) impliquent $\begin{cases} x^2=11-2y(6-x-y) \\ y^2=12-2x(6-x-y) \end{cases}$ qui, par soustraction donnent

$3y^2-12y-3x^2+12x-1=0$ d'où $y=2+\varepsilon\sqrt{x^2-4x+13/3}$ (5) $\varepsilon=\pm1$.

En utilisant (5) dans $y^2=12-2x(6-x-y)$, on a après une élévation au carré et quelques calculs : $3x^4-24x^3+74x^2-104x+503/9$ (6).

D'après (4), x est dans l'intervalle [0 ; 6] où (6) a deux solutions réelles (fournies par MAPLE) : $x=2\pm\frac{1}{3}\sqrt{2\sqrt{3}-3}$ (7)

En prenant x dans (7), sachant que y est donné par (5) et z par (4) et en vérifiant dans les 3 équations de l'énoncé on constate qu'il ne reste que deux solutions acceptables :

$$\begin{cases} x=2-\frac{1}{3}\sqrt{2\sqrt{3}-3} & y=2-\frac{1}{3}\sqrt{2\sqrt{3}} & z=2+\frac{1}{3}\left(\sqrt{2\sqrt{3}-3}+\sqrt{2\sqrt{3}}\right) \\ x=2+\frac{1}{3}\sqrt{2\sqrt{3}-3} & y=2+\frac{1}{3}\sqrt{2\sqrt{3}} & z=2-\frac{1}{3}\left(\sqrt{2\sqrt{3}-3}+\sqrt{2\sqrt{3}}\right) \end{cases}$$

Soit environ $x=1{,}773$ $y=1{,}380$ $z=2{,}847$ ou $x=2{,}227$ $y=2{,}620$ $z=1{,}153$.

Voici la solution de Marie-Nicole Gras pour l'obtention des valeurs de x, y et z.

On pose $x = a + 2$, $y = b + 2$, $z = c + 2$; alors puisque $x + y + z = 6$, on a $a + b + c = 0$

$$\text{et} \begin{cases} x^2+2yx=11 \\ y^2+2xz=12 \\ x^2+2yx=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+4a+4+2bc+4b+4c+8=11 \\ b^2+4b+4+2ac+4c+4a+8=12 \\ c^2+4c+4+2ab+4a+4b+8=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+2bc=-1 \\ b^2+2ac=0 \\ c^2+2ab=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+2b(-a-b)=-1 \\ b^2+2a(-a-b)=0 \\ a+b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-2b^2-2ab=-1 \\ b^2-2a^2-2ab=0 \\ a+b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b^2+6ab=2 \\ b^2-2a^2+2ab=0 \\ a+b+c=0 \end{cases}$$

On a $b \neq 0$ de manière évidente et donc $a = \dfrac{2-3b^2}{6b}$; on reporte dans la deuxième équation et on obtient

$$b^2-2\left(\frac{2-3b^2}{6b}\right)^2-2\left(\frac{2-3b^2}{6b}\right)b=0 \Leftrightarrow 36b^4-2\left(9b^4-12b^2+4\right)-12b^2\left(2-3b^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 54b^4=8 \Leftrightarrow 81b^4=12$$

puisque $b \in \mathbb{R}$, on a $b = \dfrac{s}{3}\sqrt[4]{12}$ avec $s = \pm 1$;

et on obtient ensuite $a = -\dfrac{s}{6}\sqrt[4]{12} + \dfrac{s}{\sqrt[4]{12}}$ et $c = -\dfrac{s}{6}\sqrt[4]{12} - \dfrac{s}{\sqrt[4]{12}}$.

D'où finalement les deux triplets solutions :

$$\begin{cases} x=2-\dfrac{1}{6}\sqrt[4]{12}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{12}}\ ;\ y=2+\dfrac{1}{3}\sqrt[4]{12}\ ;\ z=2-\dfrac{1}{6}\sqrt[4]{12}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{12}} \\[2ex] x=2+\dfrac{1}{6}\sqrt[4]{12}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{12}}\ ;\ y=2-\dfrac{1}{3}\sqrt[4]{12}\ ;\ z=2+\dfrac{1}{6}\sqrt[4]{12}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{12}} \end{cases}$$

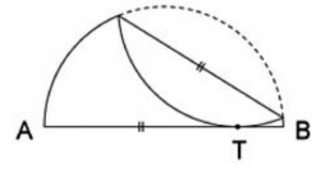
Remarque.
On peut vérifier que ce sont bien les mêmes que celles données par Maple !

B. Voici la solution de Michel Lafond.

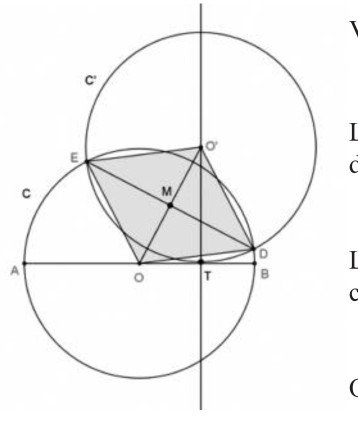
Le produit de plusieurs entiers distincts est $P = 23\,166 = 2 \,.\, 3^4 \,.\, 11 \,.\, 13$.
Soit a le plus petit, $2a$ le plus grand et B le produit des autres facteurs. [B = 1 éventuellement]
On a donc $2\,a^2\,B = 2 \,.\, 3^4 \,.\, 11 \,.\, 13$.
Le plus grand des facteurs, $2a$, est au moins égal à 13 donc a est au moins égal à 9 (plus petit facteur de P pour lequel $2a \geq 13$).
Mais a^2 divise P donc a^2 ne peut excéder 3^4.
La seule possibilité est $a = 9$ d'où $B = 11 \,.\, 13$ avec $2\,a = 18$ pour le plus grand facteur.
Les facteurs sont nécessairement 9 ; 11 ; 13 ; 18 et leur somme est égale à 51.

Exercice 522 - 2 Paul-Alain Bonvert – Alpha du Ginseng *Fière longueur ?*

Un demi-disque de papier de rayon r est plié le long d'une corde de manière que l'arc soit tangent en T au diamètre [AB]. De plus la longueur du pli est égale à AT.
Exprimer cette longueur en fonction de r.



Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Michel Lafond (Dijon), Alain Bougeard (Les Lilas), Bernard Collignon (Coursan), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Maurice Bauval (Versailles), Jean-Paul Thabaret (Grenoble).



Voici la solution de Jean-Paul Thabaret.

Les cercles C et C' de centres respectifs O et O' et de même rayon r se coupent en D et E.

Le cercle C' est tangent en T au diamètre [AB] du cercle C.

On suppose AT = ED. Il s'agit de calculer AT.

Soit M le centre du losange DOEO'.
Dans le triangle rectangle TOO' : $OT^2 = OO'^2 - O'T^2 = OO'^2 - r^2 = 4OM^2 - r^2$.
Dans le triangle OME, rectangle en M : $OM^2 = OE^2 - EM^2$
donc $OT^2 = 4OE^2 - 4EM^2 - r^2 = 4r^2 - ED^2 - r^2 = 3r^2 - AT^2$
$= 3r^2 - (r + OT)^2 = 2r^2 - 2r\,OT - OT^2$.
et, par suite, $2OT^2 + 2r\,OT - 2r^2 = 0$.

Donc OT est solution de l'équation $x^2 + rx - r^2 = 0$.

Cette équation a une seule solution positive : $\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)r$.

Donc $OT = \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)r$ et ainsi $AT = AO + OT = r + \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)r = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)r$.

Finalement AT est le produit de r par le nombre d'or.

Exercice 522 – 3 Michel Lafond – Dijon *De Pise*.

Peut-il y avoir 4 termes distincts en progression arithmétique (P. A.) parmi les termes de la suite de Fibonacci* ?

*$F_0 = F_1 = 1$ et si $n \geq 2$ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Michel Lafond (Dijon), Bernard Collignon (Coursan), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans).

Voici la solution de Bernard Collignon.

Supposons qu'il existe quatre termes distincts de la suite de Fibonacci en progression arithmétique de rangs respectifs n, $n+i$, $n+j$ et $n+k$ avec i, j, k, n entiers naturels et $i < j < k$.
La suite de Fibonacci est strictement croissante donc on a $F_n < F_{n+i} < F_{n+j} < F_{n+k}$.
Si ces termes étaient en progression arithmétique, on aurait l'égalité :
$F_{n+i} + F_{n+j} = F_n + F_{n+k}$.
Montrons qu'on aboutirait alors à une contradiction.

Pour tous entiers naturels i, j, k et n, on a successivement :

$F_{n+i} + F_{n+j} \leq F_{n+j-1} + F_{n+j}$ car $i < j$, donc $i \leq j-1$ et car la suite (F_n) est croissante.

$F_{n+j-1} + F_{n+j} = F_{n+j+1}$ par définition de la suite (F_n).

$F_{n+j+1} \leq F_{n+k}$ car $j < k$ donc $j+1$ k et car la suite (F_n) est croissante.

Bilan : $F_{n+i} + F_{n+j} \leq F_{n+k}$.

Donc : $F_{n+i} + F_{n+j} < F_{n+k} + F_n$ puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n \geq 1 > 0$.

L'égalité $F_{n+i} + F_{n+j} = F_n + F_{n+k}$ est donc bien impossible et l'hypothèse de départ également.

Exercice 522 - 4 *Pick up on a blackboard in South Africa*

Les nombres $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}$ sont écrits sur un tableau noir.

Deux des nombres, disons a et b, sont choisis et remplacés par $ab + a + b$.
Il y a maintenant 9 nombres sur le tableau noir.

Le processus est répété jusqu'à ce qu'un seul nombre soit laissé sur le tableau.
Prouver que le nombre final est toujours le même, quel que soit l'ordre de choix des nombres de la liste.

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Michel Lafond (Dijon), Alain Bougeard (Les Lilas), Bernard Collignon (Coursan), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Maurice Bauval (Versailles).

Voici la solution de Alain Bougeard.

On considère sur l'ensemble des réels l'opération * définie par a*b = a + b + ab.
Cette opération est trivialement commutative ; on vérifie facilement qu'elle est associative :
(a*b)* c = (a + b + ab)*c = a + b + ab + c + ac + bc + abc
= a + b + c + bc + ab + ac + abc =a*(b + c + bc) = a*(b + c).
Cela suffit pour faire de l'ensemble des réels muni de la loi *, un magma associatif dont les propriétés nous assurent que le résultat de n opérations est unique quel que soit l'ordre des opérations.
Si l'on considère la série (1/n) pour la loi *, n entier, on constate que :

$$1*\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2 \text{ et aussi } 1*\frac{1}{2}*\frac{1}{3}=2*\frac{1}{3}=2+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=3$$

et, de façon plus générale, $n*\dfrac{1}{n+1}=n+\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{n}{n+1}=n+\dfrac{n+1}{n+1}=n+1$.

Donc, par récurrence : $1*\dfrac{1}{2}*\dfrac{1}{3}*...*\dfrac{1}{n}=n$.

Ici, on the blackboard, le résultat est 10 et la première partie nous assure que le résultat ne dépend pas de l'ordre de choix des nombres de la liste.

Remarque.
Outre la commutativité et l'associativité, les cinq autres solutions utilisent toutes la propriété $a * b = (a + 1)(b + 1) - 1$
qui permet d'écrire :

$$S=(1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)...\left(1+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{10}\right)-1$$

$$=2\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\frac{6}{5}\times...\times\frac{10}{9}\times\frac{11}{10}-1=11-1=10.$$