Neper a-t-il inventé les logarithmes népériens ?

André Bonnet (*)

Les logarithmes, en réduisant les calculs de quelques mois à quelques jours, doublent quasiment la vie des astronomes.

Laplace (1749 ; 1827).

Cet article a été écrit à la suite d'une des conférences données lors de la « Journée Régionale APMEP » d'Aix-Marseille 2017.
C'est un hommage à Neper qui a consacré une bonne partie de sa vie à l'amélioration des moyens de calculs.

Souvenirs d'enfance

Les logarithmes, pour moi, c'est un peu comme la potion magique pour Obélix ; je les ai connus depuis ma plus tendre enfance.
Mon père, qui avait commencé sa carrière comme géomètre[1] du cadastre, rapportait souvent du travail à la maison. Je me souviens, alors que j'avais tout juste cinq ans et que je commençais à apprendre à lire, avoir été très intrigué par un livre, couvert de chiffres et par une règle magique qui permettait de faire des multiplications et même des divisions.
Ce livre, qui m'intriguait tant, était une table de logarithmes[2] et la règle, munie d'une partie coulissante, une règle à calcul.
J'ai su très vite manipuler cette règle. Je l'utilisais pour vérifier les opérations que je faisais à la main —si toutefois elles n'avaient pas un trop grand nombre de chiffres— car, dans ce cas, pour aller un peu plus loin, le recours à la « table de log » s'imposait.
Arrivé en classe de seconde, ma dextérité dans le maniement de ces deux moyens de calcul —qui faisaient désormais partie des fournitures scolaires— fut tout de suite repérée par mon professeur de physique. Celui-ci, ayant perdu l'usage du bras gauche à la guerre, était bien content de me sous-traiter toutes les applications numériques.

(*) andre.bonnet9@orange.fr

[1] Il pratiquait la géométrie, au sens étymologique du terme : il mesurait la terre, cultivée par les agriculteurs du haut pays niçois, avec sa planchette, son décamètre, son théodolite…
[2] Vu la perplexité des jeunes collègues, lors de ma conférence, lorsque j'ai montré ces deux pièces de musées, cette précision n'est sans doute pas inutile pour les nouvelles générations.

Je m'acquittais de cette tâche avec un plaisir non dissimulé, car il me prêtait sa règle qui mesurait cinquante centimètres (la mienne n'en faisait que vingt-sept), ce qui procurait un grand confort de lecture et une précision accrue.
La « table de log » la plus courante était celle de Bouvard et Ratinet ; c'était une table de logarithmes décimaux à cinq décimales[3].
Je savais, par mon père, que l'invention des logarithmes était l'œuvre d'un certain Neper et qu'il existait d'autres logarithmes : les logarithmes népériens, qui ne figuraient pas dans la table de Bouvart et Ratinet, mais qui pouvaient s'obtenir facilement[4] car la valeur de *e* et son logarithme décimal figuraient, en première page de la table, dans le tableau des nombres usuels.

Ma grande frustration en classe de « Math élem »

En Math élem (la terminale scientifique de l'époque), l'étude des logarithmes était au programme. Le manuel, que j'avais regardé avant même la rentrée, expliquait très clairement comment on pouvait fabriquer, par insertion de moyennes géométriques et de moyennes arithmétiques, une table de logarithmes de base quelconque. Ce travail ne nécessitait que des divisions par deux et le calcul de racines carrées. Or, nous avions l'obligation de connaître l'algorithme d'extraction de racines carrées, à la main bien sûr. La réalisation d'une table de logarithmes décimaux n'était donc qu'une question d'endurance dans la conduite des très très longs calculs.
Ayant perdu les manuels que j'avais à l'époque[5], je crois me souvenir qu'on établissait une version tabulée de la fonction logarithme décimal, puis on passait à la version continue par « interpolation/extrapolation » et ensuite aux autres fonctions logarithmes : toutes les fonctions qui transforment les produits en somme, parmi lesquelles figurait la fonction logarithme népérien. Cette denière se distinguait des autres car elle fournissait une primitive de la fonction inverse.
On signalait au passage qu'elle s'appelait ainsi à cause d'un certain Neper qui avait, il y a fort longtemps, établi une table donnant les valeurs de cette fonction.
Le cours de mon professeur étant conforme à celui de mon manuel, je me souviens très bien d'être allé, à la fin, lui demander des précisions sur la manière dont Neper avait bien pu conduire ses calculs. J'ai encore en mémoire quelques bribes de notre conversation :

- moi : *Monsieur, j'ai bien compris vos explications concernant la fabrication des tables de logarithmes décimaux, mais comment Neper a-t-il fait pour calculer les nombres de sa table ?*
- mon professeur : ben ! heu !... *il a pris une autre base,*
- moi : ha ! *laquelle ?*
- mon professeur : *la base e*

[3] Une sixième décimale pouvait être obtenue, par interpolation, grâce à un petit tableau de correspondance figurant en marge.
[4] La relation entre les deux logarithmes étant $log_{10}(x) = k \times ln(x)$, il suffisait de diviser les logarithmes décimaux par la constante $k = log_{10}(e) = 0{,}43429$; d'autres tables, celles de « valeurs naturelles » de Flavien, par exemple, fournissaient sans calcul les logarithmes népériens dont nous avions rarement besoin.
[5] Lespinard et Pernet, édition des années cinquante.

- moi : *vous voulez dire le nombre e = 2,7… et je ne sais plus quoi ?*
- mon professeur : *oui c'est ça,*
- moi : *vous n'allez pas me faire croire que Neper a eu en songe la révélation que la bonne valeur à prendre pour avoir une primitive de la fonction inverse était cette valeur…*
- mon professeur —pour couper court— : *tu ne peux pas comprendre… Tu verras ça quand tu seras en spéciales ou à la fac…*

Il est inutile de vous dire que la suite de notre conversation fut émaillée de quelques propos irrespectueux, qu'il est préférable de ne pas reproduire ici, mais qui étaient en proportion de ma grande frustration. Après cet échange, un peu vif, nos relations ont été un peu tendues et nous sommes restés en froid pendant quelque temps.
Comme vous pouvez l'imaginer, je n'ai pas eu de réponse l'année suivante en Math Sup, ni au cours de mes études universitaires.

Le Bulletin Vert de l'APMEP numéro 299

Ce n'est qu'en juin 1975, en ouvrant le numéro 299 du Bulletin Vert de l'APMEP, que j'ai eu, enfin, une réponse en découvrant l'article de Gilbert ARSAC « Histoire de la découverte des logarithmes ». Voici la conclusion[6] de son article :

> Il était temps sans doute de rédiger à l'intention des membres de l'A.P.M. cet article : si la fonction logarithme népérien a encore, pour des raisons évidentes, un bel avenir devant elle, l'usage des tables de logarithmes semble menacé à très court terme par la diffusion des moyens de calcul modernes, y compris au niveau de l'école (personne ne s'en plaint...). Or, c'est par l'intermédiaire de ces tables que le mot de logarithme est connu largement, et le mode de calcul de ces tables intrigue à juste titre les utilisateurs. Il était donc temps d'en parler, avant que le progrès technique (et les lois de la nature) restreignent par trop le public intéressé.

Dans le début de son article, Arsac explique le principe des logarithmes décimaux, ce qui permet, plus généralement, de se faire une idée précise des calculs à mener pour obtenir une table de logarithmes de base quelconque.
Les gens de ma génération apprenaient l'algorithme permettant d'extraire « à la main » les racines carrées. Il n'y avait donc aucun obstacle théorique à la fabrication d'une table de logarithmes (de base 10 par exemple), si ce n'est le volume et la pénibilité des calculs.
Arsac signale, en bas de la page 284, qu'un horloger suisse, un certain Bürgi, mathématicien à ses heures, avait publié en 1620 une table de logarithmes dont, je cite : « le principe[7] semble bien avoir été celui que nous avons exposé ».

---

[6] On peut noter que, pour Arsac en 1975, l'APMEP est encore l'APM, sigle qui n'aurait jamais dû être abandonné puisque nos collègues du privé y sont accueillis.
[7] Nous verrons que cette affirmation n'est pas tout à fait exacte.

Le but de cet article est d'examiner, en premier, si ce que dit Arsac au début du paragraphe 3 de la page 285 : « la première table de logarithme, due à l'Écossais Neper et parue[8] à Édimbourg en 1614, est non pas une table de logarithmes décimaux mais, bel et bien, une table de logarithmes népériens à sept décimales. » est conforme à la réalité. Plus précisément, j'examinerai si la fonction tabulée par Neper dans « *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* » est identique à notre fonction *ln*.
Dans une deuxième partie, j'étudierai la contribution de Jost Bürgi, à la lumière de deux nouvelles publications ([1] et [2] de la bibliographie) datant respectivement de 2014 et 2015, ce qui devrait permettre au lecteur de savoir : « si Neper est bien le premier et le seul inventeur des logarithmes ».

La fonction tabulée par Neper est-elle la même que notre fonction *ln* ?

En 1614, Néper publie, à compte d'auteur, le résultat d'un travail de plus de vingt ans : « *Mirifici logarithmorum canonis descriptio ».* Cet ouvrage comporte 57 pages de texte, réparties en deux livres ayant respectivement cinq et six chapitres et, à la fin, 90 pages de tables.

L'ambition de Neper est de faciliter le travail des astronomes et des navigateurs et de tous ceux qui ont à faire de fastidieux calculs notamment, pour les premiers, la résolution de triangles sphérique. C'est pourquoi Neper élabore une table de logarithmes des sinus des arcs de 0° à 90°, de minute en minute.
L'ouvrage est en latin, la langue des savants de l'époque. Sur la page de garde[9], même le nom de Neper est latinisé, on peut y lire : *Ioanne Nepero*. Ni le livre I, ni le livre II ne comporte de sommaire, mais celui du livre I peut être facilement reconstitué, en français, à partir des têtes de chapitres.
Sommaire du livre I

Chap. 1. Définitions [entre autres *des nombres logarithmes*].

Chap. 2. Propositions sur les logarithmes.
Chap. 3. Description complète de la table des logarithmes et des sept colonnes de celle-ci.
Chap. 4. L'usage de la table et des nombres de celle-ci.
Chap. 5. L'usage plus approfondi des logarithmes et de leur pratique.

L'obstacle de la langue fait qu'on ne peut guère espérer avoir une réponse à la question posée en examinant la définition 6 du chapitre 1, dans laquelle Neper définit ses nombres logarithmes[10].
C'est pourquoi on peut, dans un premier temps, recourir à une approche pragmatique : tester au hasard, avec une calculette, une ou des valeurs proposées dans la table.

[8] Dans « *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* » : Description de la merveilleuse règle des logarithmes.
[9] Voir annexe 2 sur le site de l'APMEP.
[10] Précisons que le mot « logarithme » a été créé par Néper lui-même, à partir de deux racines grecques, λογος (logos) et αριθμος (arithmos) la première se traduit par raison/rapport et la deuxième concerne tout ce qui est nombre (entier). Ainsi, le logarithme de Néper est le « nombre du rapport ».

Par exemple, si on prend dans l'avant-dernière page de la table[11], l'arc $\theta = 44°\ 29'$, on a :
- *dans la table de Néper, lu pour le sinus :* 7007018 *et pour le log :* 3556728
- *avec la calculette, obtenu pour le sinus :* 0,7007018785 *et pour le log :* - 0,355672934

Ceci montre que, si on ne regarde que les mantisses[12], les sept chiffres significatifs du sinus et les six premiers chiffres significatifs du logarithme sont identiques ; la différence, pour les logarithmes, n'étant que d'une unité pour le septième chiffre.
Après ce test, on est conduit à penser que la fonction tabulée par Néper est identique à la fonction logarithme népérien ; celle que nous notons *ln*.
Ce serait une erreur, car le sinus de notre calculette n'est pas le même que celui utilisé par Neper.

Le sinus utilisé par les mathématiciens du début du XVII^e^ siècle

Le sinus, à cette époque, n'est pas un nombre[13] —sans dimension, comme disent les physiciens— mais une grandeur[14] : c'est la demi-corde de l'arc double, dans un cercle de rayon en général assez grand. Pour Neper, qui dispose de tables trigonométriques à sept chiffres, ce rayon est pris égal à 10^7, de façon à pouvoir exprimer la mesure de la demi-corde par un nombre entier à une unité près.
Si on note *Sin* la fonction sinus donnée par Neper dans sa table et par *sin* la fonction sinus de la calculette, on a pour un même arc θ mesuré en degrés : $Sin(\theta) = 10^7\, sin(\theta)$.

Une première conjecture

Bien que le concept de fonction[15] ne soit pas encore dégagé au début du XVII^e^ siècle, on peut interpréter la table de Neper comme une version tabulée d'une, ou même de deux fonctions.
L'une, que nous noterons *Nlog,* qui associe à un sinus son logarithme, l'autre qui, à un arc, associe le logarithme de son sinus et qui n'est autre que la fonction composée *Nlog* o *Sin*.

---

[11] Celle qui concerne les arcs compris entre 44° et 44° 30', voir l'extrait donné à l'annexe 3 sur le site de l'APMEP.
[12] Dans une table de logarithmes ou trigonométrique, il est d'usage de ne mettre que la partie après la virgule (la mantisse), la partie entière (la caractéristique) étant évaluée à partir du contexte.
[13] Depuis l'antiquité grecque jusqu'au XVII^e^ siècle, l'appellation « nombre » est réservée aux entiers.
[14] Les grandeurs sont souvent géométriques : segments de droite, circonférence d'un cercle, carré, rectangle, cercle... Les pythagoriciens savaient que la proportion entre la diagonale d'un carré et son côté ne peut être décrite par des nombres entiers ; c'est ce que nous traduisons par $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel ». Dans cette dernière assertion, le mot nombre est sous-entendu avec son sens moderne.
[15] Ce terme apparaît dans l'expression « une grandeur est fonction d'une autre grandeur » ; par exemple, la corde est fonction de l'arc quelle sous-tend, ce qui a pour conséquence que la demi-corde (donc le sinus) est, elle aussi, fonction de l'arc.

Le test fait avec la calculette permet de faire la conjecture suivante :

$$N\,log\left(X\right) = -10^7\,ln\left(\frac{X}{10^7}\right) = 10^7\left[7\times ln\left(10\right) - ln\left(X\right)\right]$$

La démonstration de cette relation, à partir des définitions données par Neper, va faire l'objet des paragraphes suivants.

La traduction anglaise de *Descriptio* publiée en 1616

La *Descriptio*[16], l'ouvrage de 1614, a eu un tel succès auprès de ceux qui avaient de fastidieux calculs à faire qu'il fut rapidement épuisé. Très vite, le mathématicien Briggs, titulaire d'une chaire de mathématiques à Londres, spécialisée dans les mathématiques appliquées à l'astronomie et la navigation, comprend l'importance du travail de Neper. Briggs rencontrera celui-ci à deux reprises, en 1615 et 1616, et ne pourra le voir, comme il le souhaitait, au printemps 1617 à cause du décès de Neper le 24 avril. Briggs convaincra son ami Edward Wright d'entreprendre une traduction en anglais, plus adaptée aux utilisateurs. Cette traduction paraîtra en 1616 sous le titre « *A description of the admirable table of logarithmes* ».
L'accueil de la *Descriptio* par les mathématiciens professionnels fut très mitigé. À l'enthousiasme de Kepler, qui découvre en 1617 ce nouveau moyen de faire des calculs beaucoup plus rapidement, notamment dans l'élaboration de ses « tables rudolphines », on peut opposer le scepticisme de son maître Maestlin qui, ne sachant pas comment ces nombres ont été obtenus, est très méfiant.
La correspondance de Kepler avec son maître est assez savoureuse :

- Kepler écrit à son maître que les logarithmes de Néper lui permettent de gagner beaucoup de temps,
- Maestlin répond qu'il faut être prudent, car on ne sait pas comment sont obtenus[17] ces « nombres logarithmes ».

Sans se décourager, Kepler revient à la charge :

- dans une lettre à son maître, il insiste lourdement sur le gain de temps et la fiabilité des calculs faits avec les logarithmes de Neper, ce qui lui vaut la réponse cinglante de son maître,
- il n'est pas digne d'un mathématicien de rechigner à faire des calculs.

L'étude des définitions à partir de la traduction anglaise de *Descriptio*

L'obstacle du latin peut être facilement contourné en étudiant le texte de Neper dans la traduction anglaise d'Edward Wright datant de 1616.
Au début du XVII^e siècle, la notion de vitesse est floue. La vitesse instantanée ne peut

---

[16] C'est ainsi que nous nommerons l'ouvrage de 1614 dont le titre complet est : « *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* ».
[17] Tout en poursuivant son travail sur sa table, Neper a rédigé en grande partie de quoi publier un deuxième ouvrage, expliquant les détails de ses méthodes de calculs, mais son décès contrariera ce projet. Son fils Robert complétera les notes de son père, aidé de Briggs, et c'est en 1619 que paraîtra « *Mirifici logarithmorum canonis constructio* ».

être définie rigoureusement car le concept de dérivée ne sera dégagé que bien plus tard, par Newton[18] et par Leibniz[19].
Dans les définitions[20] du chapitre 1, on peut voir comment Neper évite la notion de vitesse, notamment pour définir le mouvement uniforme.

Définition 1

« Une ligne est dite croître également (uniformément) quand le point décrivant cette ligne parcourt des distances égales en des temps égaux ».

Définition 2

« Une ligne est dite décroître proportionnellement en une plus courte, quand le point décrivant cette même ligne découpe, en des temps égaux, des lignes continuellement proportionnelles ».

L'idée de Neper est de définir ses nombres logarithmes à partir de deux mouvements, l'un uniforme, l'autre uniformément décéléré. La traduction des conditions imposées à ces deux mouvements par des propriétés géométriques permettra de mieux comprendre ces deux définitions.
La définition 3 traite des quantités (*Surds quantities or inexplicable by number*) qui ne peuvent pas être exprimées à l'aide d'entiers et qui, de ce fait, seront approchées par des entiers à l'unité près, ce qui n'est pas grave car ce sont de grands nombres, donc l'erreur relative est très faible.
Les définitions 4 et 5 sont destinées à préciser des notions de mécanique : mouvements simultanés, comparaison de mouvements par leurs vitesses…

Définition 6

« Le logarithme de tout sinus est, par conséquent, un nombre très proche de celui exprimant la ligne, qui croît également dans le même temps, tandis que la ligne du sinus total diminue proportionnellement en ce sinus, les deux mouvements commençant au même instant et ayant au début la même vitesse ».

Pour comprendre cette définition, on peut utiliser la figure suivante :

Dans ce schéma, les grandeurs $AM = x$ et $mz = y$ dépendent du temps, puisque M est animé d'un mouvement uniforme et m d'un mouvement retardé assujetti à des conditions de proportionnalité.
Cette dépendance par rapport au temps induit une relation entre les grandeurs x et y qui permet de considérer que x est fonction de y, ce que nous traduirons, selon nos habitudes, en notant *Nlog* cette fonction, qui est en réalité la fonction tabulée par Neper.
On peut donc écrire : $Nlog(y) = x$.

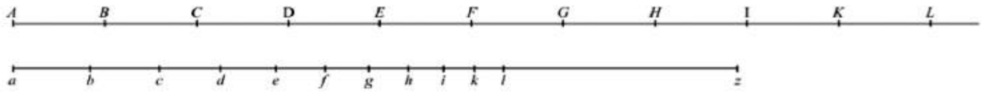
[18] Newton : « *De metodis fluxionum et serierum infinitarum* », manuscrit en latin terminé en 1671 mais publié beaucoup plus tard (1736) dans une traduction anglaise de Colson.
[19] Leibniz : « *Acta Eruditorium, Nova methodus pro maximis et minimis* » - 1691.
[20] Voir annexe 4, traduction anglaise de 1616 du chapitre 1, sur le site de l'APMEP.

L'idée géniale de Neper

Pour passer du discret au continu, ou du continu au discret, Neper utilise deux mouvements commençant au même instant et ayant au départ la même vitesse :

- l'un uniforme, (s'effectuant sur la première ligne du schéma ci-dessous), caractérisé par la condition qu'en des temps égaux les distances parcourues soient égales,
- l'autre, décéléré (s'effectuant sur la deuxième ligne), oblige à respecter la condition de proportionnalité suivante : *ayant choisi le sinus total* $az = 10^7$*, si on représente les positions des deux mobiles, à des intervalles de temps égaux, par les lettres A, B, C,… et a, b, c,… on doit avoir :*

$$AB = BC = CD = \dots \text{ et } \frac{bz}{az} = \frac{cz}{bz} = \frac{dz}{cz} = \dots$$



Les points marqués sur ce schéma sont les positions des deux mobiles à des instants régulièrement espacés. Le choix de la base de temps étant arbitraire, on a la possibilité d'obtenir des positions plus ou moins distantes, ce qui est intéressant pour la précision, dans l'optique de la constitution d'une table.

Une interprétation moderne des définitions

Pour bien comprendre les conséquences de ces définitions, on peut traduire tout cela en langage moderne.

Si on reprend les notations du paragraphe précédent, en désignant par x la distance AM et par y la distance mz, et si on suppose, de plus, que x et y sont deux fonctions dérivables par rapport au temps, on peut traduire les contraintes de ces deux définitions par :

$$(1) \quad \forall\, h \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, K \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, t \in \mathbb{R}_+,\ x(t+h) - x(t) = K\,,$$

$$(2) \quad \forall\, h \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, k \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, t \in \mathbb{R}_+,\ y(t+h) / y(t) = k\,.$$

De la première condition on tire, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$x\left(t+\frac{h}{n}\right) - x(t) = x\left(t+2\frac{h}{n}\right) - x\left(t+\frac{h}{n}\right) = \dots = x\left(t+n\frac{h}{n}\right) - x\left(t+(n-1)\frac{h}{n}\right),$$ ce qui donne

$$K = x(t+h) - x(t) = \sum_{j=1}^{n}\left[x\left(t+j\frac{h}{n}\right) - x\left(t+(j-1)\frac{h}{n}\right)\right] = n\left[x\left(t+\frac{h}{n}\right) - x(t)\right],$$

puis $x\left(t+\frac{h}{n}\right) - x(t) = \frac{K}{n}$ qui, après division par $\frac{h}{n}$, permet d'écrire :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad \frac{x\left(t+\frac{h}{n}\right)-x(t)}{\frac{h}{n}}=\left(x\left(t+\frac{h}{n}\right)-x(t)\right)\frac{n}{h}=\frac{K}{h}.$$

Enfin, en faisant tendre n vers l'infini, on obtient $\dot{x}(t)=\frac{K}{h}$.

On retrouve ainsi la définition d'un mouvement uniforme comme mouvement dont la vitesse instantanée[21] est constante.

La deuxième condition permet d'écrire, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{y\left(t+\frac{h}{n}\right)}{y(t)}=\frac{y\left(t+2\frac{h}{n}\right)}{y\left(t+\frac{h}{n}\right)}=\ldots=\frac{y(t+h)}{y\left(t+(n-1)\frac{h}{n}\right)}$$

$$k=\frac{y(t+h)}{y(t)}=\frac{y\left(t+\frac{h}{n}\right)}{y(t)}\times\frac{y\left(t+2\frac{h}{n}\right)}{y\left(t+\frac{h}{n}\right)}\times\ldots\times\frac{y(t+h)}{y\left(t+(n-1)\frac{h}{n}\right)}=\left(\frac{y(t+h)}{y(t)}\right)^n$$

donc $$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad \frac{y\left(t+\frac{h}{n}\right)}{y(t)}=k^{\frac{1}{n}},$$

ce qui donne $$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad \frac{y\left(t+\frac{h}{n}\right)-y(t)}{h\frac{y(t)}{n}}=\frac{n}{h}\left(k^{\frac{1}{n}}-1\right),$$

puis, en faisant tendre n vers l'infini et en utilisant un DL de $k^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}ln(k)}$:

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)}=\frac{1}{h}\lim_{n\to\infty} n\left(k^{\frac{1}{n}}-1\right)=\frac{ln(k)}{h}=-C.$$

Remarque : la constante – C est positive, car la valeur de k est inférieure à 1.

---

[21] La définition rigoureuse de la notion de vitesse instantanée n'est évidemment pas possible au début du XVII[e] siècle. Il semble que Neper ait une notion intuitive de ce concept assez proche de la réalité.

Le problème différentiel[22] posé et résolu par Neper

En termes modernes, le résultat obtenu au paragraphe précédent montre que la fonction y est solution de l'équation différentielle $\dot{y}+Cy=0$, dont les solutions sont :

$$y = A\,exp\left(-Ct\right).$$

La condition initiale $y(0) = az$ donne $A = az$.
L'autre condition est que les deux mouvements aient, au départ, la même vitesse. Or, le point m est repéré par la distance $am = (1 - y(t))$, donc sa vitesse est $-\dot{y}\left(t\right)$.

La deuxième condition initiale se traduit par : $\dot{x}\left(0\right)=-\dot{y}\left(0\right)=CA$.

Le mouvement uniforme ayant la vitesse CA, la loi horaire de ce premier mouvement est : $x(t) = CA\,t$.

Conclusion

On a entre x et y la relation $y = A\,exp\left(-\dfrac{x}{A}\right)$ ou encore $x=-A\,ln\left(\dfrac{y}{A}\right)$.

Avec $A = az = 10^7$, la solution trouvée par Neper (sous forme tabulée et notée $Nlog$) est $N\,log\left(X\right)=-10^7\,ln\left(\dfrac{X}{10^7}\right)=10^7\left[ln\left(10^7\right)-ln\left(X\right)\right]$.

Remarque

Les valeurs de X que Neper utilise sont des sinus, elles sont toutes inférieures ou égales au sinus total, c'est-à-dire à 10^7; donc les valeurs correspondantes de $Nlog(X)$ figurant dans la table de Neper sont toutes positives (et arrondies à l'unité près).

Les propriétés de la fonction *Nlog* tabulée par Neper

Le chapitre 2 est consacré aux propriétés des logarithmes. On y trouve, notamment, deux propriétés énoncées sous forme de propositions.

Proposition 1

« Les logarithmes de nombres (ou quantités) proportionnel(le)s sont d'égales différences ».

Proposition 2

« Pour les logarithmes de trois nombres proportionnels, le double du second diminué du premier est égal au troisième ».

---

[22] Le point de vue adopté dans le paragraphe précédent est celui que Neper adopte dans *Descriptio* où la vitesse n'est utilisée qu'au départ pour exiger que les deux mouvements aient la même vitesse. Il semble que ce point de vue ait évolué car on trouve dans *Constructio* la référence à la vitesse suivante :

> **25.** *Thus the moving point approaching the fixed point geometrically has its velocities as the distances from the fixed point.*

Mais on sait que *Constructio* est une œuvre posthume où la part à attribuer à Neper, à son fils ou à Briggs est difficile à faire.

On a vu que la fonction *Nlog* ne transforme pas les produits en sommes ; mais ce n'est pas la préoccupation première de Neper.
En effet, la propriété ci-dessus est tout aussi intéressante dans le cadre de la théorie des proportions.

Conséquence de la proposition 2

Soit a, b, c trois nombres en proportion $\left(\frac{c}{b}=\frac{b}{a} \text{ ou encore } b^2=ac\right)$, on a :

$$Nlog(b) - Nlog(a) = Nlog(c) - Nlog(b)$$

ou encore : $$2Nlog(b) - Nlog(a) = Nlog(c)$$

Cette dernière relation est très adaptée à la résolution des triangles, comme le montre Neper au chapitre 1 du livre II[23].

Les autres contributions

L'association de deux progressions, l'une arithmétique, l'autre géométrique, est une idée qui a été évoquée bien avant la fin du XVI^e siècle, notamment par :
Archimède (-287 ; -212), *l'arénaire* : $10^p \times 10^q = 10^{p+q}$
Chuquet (1445 ; 1488), *le Triparty en la science des nombres* (manuscrit 1484, publication 1870)
Stiffel (1486 ; 1567), *l'Arithmetica Integra* (1544) : $a^p \times a^q = a^{p+q}$
Stevin (1548 ; 1620), *Tafelen van interest* (1582), *De Theinde* ou *La Disme* (1585)

La publication de la *Descriptio* a été suivie d'autres publications sur les logarithmes :
Briggs (1556 ; 1630), *Logarithmorum Chilias prima* (1617) : tables de nouveaux logarithmes décimaux (1000 valeurs avec quatorze décimales)
Bürgi (1552 ; 1632), *Arithmetische und Geometrische Progress Tabulen* (1620)
Briggs (1556 ; 1630), *Arithmetica logarithmica* (1624) : logarithmes de 30 000 nombres avec quatorze décimales (de 1 à 20 000 et de 90 001 à 100 000)
Kepler (1571 ; 1630), *Chilias logarithmorum* (1624) : table de log des nombres de 1 à 1000
Vlacq (1600 ; 1667) : complément de la table de Briggs (1628).

Certains prétendent que ce n'est pas Neper qui est l'inventeur des logarithmes, mais l'horloger et mathématicien suisse Jost Bürgi qui, avant 1604, avait calculé plus de 23000 termes d'une progression géométrique de raison 1,0001 associée à une progression arithmétique de raison 10.

Le rôle de Bürgi (1552 ; 1632)

Jost Bürgi est un contemporain de Neper, né en 1552 à Lichtenteig dans la vallée de Toggenbourg (canton de Saint-Gall, Suisse). Son père est horloger et c'est dans l'atelier de son père qu'il apprend le métier après de courtes études.
De 1579 à 1604, il fut l'astronome du Landgrave[24] Guillaume IV de Hesse-Cassel. Il observait le ciel avec le mathématicien Christoph Rothmann depuis l'observatoire de

[23] Voir annexe 5 sur le site de l'APMEP.
[24] Titre porté, autrefois, par certains princes germaniques relevant directement de l'Empereur.

Cassel, l'un des premiers édifices d'Europe construits spécifiquement pour ce travail. Il était aussi chargé de la conservation de ses instruments scientifiques (astrolabes, globes, etc.). Outre des horloges, Bürgi fabriquait des sphères armillaires[25], des globes et aurait même été l'inventeur du compas de proportions[26] souvent attribué à Galilée. C'est avec le mathématicien Christoph Rothmann que Bürgi apprendra suffisamment de mathématiques pour mener à terme les calculs de sa table.
À partir de 1604, Bürgi devient l'assistant de Kepler, astronome de l'empereur Rodolphe II à Prague. Kepler avait en effet pris la succession de Ticho Brahé à sa mort en 1601.

Le travail de Bürgi

Grâce à l'ouvrage de Kathleen Clark [2], on dispose maintenant de la table de Bürgi publiée en 1620, mais aussi de son manuscrit[27] dans lequel il explique l'usage de sa table.
Sa démarche est la suivante :
Bürgi calcule 23028 nombres correspondant aux termes d'une progression géométrique de premier terme K = 10^8 et de raison[28] $a=\left(1+\frac{1}{10^4}\right)=1{,}0001$. Comme :

$$10^8\times\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{23027}=999.999.779{,}68 \quad \text{et} \quad 10^8\times\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{23028}=1.000.099.779{,}6587,$$

cette progression couvre la plage $[10^8 ; 10^9]$.
Ce sont les « schwarzen Zhalen » ou nombres noirs qui sont mis en regard des « rothen Zhalen » ou nombres rouges qui sont, eux, les termes d'une progression arithmétique dont la raison est $\lambda = 10$ et de premier terme 0.
En langage moderne, Bürgi associe, par leurs rangs, les deux suites :
$u_n = \lambda n$ et $v_n = Ka^n$, ce qui lui permet d'obtenir : $v_p\, v_q = Ka^p\, Ka^q = K^2a^{p+q} = K\, v_{p+q}$.
Ainsi, le produit de deux nombres noirs s'obtient, après deux lectures de la table, par une addition des nombres rouges correspondant à ces deux nombres noirs et par une lecture de la table et une multiplication[29] par $K = 10^8$.

---

25 Du latin *armillas*, bracelet - cercle.
26 Voir quelques œuvres de Bürgi en annexe 6 sur le site de l'APMEP.
27 Ces documents sont en accès libre sur le site de Springer : http://www.springer.com/br/book/9781493931606
28 Le choix de cette valeur permet de faire facilement les multiplications par simple décalage et addition.
29 C'est ici qu'on peut constater que les logarithmes de Bürgi ne respectent pas la propriété P citée par Arsac page 282 :

> P : *Le produit de deux nombres de la première suite figure dans cette suite qui a pour associé, dans la deuxième suite, la somme des associés des deux nombres de départ.*

Dans la pratique, les nombres à multiplier ne sont pas nécessairement dans la plage $[10^8 ; 10^9]$. On les recadre en les multipliant par la puissance de dix qui les ramène dans cette plage. Si ce sont des nombres noirs on procède comme ci-dessus, dans le cas contraire on utilise les nombres noirs les plus proches et, si on veut plus de précision, on utilise l'interpolation linéaire.

Définition d'un système de logarithmes de base *a*

Sur le modèle de Bürgi, on peut considérer qu'un système de logarithmes de base a est obtenu quand on dispose de deux suites, l'une arithmétique, l'autre géométrique, associées par leurs rangs : $u_n = \lambda n$ et $v_n = Ka^n$

On peut alors obtenir le produit par addition des rangs et lecture sur la table :

$$v_p\, v_q = Ka^p\, Ka^q = K^2 a^{p+q} = Kv_{p+q}$$

Bien que Bürgi n'utilise pas le mot, on peut dire que,

pour un nombre $y = 10^8\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^n$, son logarithme est le nombre $x = 10n$,

ce qui conduit à la relation $y = 10^8\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{\frac{x}{10}}$.

La même étude, chez Neper, permet d'associer à un nombre $y = 10^7\left(1+\frac{1}{10^7}\right)^n$ son logarithme, qui est en réalité le nombre $x = n$; mais en tenant compte du fait que $\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7} = 0{,}36787942$ et $\frac{1}{e} = 0{,}36787944$, on peut écrire :

$$y = 10^7 \times \left(1-\frac{1}{10^7}\right)^n = 10^7 \times \left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7 \frac{n}{10^7}} \cong 10^7\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{x}{10^7}}.$$

C'est pourquoi on dit parfois que les logarithmes de Neper sont des logarithmes de base $\frac{1}{e}$.

Cette remarque risque d'induire en erreur le lecteur sur la manière dont Néper a conçu ses logarithmes.

C'est pourquoi il est indispensable d'approfondir le processus d'association des deux suites tel que Neper l'expose dans *Descriptio* et dans *Constructio*.

Une dernière remarque sur la conception des logarithmes par Neper

La conception des logarithmes par Neper est très différente de celle de Bürgi qui, dès le début de ses calculs, fixe les raisons des deux progressions associées.

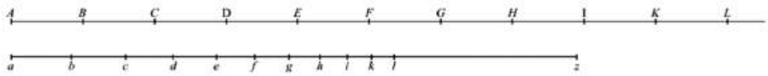
C'est dans *Constructio* qu'on trouve les secrets de fabrication qui ont permis à Neper de mener à bien cette entreprise très audacieuse.

Neper ne peut pas éluder le calcul des termes d'une progression géométrique. Celle-ci est de raison $\alpha = \left(1 - \frac{1}{10^7}\right) = 0{,}9999999$ et de premier terme 10^7, c'est-à-dire le sinus total.

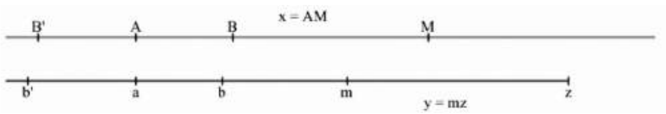
Le choix de cette raison permet un calcul facile par soustraction après décalage. Pour éviter la remontée des erreurs d'arrondi, Neper ne calcule que les 100 premiers termes. Le dernier terme calculé est : 9.999.900,000495.

Ce qui est intéressant, c'est de voir comment Neper associe aux termes de cette progression les termes correspondants de la progression arithmétique, c'est-à-dire leurs logarithmes. Il lui suffit, en fait, d'obtenir le logarithme de $\beta = 10^7\alpha = 9999999$ avec une grande précision, pour en déduire les autres (ceux des nombres $10^7\alpha^n$) par additions.

Reprenons le schéma :



dans lequel on imagine que les mouvements préexistaient avant l'instant zéro et étaient de même nature.



Les positions *B'* et *b'* des deux mobiles sont telles que *B'A* = *AB*, ce qui revient à dire que le temps mis par le mobile *M* pour aller de *B'* en *A* est le même que celui pour aller de *A* en *B*.

Simultanément, le mobile *m* va de *b'* en *a* puis de *a* en *b*.

Les conditions exigées sur ces deux mouvements et notamment la condition d'égalité des vitesses aux points *A*/*a* permettent de dire que :

- la distance *AB* parcourue par le mobile *M* est plus grande que la distance *ab* parcourue par le mobile *m*,
- la distance *B'A* parcourue par le mobile *M* est plus petite que la distance *b'a* parcourue par le mobile *m*.

Ce qui se traduit par : $ab < AB = B'A < b'a$.

Si on suppose que $ab = 1$, alors $bz = az - ab = 9999999 = \beta$ et, d'après la définition des nombres logarithmes donné par Neper, *AB* est le logarithme de *bz*.

On en déduit : $ab < Nlog(\beta) < b'a$.

Or $b'a = b'z - az$ et on a : $\dfrac{b'z}{az} = \dfrac{az}{bz}$,

ce qui donne $b'z = \dfrac{az^2}{bz}$ puis $b'a = b'z - az = az\left(\dfrac{az}{bz} - 1\right) = az\left(\dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{10^7}} - 1\right)$.

Neper sait que $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{10^7}}$ est très proche de $1+\dfrac{1}{10^7}+\dfrac{1}{10^{14}}+\dfrac{1}{10^{21}}$, ce qui lui donne :

$b'a \cong 1+\dfrac{1}{10^7}+\dfrac{1}{10^{14}}$, puis l'encadrement : $1 < N\,log\left(\beta\right) < 1+\dfrac{1}{10^7}+\dfrac{1}{10^{14}}$.

Enfin, la moyenne arithmétique des deux valeurs de l'encadrement est la valeur que retient Neper comme valeur approchée de $Nlog(\beta)$:

$$N\,log\left(\beta\right) \cong 1{,}0000000500000005$$

Cette valeur lui permet de trouver, par additions, les valeurs des logarithmes des premiers termes de la progression géométrique[30] :

" X "," Nlog "
9999999, 1.00000005000000050000
9999998, 3.00000015000000150000
9999996, 5.00000025000000250000
9999993, 8.00000040000000400000
9999989, 12.00000060000000600000
9999986, 15.00000075000000750000
9999980, 21.00000105000001050000
9999974, 27.00000135000001350000

On peut comparer ces résultats aux valeur fournies par Néper dans sa table[31] :

Gr. 0

0 min	Sinus.	Logarithmi	+ Differentiae	− logarithmi	Sinus	
0	0	Infinitum	Infinitum	0	10000000	60
1	2909	81425681	81425680	1	10000000	59
2	5818	74494213	74494211	2	9999998	58
3	8727	70439564	70439560	4	9999996	57
4	11636	67562746	67562739	7	9999993	56
5	14544	65331315	65331304	11	9999989	55
6	17453	63508099	63508083	16	9999986	54
7	20362	61966595	61966573	22	9999980	53
8	23271	60631284	60631256	28	9999974	52
9	26180	59453453	59453418	35	9999967	51

Conclusion

À la question : « *Neper a-t-il inventé les logarithmes népériens ?* », il est raisonnable de répondre oui, en étant bien conscient que la fonction tabulée par Neper n'est pas exactement la même que la fonction *ln* mais que les deux ne diffèrent que par l'ajout de constantes.

---
30 Valeurs calculées avec Maple 18.
31 On constate une différence d'une unité seulement sur le logarithme.

À la question : « *Neper a-t-il été le premier à concevoir une table de logarithmes* ? », il apparaît que non suivant le critère retenu, puisque Bürgi a fait un travail analogue, à peu près à la même époque, et avec une efficacité opérationnelle comparable à celle de Neper. Toutefois, si on en s'en tient aux dates des publications, c'est Neper qui est incontestablement le premier.
Je signale, enfin, que le lien avec l'aire sous l'hyperbole sera fait par le jésuite belge Grégoire de Saint-Vincent (1584 ; 1667), dans son ouvrage *Opus geometricum* paru en 1648.
Le progrès technique évoqué par Arsac est bien là.
Nous avons maintenant la possibilité d'avoir, en poche, des engins qui nous permettent non seulement de communiquer avec le reste du monde, mais aussi de disposer, en permanence, d'une calculatrice quatre opérations ou même scientifique de grande précision.

Le diaporama de la conférence du 13 mai 2017 à l'origine de cet article est disponible sur le site de la Régionale APMEP d'Aix-Marseille :

http://www.apmep.fr/Compte-rendu-de-la-journee-de-la,7540

Bibliographie

Livres et revues

[1] Fritz STAUDACHER, Jost Bürgi, Kepler un der Kaiser Uhrmacher Instrumentenbauer Astronom Mathematiker 1552-1632.
[2] Kathleen CLARK, Jost Bürgi, Jost Bürgi's Aritmetische und Geometrische Progress Tabulen (1620).
[3] HISTOIRES DE LOGARITHMES, (ouvrage collectif) Évelyne BARBIN, Jean-Pierre FRIEDELMEYER, Michel GUILLEMOT (2006).
[4] Bulletin de l'APMEP n° 299, Juin 1975, Gilbert ARSAC, Histoire de la découverte des logarithmes. (Bientôt téléchargeable en pdf sur le site de l'APMEP).
[5] Revue *Repères IREM* n°21, Octobre 1995, Les logarithmes de BRIGGS, Jean-Marie FAREY et Patrick PERRIN.
[6] *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, John Napier, 1614.
[7] *Rabdologiae seu numerationis per virgulas*, John Napier, 1617.
[8] *Mirifici logarithmorum canonis constructio*, John Napier, 1619.

Sites

Les textes originaux de Neper ([6] et [8] (versions anglaise et latine réécrites) sont téléchargeables sur le site :

http://www.17centurymaths.com/contents/napiercontents.html

Le manuscrit de Jost Bürgi et sa table peuvent être obtenus sur le site de Springer :

http://www.springer.com/us/book/9781493931606