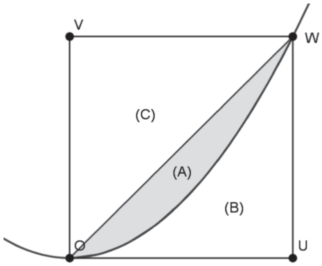
Diverses méthodes pour calculer des aires paraboliques

Jean Moussa(*)

Présentation



(fig.1)

On suppose sur la figure 1 que l'arc courbe (OW) est un arc de la parabole d'équation $y = x^2$, que U est le point (1,0) et V le point (0,1). Alors :

L'aire du secteur (A) vaut $\frac{1}{6}$, celle du secteur (B) vaut $\frac{1}{3}$, le triangle (C) étant d'aire $\frac{1}{2}$.

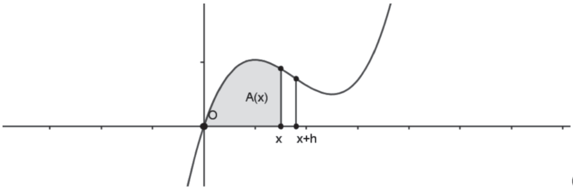
Voici cinq démonstrations de ce résultat classique. La première est celle que l'on utilise actuellement de manière ordinaire devant des élèves qui découvrent le calcul des primitives. Les trois suivantes présentent un intérêt historique : la seconde relie l'intégrale à des sommes de rectangles et les deux suivantes proviennent des documents laissés par Archimède, qui illustrent l'extraordinaire créativité des mathématiques de la Grèce ancienne, à une époque où le calcul moderne des primitives était hors de portée. La dernière méthode est la seule n'ayant aucun lien apparent avec l'intégration ; elle n'utilise que des transformations géométriques, et c'est une « astuce » personnelle sur laquelle je n'ai pas trouvé de références dans la littérature.

Un aspect remarquable de cette juxtaposition de cinq méthodes est la manière dont le coefficient $\frac{1}{3}$ apparaît : il est le résultat final d'opérations aussi diverses que les méthodes.

1. Première méthode : la primitive

On rappelle le lien entre primitive et « aire sous la courbe » (fig.2 ci-dessous)

(*) jean5moussa@gmail.com



(fig.2)

Dans la figure 2, A(x) désigne l'aire grisée comprise entre l'axe des abscisses et la courbe représentant une fonction f continue et positive, pour les abscisses appartenant à l'intervalle [0, x]. On remarque que A(x + h) – A(x) est l'aire d'un domaine de largeur h et dont la hauteur tend vers $f(x)$ lorsque h tend vers zéro. Il en découle que $\frac{\mathrm{A}(x+h)-\mathrm{A}(x)}{h} \to f(x)$ lorsque h tend vers zéro, et donc que A est une primitive de f.

L'application de ce résultat à la fonction $f : x \mapsto x^2$ sur l'intervalle [0,1] donne alors :

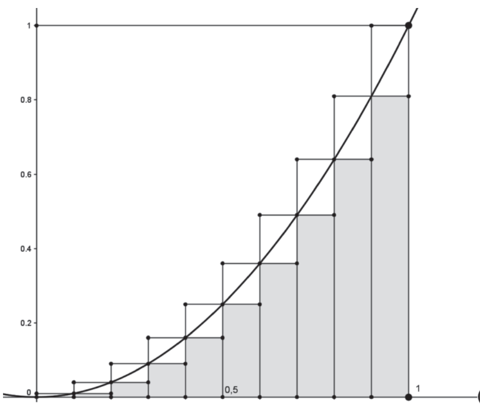
$$\mathrm{A}(x)-\mathrm{A}(0)=\frac{1}{3}x^2.$$

Ce qui, pour l'aire sous la parabole entre 0 et 1, donne le 1/3 attendu, et on peut dire ici que :

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{\text{degré(parabole)} + 1}.$$

2. Deuxième méthode : les rectangles

L'aire du domaine de la figure 3, comprise pour l'intervalle [0,1] entre l'axe des abscisses et la parabole d'équation $y = x^2$, est considérée comme la limite d'aires de domaines formés de rectangles dont la largeur tend asymptotiquement vers zéro. On utilise ainsi une approche de l'aire par le calcul intégral. La figure 3 représente les rectangles de largeur $\frac{1}{10}$.



(fig.3)

La méthode des rectangles que nous utilisons ici fournit deux suites adjacentes : l'aire totale des rectangles les plus grands majore l'aire cherchée, et l'aire totale des rectangles les plus petits (surface grisée sur la figure) minore l'aire cherchée.

Si le segment [0,1] est partagé en n morceaux de largeur $\frac{1}{n}$, alors l'aire « inférieure » vaut :

$$\frac{1}{n}\left(\left(\frac{0}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right)=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^2},$$

tandis que l'aire « supérieure » vaut :

$$\frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\left(\frac{3}{n}\right)^2\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right)=\frac{n(n+1)n(2n+1)}{6n^2}.$$

L'aire Σ du domaine parabolique est donc définie ici comme la limite de deux suites adjacentes. Pour tout n, $\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^2}\leq\Sigma\leq\frac{n(n+1)n(2n+1)}{6n^2}$ d'où $\Sigma=\frac{1}{3}$.

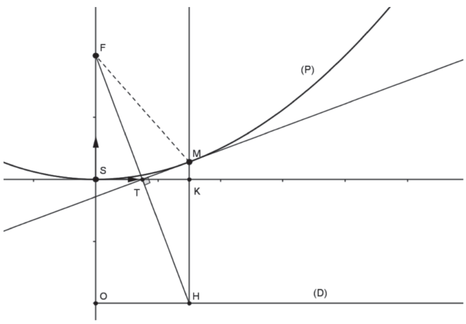
Le 1/3 apparaît ici par : $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{n}\sim\frac{1}{3}n^2$.

3. Intermède géométrique

Pour aborder les autres méthodes, il nous faut revenir à la définition et aux propriétés géométriques de la parabole.

3.1. Définition

Nous partons de la définition géométrique classique (fig.4) : le lieu des points M équidistants d'un point F et d'une droite (D) est une parabole (P), dite de foyer F et de directrice (D). Cette parabole contient S, milieu de [OF], O étant le projeté orthogonal de F sur (D). On note habituellement p = OF, et la longueur p est appelée paramètre de la parabole (P).



(fig.4)

Nous complétons la figure par H, projeté de M sur la directrice, par T, milieu du segment [FH], et par K, intersection de (MF) avec la médiatrice de [OF].

3.2. Cohérence avec l'équation $y = x^2$

On voit dans le parallélogramme SHKF que T est également le milieu de [SK]. Par définition de la parabole, M appartient à la médiatrice de [FH], donc le triangle MTH est rectangle, ainsi que HKT et MKT, ces trois triangles étant semblables. On en déduit $\dfrac{MK}{TK} = \dfrac{TK}{HK}$.

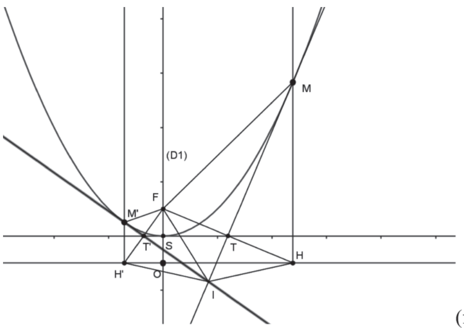
Par ailleurs, HK est indépendant du choix de M : $HK = OS = \dfrac{p}{2}$, donc $MK = \dfrac{TK^2}{\frac{p}{2}} = \dfrac{SK^2}{2p}$. On retrouve bien, dans le repère $\left(S, \vec{i}, \vec{j}\right)$ de la figure, l'équation usuelle de la parabole, $y = \dfrac{x^2}{2p}$.

3.3. Tangente

Un autre point M′ quelconque de (P) satisfait à M′F = M′H′, où H′ est le projeté de M′ sur (D), c'est-à-dire le point de (D) le plus proche de M′. On aura donc M′F ≤ M′H, ce qui montre que tous les points de (P) sont situés du même côté de la droite (MT), médiatrice de [FT]. En outre, il n'y a égalité que si H′ = H, c'est-à-dire M′ = M. La droite (MT) a ainsi M pour unique point commun avec (P), ce qui la caractérise comme tangente en M à (P).

3.4. Les deux tangentes menées d'un point

Si d'un point I on peut mener deux tangentes à une parabole (P) d'axe (D1), alors les parallèles à (D1) passant par les deux points de contact M et M′ avec les tangentes sont symétriques par rapport à I. Si l'axe est vertical comme sur la figure 4, ceci implique que les abscisses des deux points de contact ont pour moyenne arithmétique l'abscisse de I (figure 5).

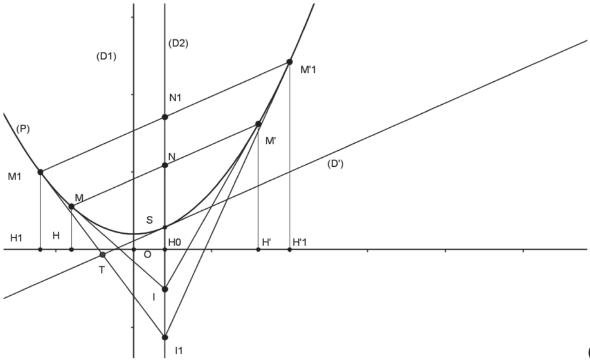


(fig.5)

Preuve : I étant situé sur (MT), médiatrice de [HF], il est équidistant de F et de H. Comme il est également situé sur (M′T′), médiatrice de [H′F], il est équidistant de F et de H′. On a donc IH = IF = IH′, et I est situé sur la médiatrice de [HH′], cqfd.

3.5. Les symétries obliques d'une parabole

Toute droite (D2) parallèle à l'axe (D1) d'une parabole (P) est un axe de symétrie oblique pour (P), selon la direction donnée par la tangente (D) au point d'intersection de (D2) et de (P).
En deux points de (P) symétriques l'un de l'autre tels que M et M′, ou M_1 et M'_1, les tangentes à (P) se coupent en un point de (D2) (fig.6).



(fig.6)

Preuve. Ici il est avantageux d'utiliser les coordonnées cartésiennes. La parabole d'axe vertical a une équation de la forme : $y = ax^2 + b$. On cherche l'intersection avec une droite oblique, d'équation : $y = mx + t$. Les abscisses des points d'intersection sont immédiatement données par l'égalité : $ax^2 + b = mx + t$, équation du second degré dont la somme des racines vaut $\frac{m}{a}$. Lorsque la droite oblique varie en restant de même pente, c'est le paramètre t seul qui varie, et on voit alors que la somme (ou la moyenne arithmétique) des abscisses des intersections est constante. C'est bien la propriété que l'on cherchait.

Les racines sont réelles et distinctes lorsque $t > b - \frac{m^2}{4a}$, et confondues lorsque $t = b - \frac{m^2}{4a}$, ce qui est la valeur de t pour laquelle la droite oblique est tangente à la parabole.

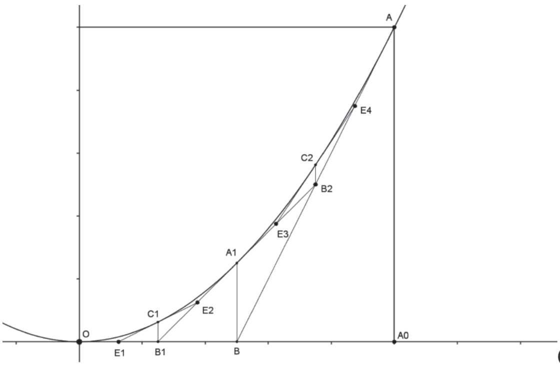
3.6. Un point milieu remarquable

Nous avons indiqué sur la figure 6 le point T, intersection des deux tangentes en S et M_1. D'après la propriété 3.4, T est le milieu du segment $[M_1I_1]$. Mais la tangente en S est parallèle à $[M_1N_1]$ d'après ce qui a été prouvé en 3.5. Il en découle que (ST) est la droite des milieux des côtés $[I_1N_1]$ et $[I_1M_1]$ du triangle $I_1M_1N_1$, et finalement S est le milieu de $[I_1N_1]$. Cette propriété ne dépendant pas du choix de la droite oblique qui varie en restant parallèle à elle-même, S est aussi, sur notre figure, le milieu de [IN].

4. Troisième méthode, dite méthode d'exhaustion d'Archimède.

L'aire du secteur parabolique est ici la limite des aires d'une suite de polygones qui s'approchent asymptotiquement de la parabole. Dans les textes laissés par Archimède, tout ce qui touche à la notion de convergence et de limite reflète les difficultés conceptuelles auxquelles les mathématiciens de l'époque étaient confrontés (ainsi que leurs successeurs jusqu'à l'ère moderne). Nous nous limitons ici à la présentation du procédé géométrique utilisé et au calcul qui en découle.
Dans la figure 7 est représenté un arc (OA) de parabole, de projection $[OA_0]$ sur l'axe horizontal.

On suppose qu'il s'agit de la parabole d'équation $y = x^2$, et que $A = (1,1)$.



(fig.7)

On découpe le carré initial en enlevant au fur et à mesure des triangles. On découpe d'abord un premier triangle ABA_0, dont l'aire vaut $\frac{1}{4}$. Puis un second triangle BB_1B_2.

Son aire vaut $\frac{1}{16}$. En effet, le segment $[BA_1]$ de longueur $\frac{1}{4}$ est une médiane de ce triangle et le partage en deux moitiés de même aire ; prenant la médiane $[BA_1]$ pour base de la moitié de gauche, la hauteur est $\frac{1}{4}$, donc l'aire vaut $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$ pour cette moitié.

On a ensuite deux triangles à découper, $E_1B_1E_2$ et $E_3B_2E_4$. Ils sont échangés par la symétrie oblique d'axe vertical (BA_1) et de direction (B_1B_2). Ils sont donc de même aire. Pour le premier triangle on utilise le procédé précédent ; sa médiane $[B_1C_1]$ est de longueur $\frac{1}{16}$. La hauteur E_1B_1 vaut $\frac{1}{16}$. L'aire totale des deux triangles vaut donc

$$2\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{64}..$$

À chaque étape du découpage, le nombre des triangles est multiplié par deux ; par les symétries obliques de la parabole, ils ont tous même aire. En gardant la même méthode pour le triangle le plus à gauche, la longueur de la médiane est divisée par 4, et la hauteur par 2.

L'aire totale de tous ces triangles est donc multipliée par $2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot=\frac{1}{4}\cdot.$

Archimède reconnaît alors ici qu'il a affaire à une progression géométrique de raison $\frac{1}{4}$. La somme infinie des aires des triangles ainsi découpés vaut

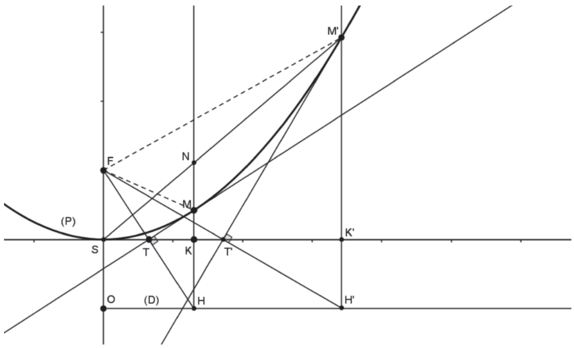
$$\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots=\frac{1}{4}\times\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}.$$

Le $\frac{1}{3}$ apparaît ici comme la somme d'une série géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

5. Quatrième méthode : la pesée d'Archimède.

L'aire est ici mesurée par addition de bandes parallèles de largeur infinitésimale. On remarque une nouvelle fois le caractère visionnaire des travaux d'Archimède, car il s'agit déjà d'intégration sans le dire.

La méthode utilise une propriété que nous commençons par exposer.



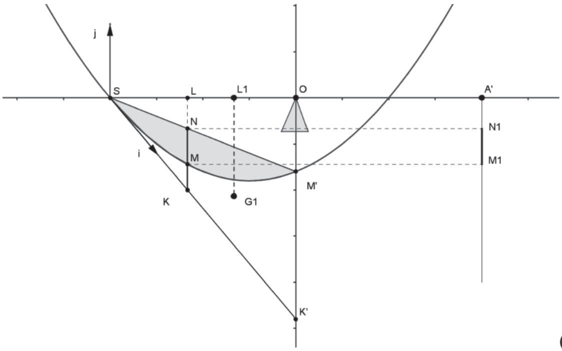
(fig.8)

Nous construisons la même figure que celle de la définition de la parabole, mais avec la construction de deux points M et M′ (fig.8). Le segment [SM′] coupe la verticale en un point N.

Proposition : $\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{KN}}=\frac{\mathrm{KK}'}{\mathrm{SK}'}=\frac{\mathrm{NM}'}{\mathrm{SM}'}.$

Preuve : nous raisonnons sur les longueurs. L'équation de la parabole nous dit que KM est proportionnel au carré de SK. On en déduit que $\frac{\mathrm{K'M'}}{\mathrm{KM}}=\left(\frac{\mathrm{SK}'}{\mathrm{SK}}\right)^2$. Mais le théorème de Thalès nous dit aussi que $\dfrac{K'M'}{KN} = \dfrac{SK'}{SK}$.. En divisant ces deux égalités il vient $\dfrac{KM}{KN} = \dfrac{SK}{SK'}$. On a donc aussi $\dfrac{MN}{KN} = 1 - \dfrac{KM}{KN} = 1 - \dfrac{SK}{SK'} = \dfrac{KK'}{SK'} = \dfrac{NM'}{SM'}$, *cqfd*.

On retrouve cette égalité dans la figure 9 après une transformation linéaire du plan dans laquelle le repère (S,K,F) de la figure 8 est devenu le repère $\left(S,\vec{i},\vec{j}\right)$. Les rapports de longueurs de deux segments d'une même droite sont en effet conservés dans une telle transformation, et l'image d'une parabole est encore une parabole.



(fig.9)

Le raisonnement d'Archimède est alors le suivant : il imagine une balance (dont on a indiqué le chevalet sur la figure, en O) à laquelle on suspend, sur le bras gauche, une plaque triangulaire homogène SM′K′.

On rappelle que l'équilibre d'une balance a lieu quand les moments des poids de chaque côté sont égaux, ces moments étant la somme des moments de poids ponctuels, et le moment d'un poids ponctuel étant le produit de ce poids par la distance entre le point auquel il est accroché et le chevalet de la balance.

Un élément de largeur infinitésimale autour du segment [KN] exerce en L un moment qui sera exactement compensé par un élément de même largeur mais de longueur égale à MN, si ce deuxième élément est suspendu en A′, symétrique de S par rapport à O, ce qu'on visualise en construisant le segment [M_1N_1] de la figure.

En effet, $\dfrac{MN}{KN} = \dfrac{NM'}{SM'} = \dfrac{LO}{SO}$ (Thalès), d'où $MN \cdot SO = KN \cdot LO$, et donc :

$$M_1N_1 \cdot A'O = KN \cdot LO.$$

Archimède somme alors tous ces poids infinitésimaux (il « intègre », en quelque sorte) en faisant varier L entre S et O. Les éléments suspendus rassemblés en A′ se somment pour y peser d'un poids égal à celui du secteur parabolique grisé de la figure. Les éléments suspendus aux points L variables se somment pour peser le poids du triangle SM′K′, suspendu en L_1, qui est la projection de son centre de gravité G_1. Archimède savait déjà que l'on pouvait remplacer dans cette opération un objet

par un objet « ponctuel » de même poids, attaché au centre de gravité.
On arrive ainsi à :

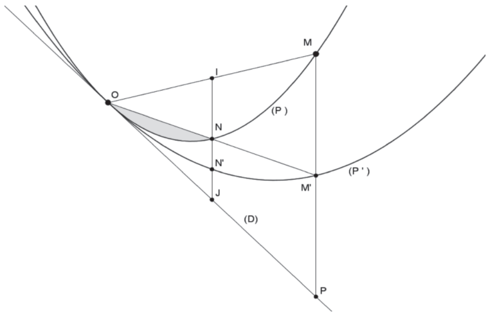
$$OA' \cdot (\text{aire du secteur parabolique}) = OL_1 \cdot (\text{aire du triangle}).$$

Et connaissant la position de G_1 au tiers des médianes, on a $OA' = 3OL_1$ ce qui achève de prouver que l'aire du secteur parabolique est égale au tiers de celle du triangle !

Le coefficient $\frac{1}{3}$ apparaît donc ici comme celui qui intervient dans la position du centre de gravité d'un triangle.

6. Cinquième méthode.

Les aires qui sont manipulées ici sont simplement supposées avoir une existence mathématique, et obéir à certaines règles lorsqu'on applique des transformations géométriques aux domaines correspondants.



Dans la figure ci-dessus, nous avons tracé une parabole (P) d'axe vertical passant par les points O, N, M de sorte que I soit le milieu du segment [OM], et tracé la tangente (D) en O à (P).

Une affinité est une transformation définie par une droite D, une direction donnée par un vecteur $\vec{v}$, qui n'est pas celle de la droite et un réel k non nul qui en est le rapport. L'image M′ d'un point quelconque M s'obtient en traçant la droite de direction $\vec{v}$ passant par M, qui coupe D en un point I, et en définissant M′ par $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$. Les rapports des longueurs de deux segments d'une même droite sont conservés. Nous traçons alors la parabole (P′) image de (P) par l'affinité, d'axe (D), de direction verticale (parallèle à l'axe de (P)) et de rapport $\frac{1}{2}$. Ainsi, M′ est le milieu de [MP] et N′ est le milieu de [JN].

En application des propriétés de symétrie d'une parabole par rapport à son axe, (P) est invariante dans la symétrie oblique par rapport à l'axe (IN) suivant la direction (OM).

Par ailleurs, (P′) est aussi l'image de (P) par une seconde transformation :

l'homothétie de centre O et de rapport 2. En effet, par les propriétés 3.4 et 3.6, (MJ) est la tangente en M et N est le milieu de [IJ], d'où $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{ON}$ et cette propriété reste valable quel que soit le point M sur (P). La coïncidence des images (globales) de (P) par ces deux transformations est une conséquence du fait que nous avons affaire à une parabole qui, dans un repère affine d'origine O et ayant pour axes (D) et l'axe de (P), admet une équation de la forme $y = ax^2$.

On raisonne maintenant sur les aires.

- La surface du secteur grisé limité par (P) et la corde [ON] est égale à ¼ de la surface du secteur ON′M′NO, limité par (P′) et par la corde [OM′] (en effet, dans l'homothétie de centre O et de rapport 2 transformant (P) en (P′), les surfaces sont multipliées par 2^2).
- La surface du secteur ON′M′NO est égale à la moitié de la surface du secteur ONMIO limité par (P) et par la corde [OM] (car on passe du premier au second par une affinité de rapport 2).
- La surface du secteur ONMIO est double de la surface OIN du secteur triangulaire curviligne de (P) limité par [OI] et [IN], car (IN) est axe de symétrie oblique, et donc les secteurs curvilignes OIN et MIN ont même surface.

En combinant ces trois relations, on voit que la surface du secteur grisé de (P) est égale au quart de la surface du secteur curviligne OIN, ce qui implique qu'elle est égale au tiers de la surface du triangle OIN, et donc au tiers de la surface du triangle OJN, les deux triangles OIN et OJN ayant même hauteur, sur les deux bases égales [IN] et [NJ].

Et le $\frac{1}{3}$ est ici, le résultat de $\dfrac{1}{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 - 1}$.

Références

On trouve les deux méthodes remontant à Archimède sur le site fort bien détaillé de wikipedia, mais sans démonstration complète des propriétés géométriques utilisées :

https://fr.wikipedia.org/wiki/Quadrature_de_la_parabole

Ce site propose aussi deux autres méthodes remarquables dues respectivement à Thabit Ibn Qurra (IX^{e} siècle) et à Fermat, que j'ai renoncé à inclure ici.