

Les *Récréations* d'Ozanam

Pierre Legrand(*)

Le lecteur qui veut seulement accéder à une liste d'exercices pittoresques peut sauter les paragraphes 1 et 2.

1. Introduction

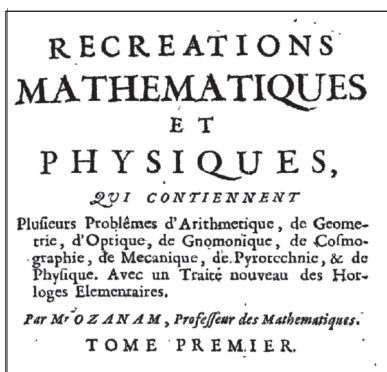
Jacques Ozanam (1640-1718) est aujourd'hui bien oublié. Les histoires des mathématiques ne le mentionnent pas. Il fut cependant en son temps un savant honoré, auteur du premier dictionnaire de mathématiques (1691). L'ouvrage qui le fit connaître du grand public, les *Récréations mathématiques et physiques*, publié en 1694, fut de son vivant et encore longtemps après sa mort plusieurs fois réédité.

À la différence de son prédécesseur Bachet⁽¹⁾, dont la fortune lui évitait d'avoir à travailler pour vivre, Ozanam, rejeton d'une riche famille mais fils cadet (donc n'héritant pas), dut utiliser comme gagne-pain son don précoce pour les sciences : il fut professeur de mathématiques, donnant des leçons à des élèves fortunés, dont Abraham de Moivre. Il en vécut largement... jusqu'à la guerre de succession d'Espagne (1701-1714) qui, faisant fuir les élèves étrangers, le mit dans la gêne.

2. Ozanam et Bachet : rigueur ou divertissement ?

Entre les *Problèmes plaisants et délectables* de Bachet, dont l'édition définitive est de 1624, et les *Récréations mathématiques et physiques* de 1694, qui deux générations plus tard en prennent la relève, il y eut plusieurs publications de mathématiques récréatives, mais rien qui soit d'une qualité comparable.

Dans sa préface, Ozanam rend hommage au « docte Bachet sieur de Méziriac, célèbre par ses excellents ouvrages »,... ce qui ne l'empêche pas de reprendre à Bachet, sans états d'âme et sans le citer, nombre de ses énoncés.



Cela dit, le propos et la structure des *Récréations* s'écartent grandement de ceux des *Problèmes*.

Un champ beaucoup plus étendu

Les énigmes de Bachet font appel uniquement à l'arithmétique. Celles d'Ozanam,

(*) p.m.legrand@sfr.fr

(1) Voir dans le B.V. n° 516 l'article « Problèmes plaisants et délectables ».

comme le montre l'en-tête ici reproduit, débordent largement ce cadre⁽²⁾. Cette abondance de matière l'amène à diviser l'œuvre en deux tomes. L'arithmétique et la géométrie occupent la première moitié du tome I, qui seule sera évoquée dans ce qui suit.

Pas plus d'algèbre que dans Bachet

Pas plus que dans les *Problèmes plaisants et délectables*, on ne trouve d'équation dans le livre d'Ozanam. C'est que la mise en place des x et des y qui nous sont familiers a beau avoir commencé peu avant 1600, elle ne s'est imposée que très lentement et a été longtemps l'apanage d'une infime minorité de spécialistes ; le public visé par Ozanam en ignorait quasiment tout.

Un traitement beaucoup plus sommaire

Cent quatre-vingt-dix pages suffisent à Ozanam pour trente-six problèmes d'arithmétique et cinquante de géométrie, alors qu'en deux cent quarante-sept pages Bachet ne traite que trente-cinq problèmes. La raison en est simple : alors que Bachet commence son livre par cinquante-deux pages de préliminaires mathématiques et le charge de démonstrations détaillées parfois indigestes, Ozanam se contente le plus souvent de fournir une recette pour fabriquer la solution, sans expliquer pourquoi elle marche ni comment il y est parvenu.

Un objectif différent

La manière dont chacun des deux auteurs présente son livre est significative.

Voici ce qu'écrit Bachet dans sa préface : «... encore que ce ne soient que des jeux [...] si est-ce qu'il faut bien de la subtilité d'esprit pour les pratiquer parfaitement, et faut être plus que médiocrement expert en la science des nombres pour bien entendre les démonstrations... ».

Ozanam, lui, annonce d'emblée : « Comme je ne prétends pas ajouter ici des problèmes bien difficiles, je ne prétends pas aussi en donner les démonstrations, pour ne pas embarrasser l'esprit de ceux que je veux divertir par la lecture de plusieurs problèmes utiles et agréables, me contentant de leur donner pour la solution de ces problèmes des règles infaillibles qui ne les tromperont jamais ».

La situation est claire : d'un côté un arithméticien érudit qui rêve de faire partager sa passion à une élite, de l'autre un esprit encyclopédique qui veut inspirer le goût des sciences à un public aussi large que possible, fût-ce au prix d'un brin de racolage. Ozanam est donc sans doute, plus que Bachet, un véritable vulgarisateur.

On s'intéresse ici en priorité à la première édition, celle de 1694, en limitant l'étude aux deux premières parties du tome 1 : arithmétique et géométrie. Les solutions qui suivent chaque exercice ne sont pas d'Ozanam, celui-ci ne donnant que des réponses qu'il ne justifie pas.

(2) En cela Ozanam n'est pas le premier. Il suit l'exemple des recueils de récréations de Denis Henrion (1620), Jean Leurechon (1624) et Claude Mydorge (1630).

3. Les problèmes d'arithmétique

La section d'arithmétique commence en fanfare par l'irrespectueux problème de l'abbesse aveugle, qui a fait l'objet d'un article⁽³⁾ du Bulletin n° 511. Les énigmes suivantes déçoivent un peu : beaucoup de thèmes empruntés à Bachet et, pour les autres, une majorité de résultats repris aux mathématiciens du XVII^e siècle, notamment Fermat, présentés le plus souvent sur des exemples.

Le plus pittoresque est sans doute le problème VII, où sous le titre « De la progression arithmétique » sont groupées six petites énigmes. En voici trois :

Question III : « Un voyageur a fait cent lieues en huit jours de temps, et chaque jour il a fait également plus de chemin que le jour précédent [comprendre : la différence entre les chemins parcourus un jour et le précédent est constante] ; sachant que le premier jour il a fait seulement deux lieues, on demande combien de lieues il a fait chacun des autres jours. »

S'il a fait $2 + x$ lieues le second jour, il a fait $2 + (2 + x) + (2 + 2x) + \dots + (2 + 7x)$ en tout, soit $8 \times 2 + (1 + 2 + \dots + 7)x$, ce qui donne $16 + 28x = 100$, d'où $x = 3$. Il a donc fait successivement 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20 et 23 lieues.

Question IV : « Un voleur en s'enfuyant fait 8 lieues par jour, et un archer le poursuit, qui n'a fait que 3 lieues le premier jour, 5 le second, 7 le troisième et ainsi de suite, en augmentant chaque fois de 2 lieues chaque jour. On demande en combien de jours l'archer atteindra le voleur, et combien de lieues chacun aura fait. »

Solution 1 : Il suffit de dresser un tableau :

au soir du jour n°	1	2	3	4	5	6	7
le voleur a fait en tout	8	16	24	32	40	48	(56)
l'archer a fait en tout	3	8	15	24	35	48	(63)

Solution 2 : Au soir du n^{e} jour, le voleur a fait $8n$ lieues et l'archer $3 + 5 + \dots + (2n + 1)$, soit $(n + 1)^2 - 1$. On a donc à résoudre l'équation $n^2 + 2n = 8n$, ce qui donne $n = 6$.

Question V : « On suppose que de Paris à Lyon il y a 100 lieues, et que deux courriers sont partis en même temps et par la même route, l'un de Paris pour aller à Lyon en faisant chaque jour deux lieues de plus que le précédent, et l'autre de Lyon pour venir à Paris en faisant chaque jour trois lieues de plus que le précédent, et qu'ils sont arrivés précisément à mi-chemin⁽⁴⁾, le premier au bout de cinq jours, le second au bout de quatre jours. On demande combien ces deux courriers ont fait de lieues chaque jour. »

Si, le premier jour, le courrier parti de Paris a fait x lieues et celui de Lyon en a fait

(3) Pages 587-595.

(4) Formule légèrement modifiée pour plus de clarté.

y, on doit résoudre

$$x + (x+2) + (x+4) + (x+6) + (x+8) = y + (y+3) + (y+6) + (y+9) = 50,$$

soit $5x + 20 = 50$ et $4y + 18 = 50$, d'où $x = 6$ et $y = 8$. Le trajet fait les jours suivants en découle aussitôt.

Remarque : Le problème VIII, « De la progression géométrique », est nettement plus théorique. On y trouve la sommation d'une série géométrique. On y trouve aussi l'affirmation que $2^{2^n} + 1$ est toujours premier, résultat énoncé par Fermat et dont Euler prouvera la fausseté en 1732.

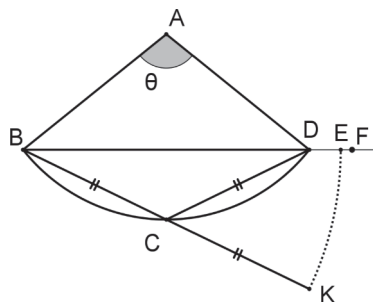
4. Les problèmes de géométrie

La section de géométrie est la plus intéressante. Le démarrage est pourtant fort banal (problèmes I et II : mener d'un point une perpendiculaire ou une parallèle à une droite donnée) et nombre de problèmes sont de la fausse géométrie, c'est-à-dire de l'arithmétique déguisée (on en verra deux exemples). Mais on y trouve aussi quelques jolis exercices.

Le plus beau : problème XII

« Trouver une ligne droite égale à un arc de cercle donné ».

Il s'agit ici de construire un segment de même longueur qu'un arc de cercle donné, problème du même tonneau que la quadrature du cercle. Ozanam dit clairement que sa solution est approchée, mais il affirme que, pour un arc de rayon 1 et un angle au centre d'au plus 30° , l'erreur est par défaut et moindre que 10^{-5} .



• Voici sa construction :

il s'agit d'estimer la longueur de l'arc BCD, de milieu C, d'angle au centre θ , exprimé en radians. On prend sur la demi-droite [BD) le point E tel que $BE = BC + CD$; puis on place sur la demi-droite le point F situé au-delà de E et tel que $EF = \frac{1}{3}DE$. La distance BF est l'approximation cherchée.

• Interprétons-la :

En prenant $AB = 1$, on a $BC = 2 \sin \frac{\theta}{4}$, donc $BE = 4 \sin \frac{\theta}{4}$. Mais $BD = 2 \sin \frac{\theta}{2}$, d'où

$DE = 4 \sin \frac{\theta}{4} - 2 \sin \frac{\theta}{2}$. On a $BF = BE + \frac{1}{3}(BE - BD) = \frac{4}{3}BE - \frac{1}{3}BD$. Cela revient à prendre :

$$\theta \approx \frac{16}{3} \sin \frac{\theta}{4} - \frac{2}{3} \sin \frac{\theta}{2}$$

• *Vérification pour un angle de 30° :*

Alors $\theta = \frac{\pi}{6} \approx 0,5235988$ et $\frac{16}{3} \sin \frac{\theta}{4} - \frac{2}{3} \sin \frac{\theta}{2} \approx 0,5235936$. La précision annoncée par Ozanam est largement atteinte... et l'on a une belle approximation de π , à savoir 3,141562.

On peut d'ailleurs voir que, même pour un angle de 120° , l'estimation n'est pas déraisonnable : $\theta = \frac{2\pi}{3} \approx 2,094$, alors que $\frac{16}{3} \sin \frac{\pi}{6} - \frac{2}{3} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{8 - \sqrt{3}}{3}$, soit à peu près 2,089.

• *Regardons ce qui se passe quand θ varie de 0 à π :*

Posons $f(\theta) = \theta - \frac{16}{3} \sin \frac{\theta}{4} + \frac{2}{3} \sin \frac{\theta}{2}$.

On a $f'(\theta) = 1 - \frac{4}{3} \cos \frac{\theta}{4} + \frac{1}{3} \cos \frac{\theta}{2}$ et $f''(\theta) = \frac{1}{3} \sin \frac{\theta}{4} - \frac{1}{6} \sin \frac{\theta}{2}$.

Transformons f'' :

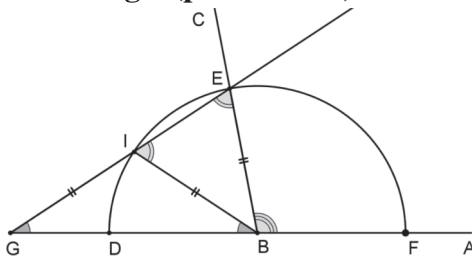
$$f''(\theta) = \frac{1}{6} \left(2 \sin \frac{\theta}{4} - \sin \frac{\theta}{2} \right) = \frac{1}{3} \sin \frac{\theta}{4} \left(1 - \cos \frac{\theta}{4} \right).$$

Sur $]0, \pi]$, $f''(\theta) > 0$, donc $f'(\theta)$ croît et, comme $f'(0) = 0$, on a $f'(\theta) > 0$. Ainsi l'erreur $f(\theta)$ croît en partant de zéro quand θ décrit $[0, \pi]$. Ozanam ne se vantait donc pas : son estimation est bien par défaut, elle est d'autant meilleure que θ est plus petit et l'erreur est de moins de 10^{-5} pour les angles inférieurs à 30° .

N.B. : Selon l'édition 1778 des *Récréations* (p. 354), cette construction serait due à Huygens.

Un grand classique : la trisection de l'angle (problème V)

L'angle $\widehat{ABC}$ étant donné, on trace comme indiqué sur la figure un demi-cercle de rayon R coupant [BA) en F, le prolongement de [BA) en D et [BC) en E. Puis on prend sur la demi-droite [BD) un point G, choisi de sorte que [GE] coupe le demi-cercle en un point I vérifiant $GI = R$. Établir que



$$\widehat{IGB} = \frac{1}{3} \widehat{ABC}.$$

Les triangles GIB et IBE sont isocèles : $\widehat{IGB} = \widehat{IBG}$ et $\widehat{BIE} = \widehat{IEB}$.

Mais $\widehat{BIE} = \widehat{IGB} + \widehat{IBG} = 2\widehat{IGB}$ et $\widehat{ABC} = \widehat{IGB} + \widehat{IEB} = 3\widehat{IGB}$.

On a bien $\widehat{IGB} = \frac{1}{3} \widehat{ABC}$ et le tour est joué.

Remarques :

- La figure est celle d'Ozanam, complétée par le marquage des angles et des segments.
- C'est une construction à **trois** instruments : la règle, le compas ... et l'estime, le choix de G ne pouvant être fait qu'approximativement, à l'aide d'une règle graduée.
- Cette construction est la proposition 8 du *Livre des lemmes* d'Archimède.
- Une animation est disponible sur le site de l'APMEP.

Les problèmes les plus agréables du recueil d'Ozanam sont sans doute ses constructions de cercles⁽⁵⁾, dont on trouvera un choix ci-après.

Amusants et faciles : problèmes XIV et XIX

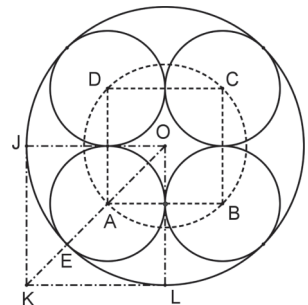
Problème XIV : « Décrire dans un cercle donné quatre cercles égaux qui se touchent mutuellement, et aussi la circonférence du cercle donné ».

Il s'agit d'inscrire dans un cercle de rayon R quatre cercles distincts de même rayon r de centres respectifs A, B, C, D, tangents au grand cercle et tels que le premier soit tangent au second, le second au troisième, le troisième au quatrième et le quatrième au premier.

Comme à son habitude, Ozanam donne sa construction sans la justifier, ce qui ici est aisé. Supposons connue une solution. Les distances AB, BC, CD, DA sont toutes égales à 2r ; on a de plus OA = OB = OC = OD = R - r. ABCD est un losange inscriptible, donc un carré, qui a pour centre O.

En comparant les longueurs du côté [AB] et de la demi-diagonale [OA], il vient : $r\sqrt{2} = R - r$, soit

$$r = \frac{R}{1+\sqrt{2}} \text{ ou mieux } r = R(\sqrt{2}-1).$$



Le lecteur vérifiera sans peine que cette valeur de r permet bien la construction et qu'elle se lit sur la figure : OK = OE + EK donne $R + EK = R\sqrt{2}$, donc $EK = R(\sqrt{2}-1) = r = AE$, ce qui signifie que A est le symétrique de K par rapport à E.

N.B. 1 : Au lieu d'imposer aux quatre cercles d'être tangents intérieurement au cercle donné, on peut leur imposer de lui être tangents extérieurement (**problème XIX**). Il

(5) Ces problèmes sont à rapprocher des *sangaku*, ces énigmes géométriques qu'on trouve parfois dans les temples japonais. Voir le joli livre *Sangaku*, de Géry Huvent, chez Dunod.

est facile de voir que leur rayon commun r sera alors $r = R(\sqrt{2} + 1)$.

N.B. 2 : Avec six cercles de même rayon au lieu de quatre, le travail est encore plus simple ; on obtient $r = R$ dans le cas du contact extérieur et $r = \frac{R}{3}$ dans le cas du contact intérieur (on observera que, dans ce cas, on peut encore caser dans la zone laissée vide par les six cercles un septième cercle de rayon r).

Un peu plus difficile : problème XXIV

« Décrire au-dedans d'un triangle équilatéral trois cercles égaux qui se touchent mutuellement et aussi les trois côtés du triangle équilatéral. »

L'énoncé n'est pas d'une limpidité totale, mais la figure (copiée de celle d'Ozanam, à ceci près que les points K et L ont été ajoutés) suffit à l'éclaircir.

Supposons connue une solution. Soit a la longueur du côté du triangle, r le rayon des cercles que l'on veut tracer. Le point G est à la distance r de (AC) et (BC) donc il est sur la bissectrice (CD) de $\widehat{ACB}$.

Des relations $GK = CK \tan 30^\circ$ et $GK = CG \sin 30^\circ$ on tire $CG = 2r$ et $CK = r\sqrt{3}$.

KGIL étant un rectangle, on a $KL = GI = 2r$.

De $AC = AL + LF + FK + KC$ on tire :

$$a = 2r(1 + \sqrt{3}), \text{ d'où } r = \frac{\sqrt{3}-1}{4}a.$$

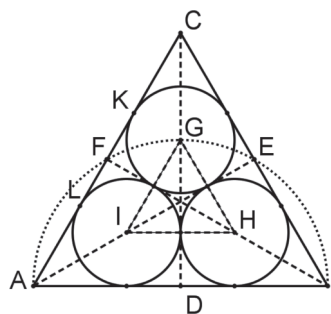
On a donc $CG = \frac{\sqrt{3}-1}{2}a$ et, comme $CD = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, on en déduit $DG = \frac{a}{2}$. Le point G est donc l'intersection du cercle de diamètre [AB] avec la hauteur [CD].

Il est immédiat ensuite de voir que les trois points G, H, I ainsi construits sont bien les centres de cercles répondant à la question.

Joli mais plus coriace : problème XV

On donne un demi-cercle d'extrémités A et C, de sommet B, de centre D et de rayon R ; on trace le cercle Γ de diamètre [BD]. Construire deux cercles qui lui soient tangents et soient aussi tangents au demi-cercle initial et au segment [AC].

• Voici en substance la solution d'Ozanam (les notations sont celles de la figure, recopiée sur Ozanam). Soit E le milieu de [BD], H le milieu de [DE]. Le cercle de centre E et de rayon BH coupe la médiatrice de [DE] en deux points F et G qui sont les centres des cercles cherchés. Aucune justification n'est bien entendu donnée.



- *Montrons que les deux cercles ainsi construits conviennent.*

Le segment [FE] coupe Γ en I tel que

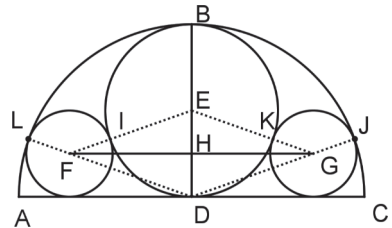
$$FI = FE - EI = \frac{3R}{4} - \frac{R}{2} = \frac{R}{4}.$$

La demi-droite [DF] coupe le demi-cercle en

L ; de $FD = FE = \frac{3R}{4}$ on tire

$$FL = DL - FD = R - \frac{3R}{4} = \frac{R}{4}.$$

Le cercle de centre F et de rayon $\frac{R}{4}$, tangent à (AC), est donc aussi tangent en I à Γ et en L au demi-cercle.



- *Montrons qu'il n'y a pas d'autre solution.*

Soit F le centre d'un cercle solution, r son rayon, H n'étant plus *a priori* le milieu de [DE], mais le pied de la hauteur du triangle FED.

H est à même distance de (AC) que F, donc $HD = r$ et $BH = BD - HD = R - r$.

En outre $FE = FI + IE = r + \frac{R}{2}$ et $HE = DE - DH = \frac{R}{2} - r$.

Appliquons la relation de Pythagore aux triangles FHE et FHD. On a :

$$FH^2 = FE^2 - HE^2 = FD^2 - HD^2, \text{ d'où } \left(\frac{R}{2} + r\right)^2 - \left(\frac{R}{2} - r\right)^2 = (R - r)^2 - r^2, \text{ soit encore}$$

$$2rR = R^2 - 2rR \text{ et finalement } r = \frac{R}{4}, \text{ puis } HD = HE = \frac{R}{4} \text{ et } FE = r + \frac{R}{2} = \frac{3R}{4} = BH.$$

Le point F est donc bien à l'intersection du cercle de centre E et de rayon $\frac{3R}{4}$ et de la médiatrice de [DE]. La solution d'Ozanam est bien la seule possible.

Problèmes pseudo-géométriques

Les nombreux problèmes portant sur des données géométriques mesurées par des entiers sont en fait de l'arithmétique. En voici deux : un facile et un difficile.

Problème XXVII : « Décrire un parallélogramme rectangle dont l'aire en nombres soit égale au contour. »

Traduction : trouver deux entiers x et y strictement positifs tels que $xy = 2(x + y)$.

Supposons connue une solution. On a, si y est le plus grand des deux nombres, $2y < 2(x + y) \leq 4y$ donc $2y < xy \leq 4y$ et $2 < x \leq 4$; x vaut donc 3 ou 4.

- $x = 4$ donne $y = 4$, correspondant à un carré de côté 4, d'aire 16 et de périmètre 16.

• $x = 3$ donne $y = 6$, donc un rectangle de côtés 3 et 6, d'aire 18 et de périmètre 18.

Remarque : Une variante est de mettre $xy = 2(x + y)$ sous la forme $(x - 2)(y - 2) = 4$.

Problème XXIII : « Décrire un triangle rectangle dont l'aire en nombres soit égale au contour. »

Traduction : trouver trois entiers x, y, z strictement positifs tels que :

$$(S) \quad \begin{cases} xy = 2(x + y + z) & (1) \\ x^2 + y^2 = z^2 & (2) \end{cases}$$

Ozanam donne sans trop de commentaires les deux solutions (6,8,10) et (5,12,13), en affirmant que ce sont les seules.

Méthode 1 : Il n'est pas restrictif de supposer $x \leq y$. De $0 < x \leq y$ et $y \leq z \leq y\sqrt{2}$ on tire $4y < xy \leq 2(2 + \sqrt{2})y$, puis $4 < x < 7$; x ne peut donc valoir que 5 ou 6.

• Si $x = 5$, l'équation (2) donne $(z - y)(z + y) = 25$; la seule décomposition de 25 en deux facteurs distincts est 1×25 , ce qui mène à $z - y = 1$ et $z + y = 25$, d'où le triplet (5,12,13).

• Si $x = 6$, l'équation (1) donne $z = 2y - 6$; en reportant dans $(z - y)(z + y) = 36$, on arrive après réductions à $y^2 - 8y = 0$, d'où le triplet (6,8,10).

Méthode 2 : Ajoutons à l'équation (2) l'équation (1) multipliée par 2.

On obtient $(x + y)^2 = z^2 + 4(x + y) + 4z$, soit $(x + y)^2 - z^2 = 4(x + y + z)$ ou encore

$$(x + y + z)(x + y - z) = 4(x + y + z).$$

La simplification par $x + y + z$, qui est certainement non nul, donne $x + y - z = 4$. En reportant $z = x + y - 4$ dans (1), il vient $xy = 4(x + y) - 8$, soit : $(x - 4)(y - 4) = 8$. Les seules décompositions de 8 en deux facteurs étant 1×8 et 2×4 , on arrive (en supposant toujours $x \leq y$) à $(x - 4 = 1, y - 4 = 8)$ et $(x - 4 = 2, y - 4 = 4)$ qui donnent les triplets d'Ozanam.

Remarque : Cette seconde méthode permet d'avoir toutes les solutions du système (S) en nombres réels : d'une part les triplets vérifiant $x + y + z = 0$ et d'autre part ceux donnés en fonction de x par les formules : $y = 4 + \frac{8}{x-4}$; $z = x + y - 4 = x + \frac{8}{x-4}$.

Pour avoir les solutions strictement positives, ce qui exclut le premier type de triplets,

on observe que $z = \frac{x^2 - 4x + 8}{x - 4} = \frac{(x - 2)^2 + 4}{x - 4}$, ce qui exige $x > 4$; réciproquement, si $x > 4$, il est manifeste qu'on a $y > 4$ et, puisque $z = x + y - 4$, qu'on a aussi $z > 4$.

5. Ozanam revu et corrigé par Montucla

Parmi les éditions posthumes des *Récréations*, les plus intéressantes sont celle de 1778, « totalement refondue et considérablement augmentée » par Jean Étienne Montucla⁽⁶⁾, sous le pseudonyme de *monsieur de C.G.F.*, et celle de 1790 (où, comme on le voit ci-contre, ce même Montucla devient *monsieur de M****). Elles sont en quatre tomes au lieu de deux.

Arithmétique et géométrie occupent un tome de cinq cents pages, contre à peine deux cents dans l'original.

Près d'un siècle après la première édition, le livre ne contient toujours qu'un nombre infime d'équations.

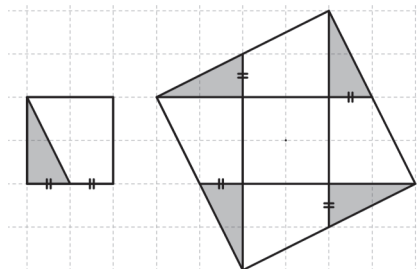
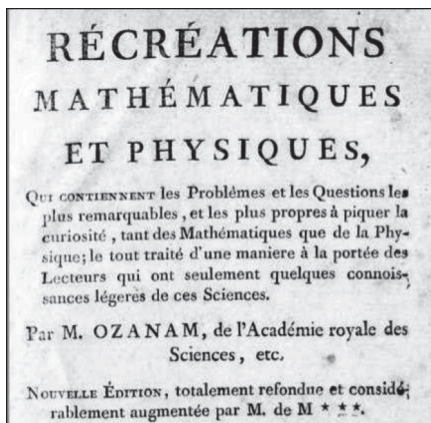
Montucla, cependant, a plus d'ambition scientifique qu'Ozanam : il ajoute des préliminaires théoriques, il justifie les solutions, donne des indications historiques⁽⁷⁾ et propose quantité de problèmes nouveaux, liés pour la plupart aux impressionnants progrès de la science depuis 1694.

Revers de la médaille, le livre a perdu de la vivacité qui lui avait valu un large public et, pour tout dire, son caractère didactique le rend souvent assez ennuyeux. Mais sans doute un lecteur courageux aurait-il beaucoup à y glaner, comme le montrent les deux exemples suivants (l'un très facile, l'autre assez coriace).

Problème XVIII

« Avec cinq carrés égaux, en former un seul. »

La solution tient dans les deux figures ci-contre.



Problème XXX : un joli paradoxe⁽⁸⁾

« Percer un cube d'une ouverture par laquelle peut passer un autre cube égal au premier. »

(6) Auteur notamment d'une célèbre *Histoire des mathématiques*, la première depuis l'Antiquité.

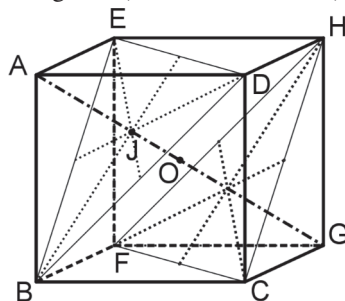
(7) Dont plusieurs pages fort intéressantes sur π et la quadrature du cercle (pages 355-366 de l'édition 1790)

(8) La première étude de ce problème serait due à John Wallis (1616-1703)..

« [...] on peut percer dans le cube, et dans le sens parallèle à une de ses diagonales, un trou carré égal à une des bases du cube, et cela sans solution de continuité d'aucun côté [...] ».

L'essentiel du raisonnement repose sur ceci : la projection orthogonale d'un cube parallèlement à une de ses diagonales est un hexagone régulier (contour et intérieur).

On projette, avec les notations de la figure, le cube sur le plan (BDE) parallèlement à la diagonale (AG) qui lui est perpendiculaire. Les points H, F, C, sont symétriques de B, D, E par rapport au centre O du cube ; leurs projections H', F', C' sur le plan (BED) forment donc un triangle équilatéral symétrique du triangle équilatéral BDE par rapport à son centre J. La figure BC'DH'EF' est donc un hexagone régulier de centre J.



Si a est le côté du cube, la diagonale d'une face vaut $a\sqrt{2}$ et, par le théorème de Pythagore appliqué au triangle AGH, la diagonale du cube vaut $a\sqrt{3}$. En exprimant de deux façons l'aire du triangle ABG, rectangle en B, il vient : $BJ \times AG = AB \times BG$,

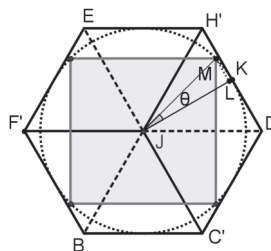
$$\text{d'où } BJ = \frac{a \times a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = a \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

BJ est le rayon du cercle circonscrit à l'hexagone ; c'est aussi la longueur du côté du triangle équilatéral JBC'. Le rayon ρ du cercle inscrit γ dans l'hexagone est la hauteur de ce triangle, soit $a \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$; donc $\rho = \frac{a}{\sqrt{2}}$. On peut inscrire dans γ un carré de

côté $\frac{a}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2}$, soit a .

Si on enlève dans le cube la partie qui se projette selon un tel carré, on pourra dans le trou ainsi foré faire passer un autre cube de même taille.

La situation la plus favorable est celle où le carré a un côté parallèle à un côté de l'hexagone, par exemple BC'. Prenons les notations de la figure ci-contre. Soit K le milieu de [DH'], L la projection orthogonale de M sur la droite (JK) ; l'angle $\theta = \widehat{KJM}$ vaut $45^\circ - 30^\circ$, soit 15° .



$$\text{On a : } LK = \rho(1 - \cos\theta) = \frac{a}{\sqrt{2}}(1 - \cos 15^\circ), \text{ qui donne}$$

$$LK \approx 0,0241a.$$

La distance de M au bord de l'hexagone est donc très faible. Pour un cube d'arête

20 cm, l'endroit le plus mince du contour du cube troué est d'à peine 5 mm. La réalisation matérielle est donc fort difficile.

Remarque : On trouvera une animation sur le site de l'APMEP.

Conclusion

Les *Récréations*, que ce soit dans leur état d'origine ou dans la version de Montucla, sont devenues un livre de lecture malaisée. On aurait cependant tort d'oublier que cet ouvrage a fait date et que son succès s'est étendu sur un siècle. Ozanam a été un des pionniers d'une culture générale débordant le cadre traditionnel des humanités et, avec quelque cinquante ans d'avance, un précurseur des Encyclopédistes. Il est donc légitime d'estimer que les *Récréations* ont apporté à ses contemporains, comme il en formait le vœu dans sa préface, « un exercice de la raison dans la justesse de ses démarches ».

Références

On trouvera les éditions 1694, 1778 et 1790 du tome premier sur le site gallica.bnf.fr

Appendice : jamais mieux servi que par soi-même

Censeur ou encenseur ?

Ci-contre l'obligatoire visa de la Censure Royale figurant en tête de l'édition 1778.

Un esprit malveillant pourrait expliquer son ton élogieux inhabituel par le fait que l'auteur de l'édition révisée, « monsieur de C.G.F. », n'est autre que le censeur Montucla.

APPROBATION.

J'AI lu, par ordre de Monseigneur le Garde des Sceaux, les *Récréations Mathématiques & Physiques* de feu M. OZANAM, corrigées & considérablement augmentées : il m'a paru que cet Ouvrage, fort imparfait dans ses éditions antérieures, a acquis dans celle-ci un degré d'amélioration considérable, qui peut lui mériter place parmi les bons livres sur ces matières. Fait à Paris le 5 août 1775.

MONTUCLA, Censeur Royal.