Les Olympiades nationales de mathématiques

Karim Zayana(*)

Les Olympiades nationales de mathématiques – saison 2017. Le 15 mars 2017 (le 14 mars en Polynésie Française), se sont déroulées les épreuves des Olympiades nationales de mathématiques, à destination des lycéens de France et des établissements français de l'étranger. À l'occasion de leur 17ème édition, le Président du concours, l'inspecteur général Karim Zayana, nous présente la compétition, ses enjeux tant pour les élèves que pour les professeurs, et le rôle précieux qu'y tient l'APMEP.

Les Olympiades nationales de mathématiques sont une manifestation majeure portée par la Direction Générale de l'Enseignement Scolaire (DGESCO), réunissant à chaque édition près de 22 000 lycéens - toutes séries confondues - de France et des établissements français de l'étranger (élèves de première dans la scolarité de l'hémisphère Nord, de tout début de terminale dans la scolarité de l'hémisphère Sud) de l'enseignement général, technologique, agricole, ou militaire[1]. Ce succès, à replacer dans l'actualité de la Semaine des Mathématiques, doit à l'implication sans faille des acteurs de terrain : divisions des examens et concours, inspecteurs d'académie, chefs d'établissements, professeurs. Il associe de fidèles partenaires, qui apportent à l'événement soutien matériel (lots, financement) et expertise scientifique (conférence d'un chercheur aux cérémonies académiques de remises des prix, relecture des exercices nationaux comportant des questions d'algorithmique) : le Crédit Mutuel Enseignant, INRIA, Casio, Texas Instruments, Google, l'École polytechnique (l'« X ») et, à partir de 2018, Hewlett-Packard. Pris en main par l'association Animath, les lauréats académiques et nationaux pourront, l'année suivante, s'illustrer sur des compétitions d'envergure internationale.

Tous les candidats passent l'épreuve au même moment. Les décalages horaires conduisent à délimiter trois grandes zones géographiques dont les sujets sont différenciés en conséquence : Europe – Afrique – Orient – Inde ; Amériques – Antilles – Guyane ; Asie – Pacifique – Nouvelle Calédonie – Polynésie Française. Une partie de l'épreuve porte sur des exercices dits nationaux, comptant pour le palmarès national. L'autre partie porte sur des exercices dits académiques, comptant pour les palmarès académiques, et pouvant, depuis 2016 et selon certains aménagements, être résolus

* karim.zayana@education.gouv.fr

[1] note de service n° 2015-175 du 27-10-2015, BOEN n°41 du 5-11-2015

en équipes de deux ou trois. Des exercices sont communs à toutes les séries, d'autres sont réservés à certaines. Tous respectent les programmes en vigueur et ne demandent aucun savoir encyclopédique mais exigent et développent les qualités de recherche, de calcul, de modélisation, de rédaction. Les copies peuvent être appréciées selon un barème par compétences ; toutefois, les meilleures d'entre elles seront ensuite départagées selon un barème linéaire au point très détaillé. Le calendrier de l'épreuve permet aux élèves qui le souhaitent de concourir également sur d'autres Olympiades nationales : géosciences, physique, chimie, sciences de l'ingénieur.

Saluons ici le travail considérable accompli de longue date par l'APMEP pour archiver et classer l'intégralité des annales des Olympiades nationales de mathématiques. L'exploit est de taille puisque la base, accessible d'un simple clic sur le site de l'association, s'enrichit chaque année d'une centaine d'énoncés… Et d'autant de corrigés !

Dans la veine des précédents, le cru du 15 mars 2017 (le 14 mars en Polynésie Française) des Olympiades nationales de mathématiques satisfait tous les goûts tant la palette des sujets abordés est grande. Une fois compilée par l'APMEP, cette matière constitue un outil pédagogique précieux au service des futurs candidats et, dans le quotidien de leurs classes, de leurs enseignants. Qu'ils ne s'interdisent pas d'exploiter ces ressources au fil de leur progression, sous la forme de devoirs, de notes culturelles, d'approfondissements, d'activités de complément. Nous reproduisons en annexe deux exercices nationaux, l'un posé à la session 2017, l'autre en 2016, reflétant bien le travail proposé et calibré pour une heure de temps environ. L'exercice 2017 illustre comment l'outil informatique permet, grâce à une étude extensive de cas, de généraliser une propriété. Un peu comme il arrive de fonder une récurrence sur pléthore de rangs initiaux avant d'en déclencher l'hérédité. Un peu comme on escalade aujourd'hui la conjecture faible de Goldbach. Tout en abordant des questions modernes d'optimisation, l'exercice 2016 met à l'honneur des connaissances du collège aussi essentielles que les volumes et les surfaces des solides usuels, les identités remarquables, les inégalités ; ou historiques et esthétiques que les fractions égyptiennes. Contrairement aux représentations, les énoncés sont volontiers progressifs sans être monolithiques : en cela, ils conviennent et motivent un grand nombre de nos élèves.

Il faut aussi avoir conscience que **les meilleurs élèves résolvent tout, ou presque tout,** qui plus est dans un style impeccable. Tandis que certains lycées présentent une dizaine de candidats chaque année, d'autres en alignent une bonne centaine. Et le nombre d'inscrits selon l'académie (toutes proportions gardées) peut varier du simple au quadruple. Devant ces disparités, **il est important que les établissements géographiquement proches unissent leurs forces pour offrir une préparation suivie aux élèves volontaires**. Citons en exemple l'organisation des lycées du Grand Clermont, dont les élèves se retrouvent hebdomadairement à l'IREM de Clermont-Ferrand pour y préparer l'échéance, sous la houlette d'une petite équipe de professeurs qui s'y relaient. Cette initiative du Rectorat d'académie a fait des émules, puisqu'elle sera reprise à la rentrée 2017 dans le bassin chalonnais, académie de Dijon, celui de Troyes, académie de Reims, et celui d'Ajaccio, académie de Corse. Les enseignants désireux de s'investir sur de tels projets sauront s'inspirer de ces modèles de mutualisation, les transposer, les réinventer localement, en concertation avec les inspecteurs d'académie – inspecteurs pédagogiques régionaux et les proviseurs, et en réseau d'établissements. Ils contribueront ainsi à faire des Olympiades nationales de mathématiques et, au-delà, des concours en général (concours général, rallyes, concours des régionales, Kangourou, castor informatique, Al-Kindi, …) un adjuvant pédagogique efficace, un outil de travail collectif, et une modalité – parmi beaucoup d'autres – de révéler et de récompenser des jeunes gens méritants et aux profils variés. Ils ont toute la confiance de l'institution pour y réussir.

Exercice national numéro 1 (à traiter par tous les candidats) 2017

Sommes de carrés en abyme

On considère la fonction définie sur l'ensemble des entiers naturels non nuls, qui à tout entier naturel non nul associe la somme des carrés des chiffres de son écriture décimale.
Ainsi, par exemple, $f(5) = 5^2 = 25$, $f(29) = 2^2 + 9^2 = 85$, $f(132) = 1^2 + 3^2 + 2^2 = 14$.

Introduction

1. ***a.*** Calculer $f(1)$, $f(11)$ et $f(111)$. Démontrer que tout entier naturel non nul admet au moins un antécédent par f.
b. Calculer $f(23)$, $f(32)$ et $f(320)$.
c. Démontrer que tout entier naturel non nul admet une infinité d'antécédents par f.

La suite des images successives d'un entier

Étant donné un entier naturel non nul u_0, on considère la suite de nombres définie par u_0 et par ses images successives par f notées $u_1 = f(u_0)$, $u_2 = f(u_1)$, …, $u_{n+1} = f(u_n)$, etc.
2. Calculer les cinq premiers nombres de cette liste pour $u_0 = 301$, puis pour $u_0 = 23$ et pour $u_0 = 1030$.
Que peut-on en déduire pour les termes suivants de chacune de ces trois listes ?
3. Calculer les nombres u_0, u_1, u_2, … u_8 pour $u_0 = 4$.
Quels sont les nombres suivants de la liste dans ce cas ?

Étude d'une propriété

On souhaite démontrer la propriété suivante, notée $\mathcal{P}$ dans la suite du problème :
Si u_0 est un entier non nul :
- soit, il existe un rang N tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à N, $u_n = 1$.
- soit, il existe un rang M tel que $u_M = 4$, et les termes suivants sont alors 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20, 4,…
On dit dans ce cas que la suite est périodique, de période 8, à partir du rang M.

On dispose de l'algorithme ci-contre.

4. ***a.*** Qu'affiche cet algorithme lorsque l'on saisit en entrée la valeur $u = 42$?

b. Justifier que si l'algorithme affiche « propriété vérifiée » pour une valeur u donnée alors u vérifie la propriété .

c. Comment le programme se comporterait-il si un nombre u ne vérifiait pas la propriété $\mathcal{P}$?

d. Tous les entiers naturels compris entre 1 et 99 vérifient la propriété $\mathcal{P}$. Expliquer comment cet algorithme peut permettre de le prouver.

```
Variable : u entier naturel non nul
Entrer u
  Tant que (u ≠ 1 et u ≠ 4)
  u ← f(u)
  Afficher
Fin tant que
Afficher « propriété vérifiée »
```

Extension aux écritures à trois chiffres

On souhaite montrer que la propriété $\mathcal{P}$ s'étend aux entiers naturels non nuls u_0 s'écrivant avec trois chiffres.

5. Soient a, b et c des entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 tels que $a \neq 0$ et soit $x = 100a + 10b + c$.

a. Montrer que $x - f(x) \geq 99 + c - c^2 > 0$ et en déduire que $f(x) \leq x - 1$.

b. Si u_0 s'écrit avec trois chiffres, montrer qu'il existe un rang J tel que $u_J \leq 99$. Conclure.

Généralisation

On souhaite montrer que la propriété est vraie pour tout entier naturel non nul .

6. ***a.*** Montrer que, pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 4, on a : $81p < 10^{p-1}$.

b. En déduire que, si un terme u_n de la suite s'écrit avec p chiffres ($p \geq 4$), alors $u_{n+1} = f(u_n)$ s'écrit avec au plus $p - 1$ chiffres.

c. Montrer que, pour tout entier u_0, il existe un rang K tel que $u_K \leq 999$. Conclure.

Exercice national numéro 1 (à traiter par tous les candidats) 2016

Échanges thermiques

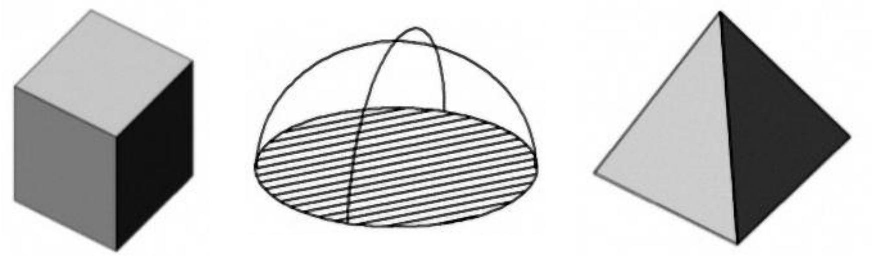
En architecture, on appelle facteur de compacité d'un bâtiment le rapport de la surface extérieure – y compris la base en contact avec le sol – de ce bâtiment, mesurée en m², *à son volume, mesuré en* m³. *Le facteur de compacité* $c = \dfrac{s}{v}$, exprimé en m⁻¹, *donne une première évaluation grossière des performances thermiques d'une construction d'habitation.*

1. Calculs de compacité pour quelques volumes usuels, dessinés ci-dessous.

a. Déterminer le facteur de compacité d'un cube de côté a.

b. Déterminer celui d'une demi-sphère de rayon r. On rappelle que le volume d'une sphère de rayon r est $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ et que sa surface a pour aire $4\pi r^2$.

c. Déterminer celui d'une pyramide régulière à base carrée de côté a, et de hauteur verticale a.



d. En quoi, d'après vous, le facteur de compacité est lié aux performances thermiques d'un bâtiment ?

2. On se propose d'étudier le facteur de compacité d'un pavé droit de volume 1 dont les dimensions en mètres sont x, y et z.

a. Vérifier que pour tous nombres a, b et c :

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)\,[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$

b. En déduire que pour tous nombres réels positifs a, b et c, $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.

c. En déduire que pour tous nombres réels positifs A, B et C dont le produit est égal à 1 : $A + B + C \geq 3$.

d. Montrer que le facteur de compacité de ce pavé est : $c = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$.

e. Quel est le pavé droit de volume 1 qui rend minimal le facteur de compacité ?

3. Dans cette question, on désire déterminer tous les pavés droits dont le facteur de compacité est égal à 1 et dont les dimensions p, q et r, exprimées en mètres, sont des nombres entiers. On prendra $p \leq q \leq r$.

a. Établir que résoudre ce problème consiste à déterminer les triplets ordonnés d'entiers p, q et r tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$.

b. Démontrer que $3 \leq p \leq 6$.

c. Montrer que si $p = 3$ alors $7 \leq q \leq 12$.

d. Terminer la résolution.