

Mathématiques en environnement multimédia

Bernard Egger (*)

Mathématiques et tablettes tactiles

Les tablettes tactiles sont de plus en plus présentes dans nos classes. Leur diversité est grande, mais elles n'apportent pas toutes les mêmes contributions aux mathématiques enseignées.

Quel apport pédagogique ?

L'environnement tactile permet de se passer d'un clavier (du moins, bien souvent en apparence). Il n'est pas bien sûr que cet aspect soit le plus pertinent. Cliquer sur un bouton sur l'écran au lieu d'utiliser une souris apporte sans doute de la fluidité, mais n'est pas décisif sur un plan pédagogique.

De nombreux outils se contentent de ce cahier des charges minimal.

S'il faut trouver une valeur ajoutée aux tablettes et ordinateurs tactiles, c'est sans doute ailleurs.

L'encre numérique

S'il est un point radicalement nouveau, c'est celui de l'encre numérique (appelée aussi encre digitale).

De quoi s'agit-il ? Tout simplement d'écrire à l'aide d'un stylet ou du doigt une formule mathématique sous un format habituel.

Nous savons tous combien l'interface proposée inévitablement par une calculatrice peut poser des problèmes aux élèves dans la saisie de calculs complexes.

Sans doute les tenants de la notation polonaise inversée, utilisée en des temps anciens sur les HP, a des vertus pédagogiques et, plus près de nous, être capable d'écrire un calcul complexe sans erreur est sans aucun doute très formateur pour comprendre finement les règles de priorités algébriques. Mais en contrepartie, bon nombre d'élèves ont de grandes difficultés à estimer ne serait-ce que l'ordre de grandeur d'un résultat ; ils sont démunis devant ce qu'affiche la calculatrice, ne pouvant en aucune façon en juger la pertinence.

* egger.bernard@orange.fr

Prenons pas exemple :

$$\frac{2 + (7 \times 5)^3 + 3 \times 2}{\frac{1}{4} + \left(2 + \frac{5}{4^2}\right)^2}$$

Comment s'écrirait cela sur une calculatrice ?

En gros sous la forme suivante : $(2 + (7 * 5)^3 + 3 * 2) / (1 / 4 + (2 + 5 / 4^2)^2)$.

Imaginez ce que cela donne en LATEX...

$\frac{\left\{\left\{\left\{\left\{\left\{\left\{\left\{2+7\times 5\right\}\right\}\right\}\right\}\right\}\right\}^{\left\{\left\{3\right\}\right\}}+3\times 2\right\}\left\{\frac{\left\{1\right\}\left\{4\right\}+\left\{\left\{\left\{\left\{2+\frac{5}{5\left\{4\right\}^{\left\{2\right\}}\right\}\right\}\right\}\right\}\right\}^{\left\{\left\{2\right\}\right\}}\right\}$

Pas vraiment plus simple...

L'encre numérique consiste à écrire directement la formule dans un logiciel dédié.

$$\frac{2 + (7 \times 5)^3 + 3 \times 2}{\frac{1}{4} + \left(2 + \frac{5}{4^2}\right)^2}$$

Écrire une telle formule ne demande pas un appareillage sophistiqué. Un ordinateur tactile n'est pas nécessaire. Il suffit de connecter par le port USB ou en Bluetooth une tablette extérieure (style Wacom) et pour une soixantaine d'euros, dans à peu près tous les environnements, il est possible d'écrire cette formule.

Cela peut permettre de répondre à une question en « écriture naturelle ». Mais encore faut-il trouver des logiciels susceptibles de recevoir de telles réponses. Ils restent bien rares.

Si nous voulons pouvoir utiliser cette formule pour obtenir le résultat d'un calcul, il est nécessaire qu'elle puisse être reconnue et traduite, par exemple comme cela :

Equation mathéma... ✕

$$\frac{2 + (7 \times 5)^3 + 3 \times 2}{\frac{1}{4} + \left(2 + \frac{5}{4^2}\right)^2}$$

La reconnaissance de caractères

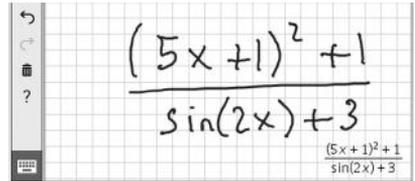
On trouve de nombreux logiciels de bureau ou en ligne possédant cette fonctionnalité.

Depuis la version XP, Windows possède une application appelée panneau de saisie mathématique.

$$\frac{x^2 + 3x}{\sqrt{x+1}}$$

En ligne, on trouve de nombreuses solutions fonctionnant dans divers environnements.

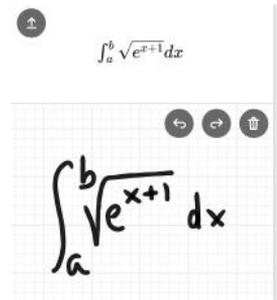
Citons le cas de Wiris, site catalan offrant les mêmes possibilités et compatible par exemple avec Moodle.



$$\frac{(5x+1)^2 + 1}{\sin(2x) + 3}$$

Le résultat peut être récupéré en divers formats. Pour s'en rendre compte, il est intéressant d'aller voir le site <http://www.wiris.com/editor/demo/en/>.

Une autre application disponible en ligne, mais aussi comme application de bureau est MyScript. Elle est maintenant un complément gratuit de Word (dans la version 2016).



$$\int_a^b \sqrt{e^{x+1}} dx$$

Cette dernière application intéresse particulièrement l'APMEP puisque dans le cadre du projet MathScope, elle sera prochainement implantée dans la plateforme d'évaluation mathématique en ligne, MapleTA, permettant ainsi à l'élève de répondre avec un stylet (ou le doigt, ou même une tablette externe), la formule étant reconnue et traduite en MathML, puis testée par le logiciel.

De plus, cette explication est disponible sur Ipad et tablette Android.

Word et les Google docs offrent également des outils internes de reconnaissance de l'écriture mathématique réalisée au stylet ou à la main.

De la reconnaissance au calcul

La problématique initiale était celle des difficultés inutiles ajoutées par la saisie de mathématiques à partir d'un clavier. Il a fallu passer par deux étapes importantes : tout d'abord être capable d'écrire une formule mathématique à l'aide d'un stylet, du doigt ou d'un pavé tactile extérieur, puis dans un second temps, reconnaître ce qui a été écrit.

Nous avons vu qu'un certain nombre de solutions assez diverses répondaient à ces deux exigences.

La troisième étape est celle du calcul et/ou de la représentation graphique obtenus à partir de la formule interprétée.

Il existe un certain nombre de solutions plus ou moins universelles dont nous allons présenter certaines.

Nebo

En termes d'efficacité, il s'agit sans doute d'un des logiciels les plus spectaculaires dans le cadre de l'encre numérique. Il a été créé par MyScript dont nous avons parlé précédemment. Il est gratuit sur Windows, Ipad ou Android, et présente des performances comparables dans tous ces environnements. Ses caractéristiques dépassent largement les mathématiques, mais nous n'examinerons que ce point-là dans cet article.

Dans le cadre de la saisie et de la conversion mathématique, Nebo offre la possibilité d'interpréter plusieurs lignes simultanément. Par exemple :

$$e^x = 3 \begin{matrix} (\Rightarrow) & \ln(e^x) = \ln(3) \\ (\Leftrightarrow) & x = \ln(3) \end{matrix}$$

$$S = \{ \ln(3) \}$$

donne après conversion (double clic de souris ou menu de conversion) :

$$e^x = 3 \Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln(3)$$

$$\Leftrightarrow x = \ln(3)$$

$$S = \{ \ln(3) \}$$

Dans le cas où l'on s'intéresse à une formule numérique, le logiciel effectue un calcul approché :

$$\frac{2 + (7 \times 5)^3 + 3 \times 2}{\frac{1}{4} + \left(2 + \frac{3}{4^2}\right)^2} \text{ donne après conversion } \frac{2 + (7 \times 5)^3 + 3 \times 2}{\frac{1}{4} + \left(2 + \frac{3}{4^2}\right)^2} \approx 8516.717$$

On peut utiliser d'autres fonctions mathématiques.

$$\frac{\ln(3) + \sqrt{5}}{3} \text{ donne } \frac{\ln(3) + \sqrt{5}}{3} \approx 1.112$$

Fluidmath

Fluidmath est un logiciel dédié à la résolution d'équations, le calcul algébrique et le tracé de courbes. Il a une version en ligne et une autre comme application de bureau. On le trouve dans les trois environnements de tablettes ou d'ordinateurs tactiles.

Il a été développé initialement par une université américaine, qui a créé ensuite une structure commerciale. C'est donc un logiciel payant. Il existe une version gratuite dans laquelle il n'est pas possible de faire des calculs d'intégrales ou de dérivées par exemple. C'est celle-ci que nous utiliserons ici.

Donnons quelques exemples.

Le principe est celui d'une conversion en temps réel de l'encre numérique :

$$7x^2 + 3x - 13 = 0$$

$$7x^2 + 3x - 13 = 0$$

Il suffit ensuite d'écrire x suivi d'une flèche pour avoir le résultat sous forme exacte.

$$x \rightarrow \begin{aligned} x &= -\frac{3}{14} + \frac{\sqrt{373}}{14}, \\ x &= -\frac{\sqrt{373}}{14} - \frac{3}{14} \end{aligned}$$

Pour une équation plus complexe, on peut obtenir un résultat exact peu utilisable.

$$\ln(x) + x = 2$$

$$\ln(x) + x = 2$$

$$x \rightarrow x = \text{LambertW}(e^2)$$

On peut alors facilement déterminer une valeur approchée en utilisant l'instruction x suivie d'une double flèche.

$$x \Rightarrow x = 1.55714559899761$$

On peut également résoudre un système comme le montre l'exemple suivant.

$$2a + 3b - 7c = 1$$

$$2a + 3b - 7c = 1$$

$$a - b + 3c = -2$$

$$5a + 4b + c = 8$$

Pour résoudre le système, il suffit d'écrire

$$a, b, c \rightarrow \begin{aligned} b &= \frac{104}{47}, a = -\frac{65}{47}, \\ c &= \frac{45}{47} \end{aligned}$$

Pour suivre, voici quelques exemples de calculs algébriques

$$\frac{2a^3b^{-2}}{3a^{-1}b^5} \rightarrow \frac{2a^4}{3b^7}$$

Les simplifications sont automatiques, ce qui donne parfois des réponses inattendues.

$$(x-2)(2x+1) - (x-2)^2 \rightarrow x^2 + x - 6$$

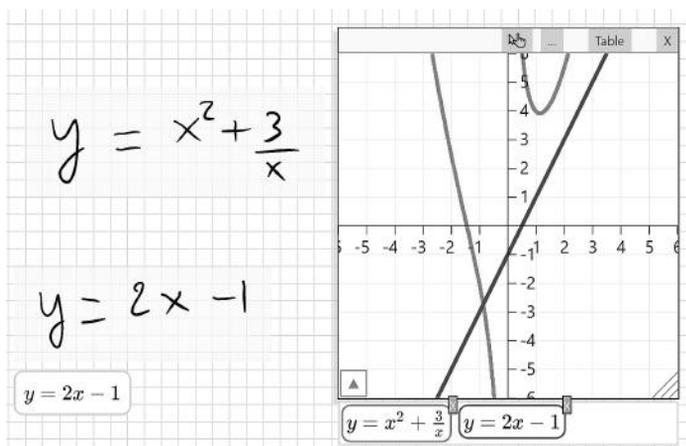
$$x^2 + x - 6 \rightarrow (x-2)(x+3)$$

Un autre exemple

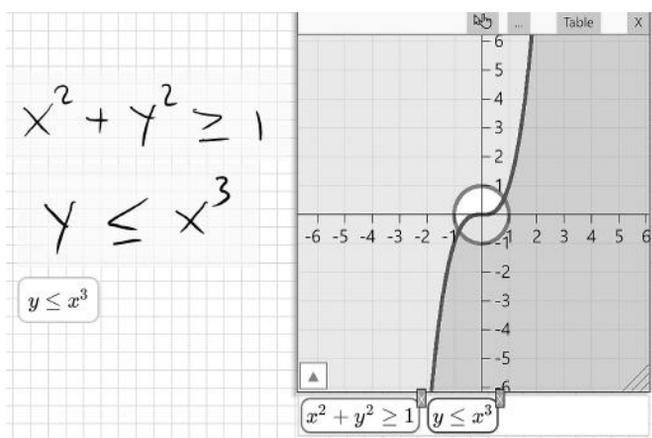
$$\frac{1}{x+1} + \frac{2x}{(x+1)^2} \rightarrow \frac{3x+1}{(x+1)^2}$$

$\frac{1}{x+1} + \frac{2x}{(x+1)^2} \rightarrow$

Sur le plan graphique, fluidmath a une réelle efficacité :



Il est aussi facile d'obtenir des représentations graphiques d'inégalités.



Comme on peut le remarquer sur les deux exemples précédents, on peut obtenir une table des valeurs pour les expressions tracées.

OneNote

OneNote est apparu en 2003 dans la suite Office de Microsoft. À cette époque, des ordinateurs tactiles, appelés Tablet PC, étaient commercialisés sous Windows. Destinés initialement à un public professionnel, ils restèrent relativement confidentiels.

Petit à petit, Microsoft a fait évoluer OneNote vers l'éducation et en particulier comme assistant pour la dyslexie.

Depuis quelques années, OneNote se présente sous deux formes : l'une est toujours un logiciel de la suite Office, l'autre est une version gratuite, disponible dans tous les environnements tablettes.

Les deux versions ont des caractéristiques communes, mais aussi bon nombre de différences. Contrairement à ce que l'on rencontre habituellement, la version gratuite n'est pas moins complète que l'autre, elle est différente.

Sur le plan mathématique, depuis mars 2017, dans la version Windows 10, elle possède des fonctionnalités intéressantes qui n'existent pas sur la version de la suite Office.

On peut penser que ces fonctionnalités seront à court terme présentes sur Ipad et sur tablette Android.

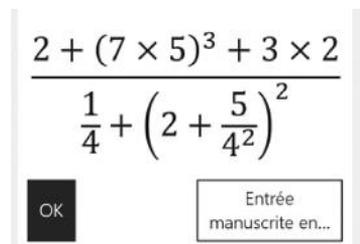
Nous ne décrivons pas ici les caractéristiques diverses de OneNote qui sont pour la plupart d'un certain intérêt pédagogique pour nous attacher uniquement à celles qui concernent les mathématiques.

Depuis leur apparition, il y a quelque mois, elles ont évolué sans cesse. On peut donc considérer que l'on en est encore à une version beta. Comme l'on pourra s'en rendre compte, les menus sont actuellement en anglais alors que, dans la première version, moins riche sur le plan mathématique, ils étaient en français. Il faut espérer que ce problème, pas très gênant au demeurant, sera résolu dans l'avenir.

Dans l'onglet « dessin », on trouve un menu « mathématiques ». On écrit l'expression au stylet ou au doigt (ou encore une fois à l'aide d'un pavé extérieur si l'on ne possède pas un ordinateur tactile). On la sélectionne (éventuellement à la souris).

$$\frac{2 + (7 \times 5)^3 + 3 \times 2}{\frac{1}{4} + \left(2 + \frac{5}{4^2}\right)^2}$$

On appuie alors sur le menu mathématique.
On obtient ceci :



$$\frac{2 + (7 \times 5)^3 + 3 \times 2}{\frac{1}{4} + \left(2 + \frac{5}{4^2}\right)^2}$$

OK Entrée manuscrite en...

Au-dessous de cet écran, on peut sélectionner une action. La seule action disponible est « évalue ».

Un résultat apparaît : $\frac{10978048}{1433}$

Immédiatement au-dessous, une nouvelle proposition : « Afficher les étapes ». Puis « solution steps ». Si l'on choisit cette option, les étapes du calcul sont décrites (en anglais pour l'instant, mais cela reste très compréhensible).

Voici par exemple deux étapes proposées :

- Add 2 and $\frac{5}{16}$ to get $\frac{37}{16}$

$$\frac{1}{4} + \left(\frac{37}{16}\right)^2$$

- Calculate $\frac{37}{16}$ to the power of 2 and get $\frac{1369}{256}$

$$\frac{1}{4} + \frac{1369}{256}$$

Il faut noter qu'aussi bien le résultat que les calculs intermédiaires peuvent être déplacés dans la feuille OneNote, puis être copiés dans un traitement de textes.

Examinons ce qui passe pour une équation du second degré :

$$2x^2 + 3x - 13 = 0$$

Ici, le menu contextuel est beaucoup plus fourni, puisqu'on peut résoudre l'équation de façon exacte ou utiliser une représentation graphique.

$$x = \frac{-\sqrt{113} - 3}{4} \text{ or } x = \frac{\sqrt{113} - 3}{4}$$

Là encore, un menu « afficher les étapes » est proposé. Il contient deux méthodes différentes.

Voici le début de chacune des méthodes :

Steps Using the Quadratic Formula ▾

- All equations of the form $ax^2 + bx + c = 0$ can be solved using the quadratic formula: $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. The quadratic formula gives two solutions, one when \pm is addition and one when it is subtraction.

$$2x^2 + 3x - 13 = 0$$

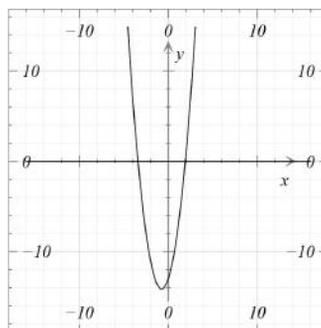
Steps Using the Quadratic Formula ▾

- All equations of the form $ax^2 + bx + c = 0$ can be solved using the quadratic formula: $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. The quadratic formula gives two solutions, one when \pm is addition and one when it is subtraction.

$$2x^2 + 3x - 13 = 0$$

Si l'on choisit l'aspect graphique, on obtient :

Une instruction permet d'insérer la courbe sur la page.



Examinons la résolution d'un système.

La seule possibilité offerte est la résolution de ce système :

$$(x = 1, y = -1)$$

$$\begin{cases} 2x + 5y = -3 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$$

Et, à nouveau, la possibilité d'afficher les étapes, avec cette fois-ci trois méthodes différentes : par substitution, par les matrices ou par élimination (c'est-à-dire par équilibrage des équations).

Évidemment, chacune des méthodes est appliquée dans le cadre de l'exemple proposé.

Par contre, OneNote ne parvient pas à rendre un résultat dans le cas d'un système d'inéquations, en particulier sur le plan graphique (ce que faisait Fluidmath).

Si l'on écrit un ensemble de valeurs :

$$\left\{ 2, \frac{1}{4}, 5, -3, 8 \right\}$$

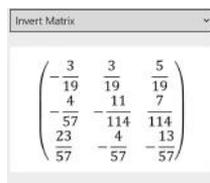
le logiciel offre la possibilité d'en calculer divers éléments statistiques, ou bien de les ranger par ordre croissant.

$$\left\{ -3, \frac{1}{4}, 2, 5, 8 \right\}$$

On peut également travailler avec des matrices :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -8 & -1 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

OneNote propose alors un menu assez fourni, comme par exemple le calcul du déterminant avec une proposition de calcul selon deux méthodes différentes : la règle de Sarrus ou la méthode des mineurs, ou encore la matrice inverse :



Dans le cas d'une expression algébrique, la logique de « menu » proposée par OneNote se révèle nettement plus efficace que celle de simplification automatique de Fluidmath.

$$(2x - 1)^2 - 4(x + 3)(4x - 2)$$

donnera suivant l'option choisie

Evaluate ▼

$$25 - 12x^2 - 44x$$

Differentiate w.r.t. x ▼

$$-24x - 44$$

Factor ▼

$$-(2x - 1)(6x + 25)$$

Integrate w.r.t. x ▼

$$-4x^3 - 22x^2 + 25x + C$$

On peut également représenter l'expression graphiquement.

Dans la plupart des cas, les dérivées sont calculées sans aucun détail, mais certains exemples permettent d'obtenir un calcul pas à pas :

On obtient en demandant de calculer la dérivée de cette fonction

$$\frac{5x - 1}{3x + 2}$$

Differentiate w.r.t. x ▼

$$\frac{13}{(3x + 2)^2}$$

Steps Using Derivative Rule for Quot... ▼

1. Use the rules of derivatives to find the derivative of the given function.

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{5x^1 - 1}{3x^1 + 2} \right)$$
2. For any two differentiable functions, the derivative of the quotient of two functions is the

Nous avons vu qu'il est possible de calculer des primitives, mais il peut être intéressant de calculer également des intégrales :

$$\int_a^{a^2} e^{3x+1} dx \quad \text{donne}$$

Evaluate ▼

$$\frac{e^{3a^2+1} - e^{3a+1}}{3}$$

On a bien

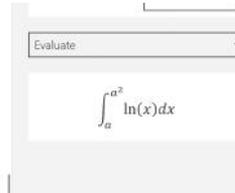
$$\int f_n(x) dx$$

Evaluate ▼

$$-x + x \ln(x) + C$$

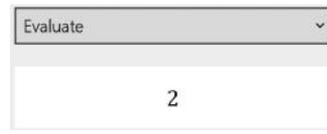
Mais très logiquement, le logiciel n'effectue pas le calcul suivant :

$$\int_a^{a^2} f_n(x) dx$$



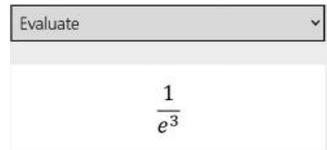
Examinons le calcul de quelques limites. Soit par exemple :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) \text{ On trouve}$$



Soit encore

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{n^2}\right)^{n^2} \text{ On trouve}$$



Il existe enfin dans OneNote une fonctionnalité graphique intéressante : la représentation d'une expression dépendant de paramètres.

$$y = a \ln(x) + b \sin(ax)$$

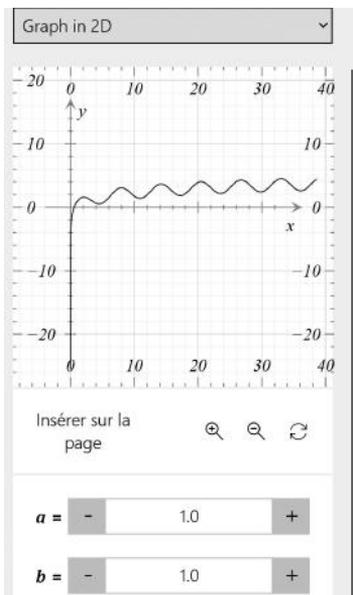
Le logiciel reconnaît a et b comme des paramètres et permet de les faire varier.

Fluidmath possède aussi cette fonctionnalité, mais elle est un peu plus délicate à mettre en œuvre.

En guise de conclusion

La reconnaissance de l'écriture mathématique ne date pas d'hier. Elle a déjà plus de dix ans. Microsoft a été précurseur en la matière. Le logiciel gratuit Microsoft Math 4.0 utilisait cette technologie. Il était un rescapé de la fameuse encyclopédie Encarta.

Tout au long de ces années, cette reconnaissance, première étape incontournable à une utilisation pédagogique efficace, s'est amélioré. S'il y a quelques règles à appliquer, elles sont de moins en moins contraignantes. Evidemment si l'on écrit vraiment mal, le résultat peut être surprenant. Mais en tant

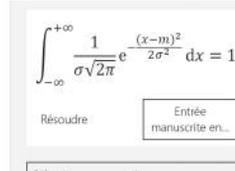


qu'enseignant, on peut se dire que ce que la machine ne reconnaît pas ne le sera pas vraiment plus par l'élève.

Nous avons avec Nebo une avancée intéressante d'une reconnaissance multiligne. A titre d'exemple, voici quelques formules plus complexes reconnues par OneNote ou Nebo.

Dans OneNote

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$



Avec Nebo,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

se transforme en

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

La première étape franchie, il s'agissait d'avoir des environnements permettant d'obtenir des résultats à des calculs, et donc de disposer d'outils numériques et/ou algébriques.

Sur ce plan, Fluidmath qui permet deux types de sorties est plus efficace que OneNote. Le logiciel de Microsoft ne peut d'ailleurs rien proposer si une équation n'admet pas de solutions exactes.

Même des expressions simples lui sont inaccessibles.

On peut toutefois obtenir une valeur approchée en tapant au clavier racine(2)= suivi d'un espace :

$$\text{racine}(2)=1,414213562373095$$



Les outils présentés ici ne sont pas capables de résoudre toutes les situations mathématiques rencontrées par les élèves, mais en fonction de ce que l'on cherche, ils sont efficaces dans nombre d'entre elles au moins dans le secondaire et dans le début de l'enseignement supérieur.

Ils peuvent être utilisés en classe par l'enseignant pour donner à voir certains points, ou bien de façon autonome par les élèves dans le cadre d'exercices répétitifs.

OneNote s'enrichit régulièrement de nouvelles fonctionnalités et déjà les nombreux « pas à pas contextualisés » sont des aides précieuses (même en anglais) pour le suivi d'un calcul. L'encre numérique est intrinsèquement liée aux tablettes et ordinateurs tactiles. Elle devrait devenir de plus en plus présente dans les prochaines années. Il importe d'être au courant de ses avancées.

Les solutions proposées ne prétendent pas à l'exhaustivité (je n'ai par exemple pas parlé ici d'un logiciel payant spécifique aux iPad « MathPad »). Je me suis attaché à mettre en avant des ressources gratuites et si possibles présentes sur tous les modèles de tablettes. D'autres peuvent exister que je ne connais pas et je serai enchanté si un lecteur me donnait l'occasion d'en découvrir une nouvelle.