

De l'usage des récréations pour une *Initiation mathématique* selon Charles-Ange Laisant

Jérôme Auvinet(*)

« Nous nous servirons de questions amusantes comme moyen pédagogique, pour attirer la curiosité de l'enfant et arriver ainsi à faire pénétrer dans son esprit, sans efforts imposés, les premières notions mathématiques les plus essentielles »
(Laisant, 1916, p. 7)

En 1906, le mathématicien d'origine nantaise Charles-Ange Laisant (1841-1920) propose un « guide » pour les éducateurs des jeunes enfants : c'est son *Initiation mathématique*⁽¹⁾, rééditée 17 fois, entreprise de rénovation des premiers enseignements des mathématiques. L'ouvrage marque un tournant dans la carrière de son auteur. Polytechnicien (X 1869) diffuseur du calcul des équipollences, Laisant est un personnage omniprésent dans le paysage mathématique français de la fin du XIX^e siècle. De par son importante production mathématique mais également sa position institutionnelle⁽²⁾ ou ses fonctions de directeur de publications⁽³⁾, Laisant entretient un large réseau de relations scientifiques. Les convictions politiques de ce député radical vont rejoindre son parcours de mathématicien lorsqu'il quitte la vie politique pour se consacrer à l'enseignement (il devient examinateur d'entrée à l'École polytechnique). En effet, convaincu de l'importance de l'enseignement des enfants dans la formation des futurs citoyens, il mise sur une refonte des principes gouvernant l'éducation, particulièrement l'éducation scientifique, et, poussé par ses nouvelles convictions libertaires, lie des amitiés avec Francisco Ferrer (1859-1909) entre autres et souhaite rompre avec le système éducatif de Jules Ferry par une approche rationnelle et expérimentale.

La particularité de son *Initiation* tient alors dans l'utilisation nouvelle de ressources mathématiques pour proposer aux enfants entre 4 et 11 ans un enseignement stimulant leur curiosité naturelle. Plus exactement, les récréations mathématiques, qui sont alors en vogue notamment dans la presse populaire, y sont considérées pour leur potentiel pédagogique. Cet intérêt de Laisant pour les récréations n'est pas étranger à ses travaux en combinatoire, arithmétique et théorie

(*) Laboratoire de mathématiques Jean Leray, Université de Nantes
Professeur au Lycée Roumanille de Nyons (26)
auvinet_jerome@yahoo.fr

(1) On peut télécharger un pdf sur plusieurs sites, en fac-similé à
<https://ia600202.us.archive.org/6/items/initiationmathm00laisgoog/>
ou retranscrit partiellement à

http://michel.delord.free.fr/lais-init1.ipndifti.a_tionmathm00laisgoog.pdf,

(2) Il a par exemple été président de la Société mathématique de France en 1888.

(3) Il a notamment dirigé la revue *Nouvelles Annales de mathématiques* qui s'adresse aux élèves et enseignants des classes préparatoires.

des nombres qu'il engage à partir des années 1890 à la suite de ceux d'Édouard Lucas (1842-1891), un proche ami, auteur en 1891 d'une *Théorie des nombres* reconnue.

Cet article vise à pointer certaines récréations présentées dans l'*Initiation* comme autant d'outils d'un enseignement qui se veut être un préambule à l'exploration plus rigoureuse des mathématiques une fois que l'enfant aura atteint l'âge de 12 ans (et pour lequel Laisant remarque que les récréations de l'*Initiation* demeurent pertinentes). Les ressorts empiriques, les particularités visuelles ou calculatoires de chacun de ces amusements, qui n'en sont finalement pas, font de ces récréations des moyens pour « libérer l'enfance » (Laisant, 1916, p. 7) en se plaçant en dehors de tout programme.

1- Les récréations mathématiques dans l'architecture de l'*Initiation*

Nous regroupons sous le terme générique « récréations mathématiques » des développements mathématiques tirant leur origine d'un jeu, d'une histoire contée, de ce qui s'apparente à « une situation problème », parfois dans un contexte concret, qui invitent à une pratique mathématique divertissante (et non nécessairement formalisée). Ces récréations peuvent reposer sur un résultat original de calculs sophistiqués ou une visualisation particulière qui interpelle. Elles ont donc souvent l'intérêt de mêler plusieurs aspects techniques, de combiner diverses pratiques mathématiques (approche graphique, preuve visuelle, raccourci calculatoire). La démarcation avec tel ou tel procédé ingénieux ou tel geste technique, par exemple le procédé d'Ératosthène (leçon 19) ou le tracé de lunules et de rosaces⁽⁴⁾ (leçon 44, figure 1), demeure parfois ténue. Mais cette brève typologie des récréations mathématiques de l'*Initiation* montre la diversité des procédés pédagogiques mis en œuvre et leur adéquation avec l'idée, novatrice selon l'auteur, de susciter la curiosité des jeunes enfants pour faciliter les apprentissages.

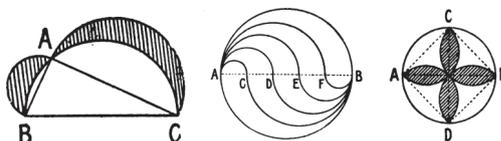


Figure 1 - Exemples de lunules et de rosaces dans l'*Initiation*

Une nouvelle utilisation des récréations

On peut dénombrer tout au long du plan de 65 leçons (annexe 1)⁽⁵⁾ plus d'une trentaine de récréations dans l'ouvrage de Laisant (annexe 2). Ces leçons parcourent l'ensemble des domaines mathématiques accessibles aux enfants : principes de la numération, nombres négatifs, vocabulaire de la géométrie dans le plan puis dans l'espace, calcul d'aire et de volume, représentation graphique des fonctions. Si la présentation de la numération décimale en usant de bâtonnets en bois regroupés en paquets ou fagots provient explicitement de l'*Arithmétique de Grand papa* de Jean

(4) Laisant insiste particulièrement sur l'importance du dessin, puis de l'utilisation du compas, dans les premiers apprentissages et l'abstraction progressive vers les notions de géométrie.

(5) Les deux annexes sont en ligne sur le site de l'APMEP

Macé (1862), des sujets originaux peuvent être évoqués par l'usage de récréations : c'est le cas de la dernière leçon qui porte sur les carrés magiques, support d'une pratique originale du calcul mental.

Il s'agit surtout, notamment via les récréations, de jeter les bases d'un enseignement large. Les nombres premiers, les différentes formules sur les sommes d'entiers, sur les progressions de nombres, les permutations et la notion de fonction : tous ces sujets sont présentés de manière ordonnée et progressive avec en point d'orgue l'usage des représentations graphiques des fonctions (et donc de la géométrie analytique). Ce dernier point illustre la volonté de Laisant de proposer différents amusements comme autant de supports variés montrant que graphique et calcul se prêtent un appui mutuel.

Le champ vaste des chapitres ne doit pas cacher l'ordonnement rigoureux et la place de choix dévolue aux multiples récréations. C'est l'enchaînement des notions à présenter qui structure l'ouvrage : ainsi, la leçon sur l'écriture scripturale des chiffres (leçon 10) n'intervient qu'une fois le concept de nombre bien acquis par manipulation d'objets concrets (bâtons), conformément à la démarche expérimentale annoncée. Les récréations demeurent alors, comme nous le verrons, des introductions originales (exemple : l'éventail mystérieux) ou des outils centraux dans l'exploration des résultats (exemple : le vol des grues).

Les récréations mathématiques sont mises en avant dès l'avant-propos pour mieux préciser leur utilisation. Laisant y distingue l'usage qu'il en fait, par comparaison avec les ouvrages, pourtant proches, de Lucas, *L'Arithmétique amusante* (1895), ou d'Émile Fourrey, *Curiosités arithmétiques* (1899). Ici, il ne s'agit pas d'appliquer des théories mathématiques, parfois nouvelles, pour étudier rationnellement un amusement mais bien d'user « de questions amusantes comme moyen pédagogique, pour attirer la curiosité de l'enfant et arriver ainsi à faire pénétrer dans son esprit, sans efforts imposés, les premières notions mathématiques les plus essentielles. Et la diversité des questions, qui pourrait faire croire à un désordre apparent, cache une suite d'idées, voulues, utiles et complètement ordonnées. » (Laisant, 1916, p. 7) Les récréations mathématiques participent également à la progressivité de la difficulté dans les notions abordées (notamment pour les problèmes de rencontres des leçons 47 à 53). Elles lissent les sauts conceptuels par renvoi à des objets familiers (graphiques ou quadrillages) : c'est là un autre principe pédagogique de l'*Initiation*.

L'éventail mystérieux (figure 2), également exposé par Lucas (Lucas, 1895), est néanmoins l'unique jeu ou tour de magie, à proprement parler dans l'*Initiation*. Un joueur choisit un nombre au hasard et indique au magicien les bandes de papier sur lesquels ce nombre mystérieux est inscrit. Si « le magicien » peut rapidement le retrouver « à vue » (en additionnant les premiers nombres des bandelettes indiquées), c'est que les nombres sont inscrits sur chaque tablette en fonction du nombre de zéros terminant leur écriture binaire. Sur notre figure, le nombre secret est 25 (soit 11001 en binaire) : le magicien additionne 1, 8 et 16 pour le retrouver (soit $1 + 1000 + 10000$). Si Laisant préconise cette récréation pour susciter l'intérêt pour le calcul mental, elle peut être utilisée pour la découverte de la numération binaire et la pratique d'opérations simples dans ce système.

À côté de ces récréations historiques, Laisant, considérant les mathématiques comme une science essentiellement expérimentale (voir Laisant, 1898), insiste également sur l'usage d'un matériel simple pour rendre concrètes les notions abordées, ce qui participe au caractère « récréatif » des mathématiques pratiquées. C'est tout d'abord la manipulation sensible d'objets de la vie courante, bâtons de bois pour l'addition (figure 5a), pièces de puzzles ou d'échiquier, qui rend tangibles les notions sous-jacentes. Dès la leçon 16, le papier millimétré figure de manière saisissante les tables de multiplication classiques (figure 5b) en évacuant l'écriture scripturale des chiffres. Jacques Camescasse (1869-1941), espérantiste et franc-maçon comme Laisant, proposera le matériel adéquat pour la pratique effective de l'Initiation mathématique.⁽⁷⁾

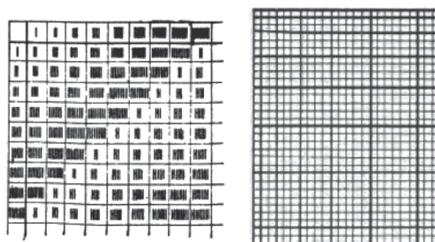


Figure 5 a et b - Table d'addition sans chiffre
et usage du papier quadrillé pour figurer la table de multiplication

L'Initiation s'adresse aux éducateurs de jeunes enfants mais Laisant n'en demeure pas moins attentif aux travaux de l'époque sur l'arithmétique et la théorie des nombres, d'autant plus que plusieurs d'entre eux sont développés de manière originale par des proches. Ainsi, Laisant renvoie aux travaux de Gabriel Arnoux (1831-1913), avec qui il a collaboré pour publier son *Arithmétique graphique: les espaces arithmétiques hypermagiques* (1894), pour mieux documenter le lecteur sur le problème des carrés magiques. Mais c'est particulièrement l'apport des travaux de Lucas qui est régulièrement souligné. Du problème du tailleur (leçon 21) à la figuration des permutations ou à un problème de rencontre de navires transatlantiques, les références aux remarques et énigmes de Lucas sont omniprésentes. Certaines, comme le « *Les nombres triangulaires : le vol des grues* » (leçon 27), ont été exposées aux congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences⁽⁸⁾ que Laisant ou Lucas fréquentent assidûment. Laisant propose ainsi une relecture pédagogique d'un corpus de récréations mathématiques exploré parallèlement par une communauté d'auteurs, parfois amateurs, dont il fait partie intégrante.

(7) Camescasse, L'initiateur mathématique, Jeu de petits cubes rendant facile dans la Famille et à l'École la mise en pratique de « INITIATION MATHÉMATIQUE » de C. A. LAISANT.

(8) Créée en 1872, après la défaite de 1870, l'AFAS a pour but de promouvoir partout la science sur le territoire en organisant des congrès annuels dans différentes villes, congrès ouverts à un public divers (amateurs, industriels, scientifiques).

2- Des nombres insolites pour initier au calcul

Un des moyens pour stimuler la curiosité naturelle de l'enfant est la confrontation avec des nombres aux propriétés particulières, avec la pratique d'opérations surprenantes ou encore avec des valeurs numériques dont l'ordre de grandeur frappe l'imagination. Cela évite l'écueil d'un enseignement trop dogmatique au symbolisme abscons ainsi qu'une routine ou une répétition excessive d'exercices rébarbatifs.

Une pratique calculatoire originale

Certaines « opérations curieuses » (leçon 18) ont ainsi pour but « de donner le goût du calcul, en piquant la curiosité. » (Laisant, 1916, p. 51) Si on demande à un enfant de choisir un nombre écrit avec 3 chiffres dont le premier est distinct du troisième, de lui retrancher son symétrique puis de calculer la somme de cette différence (à laquelle on peut éventuellement adjoindre un « 0 » terminal pour obtenir à nouveau un nombre écrit avec 3 chiffres) et du symétrique de cette différence, on pourra le surprendre en énonçant le résultat invariable de 1089. Si le nombre 483 est choisi, on bien obtient $483 - 384 = 99$ puis $990 + 099 = 1089$.

Les nombres

$$12 \times 9 + 3 (= 111) ; 123 \times 9 + 4 (= 1111) \dots 123456789 \times 9 + 10$$

ne s'écrivent qu'avec des 1. Les résultats de cette sorte, comme les calculs des puissances de 11 (leçon 30), sont nombreux et également présents dans l'ouvrage de Fourrey⁽⁹⁾. Il s'agit d'étonner pour inciter la pratique calculatoire, mentale ou non.

Des « assez grands nombres » pour étonner

Les leçons « Les grains de blé sur l'échiquier », « Une maison à bon marché » et « Le placement du centime » (figure 6) sont des exemples de calculs de termes ou de sommes de termes de suites géométriques où le résultat final surprend par son ordre de grandeur relativement à la valeur du terme initial, ce qui est exactement l'effet recherché par Laisant.

On place un grain de blé sur la 1 ^{ère} case d'un échiquier, puis 2 sur la 2 ^{ème} , puis 4 sur la 3 ^{ème} etc. Quelle est la quantité totale de blé ?	On place 1 centime sur la 1 ^{ère} marche d'un escalier, 2 sur la deuxième, 4 sur la 3 ^{ème} etc... jusqu'à la 26 ^{ème} marche. Quel est le capital total ?	Pendant combien de temps faut-il placer un centime, à intérêt composé, au taux de 5% de telle sorte que la valeur acquise soit de 1 million de francs ?
Réponse : $2^{64} - 1$ grains	Réponse : $2^{26} - 1$ centimes	Réponse : 378 ans

Figure 6 - Différentes récréations autour des « progressions par quotient »

La leçon « Le dîner cérémonieux » est une autre occasion de surprendre les jeunes élèves avec de grands nombres : l'accroissement rapide de $n!$ donne une réponse saisissante au problème posé, à savoir le nombre de façon de disposer n convives autour d'une table ⁽¹⁰⁾. Le problème est aussi l'occasion d'introduire une

(9) Voir « Problèmes divers sur les nombres », Fourrey, 1899.

(10) Le problème initial, à savoir comment disposer 12 invités autour d'une table, amène à dénombrer le nombre de possibilités, ce qui amènerait à plus de 15 ans d'essais au rythme d'un essai par seconde.

visualisation due à Lucas (figure 7) : ces « permutations figurées » sur des échiquiers sont caractéristiques de cette géométrie des nombres développée par Laisant et Lucas.



Figure 7 - La figuration des permutations $abcd$, $abdc$, $adbc$, $dabc$

Le plus grand nombre que l'on puisse écrire avec 3 chiffres 9 (soit 9^{9^9} et non 999) est utilisé à la leçon « Un assez grand nombre » en vertu du grand nombre de chiffres qui le composent (plus de 369 millions⁽¹¹⁾). Accompagné d'indications du temps de calcul (plus de 28 ans), de la longueur de papier nécessaire à son écriture (égale à la circonférence de la Terre)⁽¹²⁾, il parle à l'imaginaire du jeune enfant pour l'extraire d'exercices répétitifs. Ces exemples sont caractéristiques de la volonté constante d'étonner afin de provoquer un intérêt précieux pour des notions qui pourront être explorées rigoureusement durant la période ultérieure d'« étude ».

2- Éduquer par le regard

Souvent, dans les représentations visuelles liées aux récréations, ce sont les positions des parties de la figure entre elles, leurs déplacements relatifs, qui sous-tendent le résultat escompté (on peut penser par exemple à des puzzles mathématiques). En ce sens, ces récréations, qui sollicitent le regard du lecteur, sont à relier à l'intérêt de Laisant pour la « géométrie de situation » étudiée par Lucas, Tarry ou lui-même à travers les questions de labyrinthes ou de placements de pièces sur un échiquier.

Visualiser pour dépasser le symbolisme

L'Initiation comporte ainsi une série de récréations visuelles où il s'agit tout autant de découvrir que de justifier des égalités numériques sans recours à une formule écrite mais au contraire par une schématisation parlante⁽¹³⁾. Le calcul de la somme d'entiers consécutifs (leçon 27 « le vol des grues »), de la somme d'impairs consécutifs, à l'origine proposé sous la forme du « carré de choux » par Lucas (figure 8b), de la somme des carrés d'entiers consécutifs (figure 8c), ou de la somme des termes d'une suite arithmétique (figure 9), sont l'occasion de nombreuses visualisations où apparaît progressivement le résultat escompté.

(11) C'est le neuvième terme de la suite de Joyce que Laisant calcule ici. Voir Weisstein, Eric W. « *Joyce Sequence*. » From MathWorld--A Wolfram Web Resource. :

<http://mathworld.wolfram.com/JoyceSequence.html>.

(12) Ces remarques sont dues au physicien suisse Charles Édouard Guillaume (1861-1938), prix Nobel en 1920.

(13) Sur la « preuve sans mot » : voir Delahaye, J.-P. (1998). La preuve sans mot. *Pour la Science*, 244, 100-106.

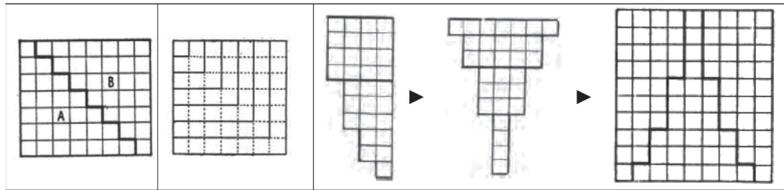


Figure 8 a, b et c. Visualisations pour la somme de n entiers, de n impairs consécutifs et de n carrés consécutifs⁽¹⁴⁾

À l'aide des récréations proposées, on obtient aisément des « formules qui paraissent bien savantes et qui cependant n'exigent pas le moindre calcul, puisqu'on les lit sur les figures, puisqu'on les voit, puisqu'on peut les construire de ses mains » (Laisant, 1916, p. 88). Elles soulagent d'autant plus d'un effort pénible de mémorisation.

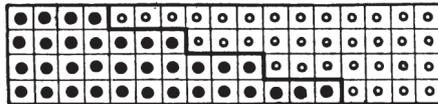


Figure 9 - Somme des termes d'une progression par différence quelconque (ici de raison 4)

La 25ème leçon « Divers casse-têtes ; macédoine mathématique » (figure 10 a et b) vise à relier un énoncé géométrique, un résultat algébrique et une égalité scripturale relatifs aux fameuses « identités remarquables » par une visualisation synthétique. Elle procède en partie de ce procédé où le raisonnement sur les aires amène à considérer cette figuration comme un seul symbole graphique cohérent facilitant la mémorisation.

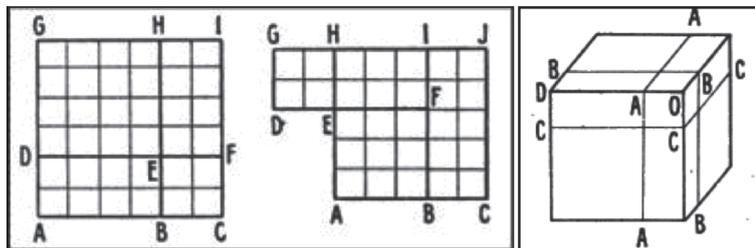


Figure 10 a, b et c - Figuration du développement⁽¹⁵⁾ de $(a + b)^2$, $(a - b)^2$ et $(a + b)^3$

Ces raisonnements sur les aires de figures sont un procédé récurrent, mêlant construction et découpage (mental voire effectif) d'une figure et visualisation géométrique de formules algébriques. Le changement de registre, permis par ces récréations et explicité par Laisant, permet une réévaluation de la notion étudiée par passage entre le registre algébrique et géométrique, entre l'énoncé littéral et la formulation en langage courant.

(14) Voir aussi « les nombres polygonaux », Fourrey, 1899.

(15) En effet, sur la figure 10a, $(AB + BC)^2 = DE^2 + BC^2 + AB \cdot AD + EF \cdot FI = AB^2 + 2 \cdot AB \cdot BC + BC^2$. Sur la figure 10b, $AB^2 = \text{aire}(ACJGDE) - 2 \cdot \text{aire}(BCJI)$ soit $(AC - BC)^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC$.

Les problèmes de rencontres sont source de plusieurs récréations où les représentations graphiques de fonctions sont mises en avant avec cette promesse séduisante de faire de « l'algèbre sans calcul ». Laisant propose des graphiques issus de la vie courante (courbe de températures, marche du métropolitain de la figure 11) pour familiariser l'enfant avec différents types de courbes.

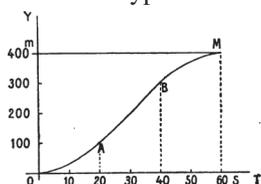


Figure 11 - Marche d'un train du métropolitain

De la rencontre de deux marcheurs progressant à des allures différentes à la rencontre de ces mêmes marcheurs avec un troisième venant en sens inverse (figure 12a) ou encore de la détermination (graphique) du lieu où un cycliste doit abandonner son vélo pour qu'un deuxième voyageur en profite et que tous deux arrivent rapidement à destination (figure 12b), l'ensemble de ces récréations de plus en plus sophistiquées a bien pour but de montrer la pertinence visuelle de ces graphiques. Ceux-ci sont construits sans référence aux expressions algébriques des fonctions sous-jacentes mais uniquement par une application graphique des données de vitesses et de distances à parcourir. La détermination graphique (et donc approximative) de la distance parcourue par un chien allant et venant d'un de nos deux voyageurs initiaux à l'autre (figure 12c) n'empêche d'ailleurs pas de toucher du doigt les mécanismes à l'œuvre, sans évoquer explicitement les modélisations latentes.

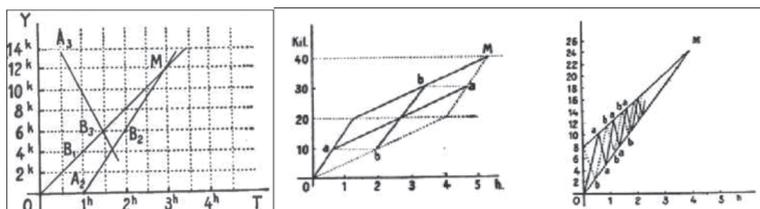


Figure 12 a, b et c - Différents problèmes de rencontres illustrés graphiquement

Visualiser pour raisonner

Le graphique devient donc primordial dans l'introduction de la notion de fonction car il a « l'avantage de parler à l'esprit par l'intermédiaire des yeux, de figurer les choses elles mêmes. C'est là une qualité précieuse en matière de pédagogie. » (Laisant, 1916, p. 135) La leçon 49 (figure 13), inspirée par Lucas, entre dans cet ordre d'idée mais en diffère dans son utilisation par Laisant. Il s'agit de déterminer combien de navires un transatlantique partant du Havre pour New York va rencontrer, sachant que chaque jour un de ces mêmes navires quitte chacun de ces ports en destination de l'autre. Ici, Laisant oppose explicitement raisonnement théorique et réflexion reposant sur un support visuel efficient. Il souligne l'erreur des

savants à qui a été posée la question, « raisonnant mais ne voyant pas » (Laisant, 1916, p. 141).

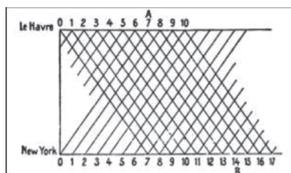


Figure 13 - Le problème des rencontres de Lucas

Les visualisations comportent naturellement une limite. Ainsi, Laisant use de manière parcimonieuse de paradoxes, préférant l'évidence d'une visualisation cohérente avec un arrière-plan théorique, implicite durant cette période d'initiation. Il présente cependant le paradoxe dit de Lewis-Carroll (figure 14) mais se garde de ce dévoiement du principe d'illustration visuelle qu'il a précédemment utilisé de manière abondante.

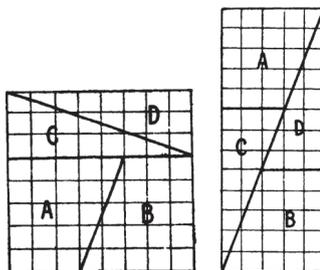


Figure 14 - Le paradoxe $64 = 65$

Avec son *Initiation*, Laisant donne une nouvelle dimension pédagogique aux récréations qui divertissent son époque. La diversité et l'originalité des situations, leur aspect esthétisant, présentent un véritable potentiel pour l'enseignement des mathématiques débattu à la fin du XIX^e siècle, ce que plusieurs autres mathématiciens ont également perçu. Laisant s'inscrit ainsi dans un nouveau réseau d'auteurs. André Sainte-Laguë, professeur au Conservatoire national des arts et métiers, est l'auteur d'un article (Sainte-Laguë, 1910) contenant des considérations similaires sur l'usage du papier quadrillé dans la revue internationale *L'Enseignement mathématique*. Cette revue est cofondée par Laisant pour faciliter les échanges entre mathématiciens de tous horizons autour des questions de renouveau de l'enseignement des mathématiques.

À la suite de cette première initiation, Laisant dirige la collection des *Initiations scientifiques* où les mêmes principes pédagogiques sont appliqués et où l'utilisation de « récréations » est au service d'une approche ludique, non routinière et donc stimulante pour l'enfant en astronomie (1908 par Camille Flammarion), chimie (1909), mécanique (1909), zoologie (1910), botanique (1911) et physique (1913 par Guillaume).

Références des Textes historiques

Fourrey, É. (1899). *Récréations arithmétiques*. Paris : Nony.⁽¹⁶⁾

Laisant, C.-A. (1898). *La Mathématique. Philosophie. Enseignement*. Paris: G. Carré et Naud.⁽¹⁷⁾

Laisant, C.-A. (1916). *Initiation Mathématique, ouvrage étranger à tout programme dédié aux amis de l'enfance*. 2nd édition. Paris : Hachette.

Lucas, É. (1891). *Théorie des nombres. vol. I*. Paris : Gauthier-Villars.⁽¹⁸⁾

Lucas, É. (1882-1894). *Récréations Mathématiques*. 4 vol. Paris : Gauthier-Villars.

Lucas, É. (1895). *L'Arithmétique amusante*. Paris : Gauthier Villars.

Macé, J. (1862). *L'Arithmétique du grand-papa. Histoire de deux petits marchands de pommes*. Paris: J. Hetzel.⁽¹⁹⁾

Sainte-Laguë, A. (1910). Note sur les usages du papier quadrillé. *L'Enseignement mathématique*, 12, 5-17.⁽²⁰⁾

(16) Fac-similé disponible ici :

<https://archive.org/details/rcrationsari00fouruoft>.

(17) Fac-similé disponible ici :

<https://archive.org/details/lamathmatiqueph00laisgoog>.

(18) Les fac-similés des travaux de Lucas sont disponibles ici :

<http://edouardlucas.free.fr>.

(19) Fac-similé disponible ici :

<http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k204042m>.

(20) Fac-similé disponible ici :

<http://www.e-periodica.ch/digbib/view?pid=ens-001:1910:12#308>.