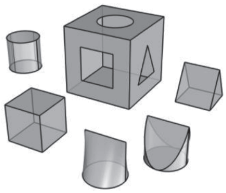
Exercices de ci de là

Solutions

Exercice 521–1 Robert March – Paris

La boite est percée de 3 trous : le côté du carré, le diamètre du cercle et la base et la hauteur du triangle isocèle sont égaux.
On s'intéresse aux pièces qui passent exactement à la fois dans chacun des 3 trous.
Un coin cylindrique et un coin conique(1) font l'affaire.



On se propose de « comparer leurs solidités», autrement dit de calculer leurs volumes respectifs, en suivant les préceptes de Cavalieri (1598-1647) : « si en coupant deux solides par une suite de plans parallèles on obtient des sections dont les aires correspondantes sont toujours dans le même rapport, les volumes compris entre deux de ces plans sont dans le même rapport ».

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Robert March (Paris).

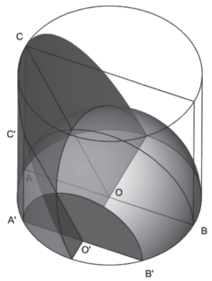
A. Voici la solution de Robert March.

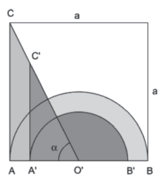
« Si en coupant deux solides par une suite de plans parallèles on obtient des sections dont les aires correspondantes sont toujours dans le même rapport, les volumes compris entre deux de ces plans sont dans le même rapport » (O. Terquem, *Manuel de géométrie*, 1835, p. 271).
Résumant ainsi la « méthode de Cavalieri », Terquem l'applique à la détermination du volume d'un onglet cylindrique (op. cit., § 685, p. 385-386).

Voici son procédé adapté à l'onglet cylindrique qui nous occupe.

Coin cylindrique

On considère un cylindre de révolution ayant pour base un cercle de centre O et de rayon $\frac{a}{2}$ et pour hauteur a. L'onglet cylindrique est obtenu en le coupant par un plan passant par O et faisant avec l'axe du cylindre un angle α (ici, $\tan \alpha = 2$).





(1) Voir au besoin sur http://www.mathcurve.com/surfaces/coinconic/coinconic.shtml

L'idée est de comparer son volume à celui d'une demi-sphère ayant pour équateur le cercle de base du cylindre (cf. figure).

L'onglet admet un plan de symétrie (P). Ce plan coupe la demi-sphère selon un demi-disque de rayon OA = $\frac{a}{2}$ et d'aire $\frac{\pi a^2}{8}$ et l'onglet selon un triangle rectangle ACO d'aire $\frac{a^2}{4}$.

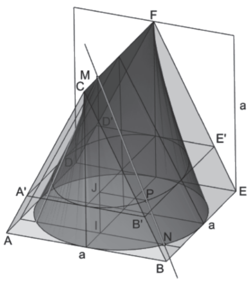
Soit un plan (P′) parallèle à (P) qui coupe la demi-sphère selon un demi-disque de rayon r = O′A′ et d'aire $\frac{\pi r^2}{2}$, et qui coupe l'onglet selon un triangle rectangle (A′C′O′) d'aire $\frac{\pi a^2}{8}$. Le rapport de ces aires est égal à $\frac{\pi}{2}$: il est donc indépendant de la position du plan (P′). Suivant alors Cavalieri nous en concluons que c'est également le rapport des volumes associés.

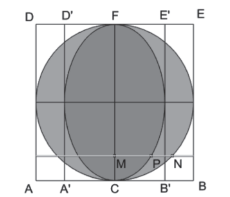
Le volume de l'onglet vaut donc $v = \dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{6}$ et celui du coin cylindrique V = V$_1$ − 2v, où V$_1$ désigne le volume du cylindre. On a donc $V = \frac{\pi a^3}{4} - \frac{2a^3}{6}$ et finalement :

$$V = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\right)a^3.$$

Coin conique

La même méthode permet de calculer le volume du coin conique inscrit dans le prisme droit ABCDEF (voir figure). C'est le conoïde de directrice le cercle gamma de rayon R = $\frac{a}{2}$ inscrit dans le carré ABED, d'axe (CF) et de plan directeur (ABC). Soit MN une génératrice de ce conoïde (parallèle à (ABC), elle coupe CF en M et le cercle gamma en N).





projection orthogonale sur le plan (ABED)

Un plan parallèle à ABED coupe [MI] en J et [MN] en P. Posons $k = \frac{\mathrm{MJ}}{\mathrm{MI}}$ $(0 < k < 1)$.

On a alors $\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MN}} = \frac{\mathrm{MJ}}{\mathrm{MI}} = k$: P est l'image de N dans une affinité orthogonale d'axe CF et de rapport k, qui transforme le carré ABED en un rectangle A′B′E′D′ de longueur a et de largeur ka ; et qui transforme le cercle inscrit dans ce carré en l'ellipse inscrite dans ce rectangle.

Aire de l'ellipse de grand axe a, de petit axe ka : $\mathrm{A}' = \pi \frac{a}{2}\frac{ka}{2}$.

Aire du rectangle : $\mathrm{A}'_1 = (ka)a$.

$\frac{\mathrm{A}'}{\mathrm{A}'_1} = \frac{\pi}{4}$ est indépendant de k.

Suivant à nouveau Cavalieri on en déduit que $\frac{\mathrm{V}'}{\mathrm{V}'_1} = \frac{\mathrm{A}'}{\mathrm{A}'_1} = \frac{\pi}{4}$, où V′ désigne le volume du coin conique et $\mathrm{V}'_1 = \frac{1}{2}a^2 a$ celui du prisme.

Finalement : $\mathrm{V}' = \frac{\pi}{8}a^3$.

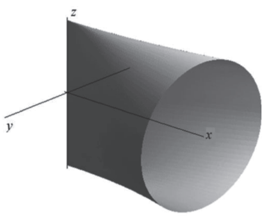
Remarques : $\mathrm{V}' \approx 0{,}39\ a^3$, $\mathrm{V} \approx 0{,}45\ a^3$ et, logiquement, $\mathrm{V}' < \mathrm{V}$.
Au sujet des « indivisibles de Cavalieri », on relira avec délectation l'article de Nicolas Bouleau « Géométrie mentale » (*Bulletin vert*, nº 423, sept/oct 1999).

B. Voici la solution de Pierre Renfer.

On choisit l'unité de longueur de sorte que le côté du carré, le diamètre du cercle, la base et la hauteur du triangle isocèle soient égales à 2.

1) Volume du coin conique

Le site mathcurve référencé par l'énoncé indique que l'équation cartésienne du coin conique d'axe Oz, de plan directeur z = 0, et de directrice le cercle $\begin{cases} x = a \\ y + z^2 = b^2 \end{cases}$ est



$$x^2z^2 = b^2x^2 - a^2y^2.$$

Avec $a = 2$ et $b = 1$, l'équation du coin conique s'écrit :

$$x^2z^2 = x^2 - 4y^2.$$

Pour une valeur de z fixée, soit P(z) le plan horizontal de cote z.
L'intersection du coin conique et du plan P(z) est un triangle isocèle ABC.

Les coordonnées des sommets sont : $\mathrm{A}\left|\begin{matrix}0\\0\\z\end{matrix}\right.$ $\mathrm{B}\left|\begin{matrix}2\\-\sqrt{1-z^2}\\z\end{matrix}\right.$ $\mathrm{C}\left|\begin{matrix}2\\\sqrt{1-z^2}\\z\end{matrix}\right.$.

La hauteur du triangle est égale à 2 et la base BC est égale à $2\sqrt{1-z^2}$.

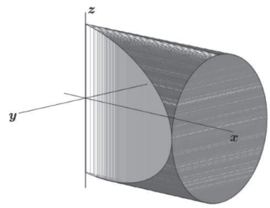
Donc l'aire du triangle est : $S(z) = 2\sqrt{1-z^2}$.

Le volume V du coin conique est : $V = \int_{-t}^{t} S(z)\cdot dz = 2\int_{-t}^{t}\sqrt{1-z^2}\cdot dz = \pi.$

(La fonction $z \mapsto \sqrt{1-z^2}$ a pour graphe un demi-cercle de rayon 1.
Donc l'intégrale est égale à π, l'aire d'un disque de rayon 1)

2) Volume du coin cylindrique

Pour le coin cylindrique, on choisit le repère de sorte que l'arête soit sur l'axe des z comme pour le coin conique.
L'équation du cylindre est : $y^2 + z^2 = 1$.
Les deux plans de taille du coin cylindrique ont pour équations $x + 2y = 0$ et $x - 2y = 0$.
L'intersection du coin cylindrique et du plan P(z) est formée d'un triangle ABC et d'un rectangle BDEC.
Les coordonnées des sommets sont :



$$A\left|\begin{matrix}0\\0\\z\end{matrix}\right. \quad B\left|\begin{matrix}2\sqrt{1-z^2}\\-\sqrt{1-z^2}\\z\end{matrix}\right. \quad C\left|\begin{matrix}2\sqrt{1-z^2}\\\sqrt{1-z^2}\\z\end{matrix}\right. \quad D\left|\begin{matrix}2\\-\sqrt{1-z^2}\\z\end{matrix}\right. \quad E\left|\begin{matrix}2\\\sqrt{1-z^2}\\z\end{matrix}\right..$$

L'aire du triangle est égale à $2\sqrt{1-z^2}$ et celle du rectangle à $4\sqrt{1-z^2}\cdot\left(1-\sqrt{1-z^2}\right)$.

L'aire totale S′(z) est donc : $S'(z) = 4\sqrt{1-z^2} + 2\left(z^2-1\right)$.
Le volume V′ du coin cylindrique est donc :

$$V' = \int_{-t}^{t} S'(z)\cdot dz = 4\int_{-t}^{t}\sqrt{1-z^2}\cdot dz + 2\int_{-t}^{t}\left(z^2-1\right)\cdot dz = 2\pi - \frac{8}{3}.$$

Exercice 521–2 Raphaël Sinteff – Nancy

Tiré du livre *Algèbre et trigonométrie classe de mathématiques élémentaires* conforme au programme du 3 juin 1925.

On donne un demi cercle de diamètre [AB].

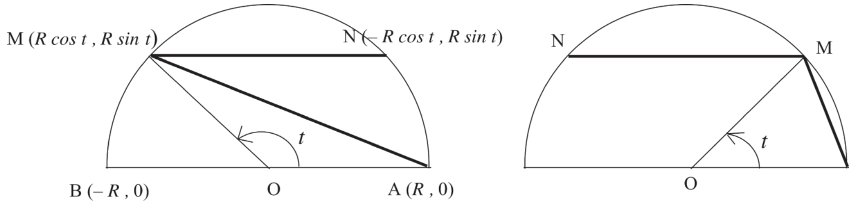
Trouver sur cette courbe un point M tel que si la corde [MN] est parallèle au segment [AB] on ait

$$AM + MN = \ell$$

où ℓ est un réel positif donné.

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), L.G Vidiani (Fontaine les Dijon), Raymond Heitz (Névez).

Voici la solution de L.G Vidiani.
Dans un repère orthonormé, on a les deux cas de figure :



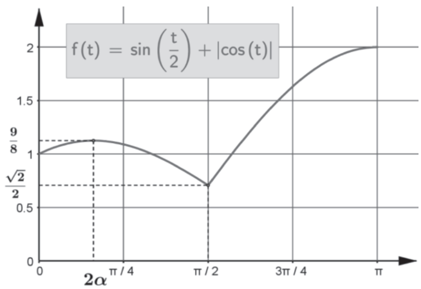
Si $t \geq \frac{\pi}{2}$ AM + MN = $2R\,(\sin\frac{t}{2} - \cos t)$ Si $t \leq \frac{\pi}{2}$ AM + MN = $2R\,(\sin\frac{t}{2} + \cos t)$

En effet, $\mathrm{AM}^2 = \mathrm{R}^2\left((1-\cos t)^2 + (\sin t)^2\right) = \mathrm{R}^2(2-2\cos t) = 4\mathrm{R}^2\left(\sin\frac{t}{2}\right)^2$

et $\mathrm{MN}^2 = 4\mathrm{R}^2(\cos t)^2$.

Posons $f(t) = \sin\frac{t}{2}$, $\lambda = \frac{1}{2\mathrm{R}}$ et $\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{4}\right)$.

Il faut donc résoudre et discuter $f(t) = \lambda$, t étant dans l'intervalle $[0,\pi]$.
La courbe représentative de f est :



L'étude de f est simple :

$f(0) = 1$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, , $f(\pi) = 2$.

Si $t \geq \frac{\pi}{2}$, $f'(t) = \frac{1}{2}\cos\frac{t}{2} + \sin t = \frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\left(1 + 4\sin\frac{t}{2}\right) > 0$ sauf pour $t = \pi$ où $f'(\pi) = 0$.
Donc l'arc droit est croissant.

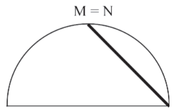
Si $t \leq \frac{\pi}{2}$, $f'(t) = \frac{1}{2}\cos\frac{t}{2} - \sin t = \frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\left(1 - 4\sin\frac{t}{2}\right) > 0$ est du signe de $\frac{1}{4} - \sin\frac{t}{2}$.

Donc, l'arc gauche a un maximum pour $t = 2\arcsin\left(\frac{1}{4}\right) = 2\alpha$:

$$y = f(2\alpha) = \sin(\alpha) + \cos(2\alpha) = \frac{9}{8}.$$

La discussion est purement géométrique puisque M est parfaitement déterminé par t.

- Si $\lambda < \frac{\sqrt{2}}{2}$ ($l > \mathrm{R}\sqrt{2}$) il n'y a pas de solution.



• Si $\lambda = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ($l = \mathrm{R}\sqrt{2}$) il y a une solution $t = \dfrac{\pi}{2}$.

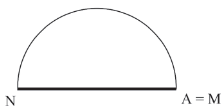
• Si $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < \lambda < 1$ ($\mathrm{R}\sqrt{2} < l < 2\mathrm{R}$) il y a deux solutions :

Pour l'arc gauche : $\sin\dfrac{t}{2} + \cos t = \lambda$ soit, en posant $s = \sin\dfrac{t}{2}$, $2s^2 - s + \lambda = 0$.

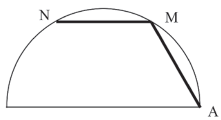
On tire $s = \dfrac{1+\sqrt{9-8\lambda}}{4}$ [car le produit des deux racines $\dfrac{\lambda - 1}{2}$ est négatif] donc $t = 2\arcsin\left(\dfrac{1+\sqrt{9-8\lambda}}{4}\right)$.

De même pour l'arc droit $2s^2 + s - \lambda = 0$ qui donne $t = 2\arcsin\left(\dfrac{-1+\sqrt{8\lambda+9}}{4}\right)$.

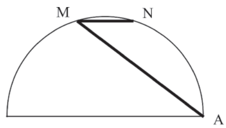
• Si $\lambda = 1$ ($l = 2\mathrm{R}$) il y a trois solutions :
La solution évidente $t = 0$ et les deux solutions précédentes avec $\lambda = 1$ c'est-à-dire $2\arcsin\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ et $2\arcsin\left(\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}\right)$.



$t = 0$



$t = {}^{\pi}/_{3}$



$t = 2\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right)$

• Si $1 < \lambda < \dfrac{9}{8}$ ($2\mathrm{R} < l < \dfrac{9}{4}\mathrm{R}$) il y a trois solutions :

Pour l'arc gauche : $t = 2\arcsin\left(\dfrac{1\pm\sqrt{9-8\lambda}}{4}\right)$

et pour l'arc droit $t = 2\arcsin\left(\dfrac{-1+\sqrt{8\lambda+9}}{4}\right)$.

• Si $\lambda = \dfrac{9}{8}$ ($l = \dfrac{9}{4}\mathrm{R}$) il y a deux solutions obtenues en faisant $\lambda = \dfrac{9}{8}$ dans le cas précédent :

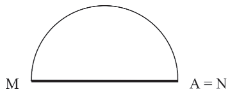
Pour l'arc gauche : $t = 2\arcsin\left(\dfrac{1}{4}\right) = 2\alpha$ [solution double]

et pour l'arc droit $t = 2\arcsin\left(\dfrac{-1+3\sqrt{2}}{4}\right)$.

• Si $\dfrac{9}{8} < \lambda < 2$ ($\dfrac{9}{4}\mathrm{R} < l < 4\mathrm{R}$) il y a une solution :

Pour l'arc droit $t = 2\arcsin\left(\dfrac{-1+\sqrt{8\lambda+9}}{4}\right)$.

- Si $\lambda = 2$ ($l = 4R$) il y a une solution évidente $t = \pi$.
- Si $\lambda > 2$ ($l > 4R$) il n'y a pas de solution.



Remarque : cet exercice qui se pratiquait dans les années 192* est intéressant pour la rigueur nécessaire dans la discussion.

Exercice 521–3 *Pour nos élèves*

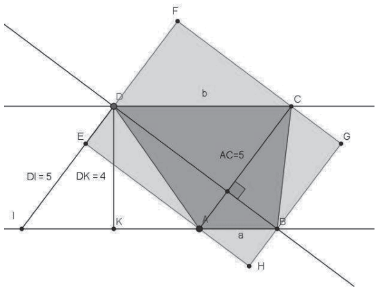
A. Un trapèze de hauteur 4 cm a ses diagonales perpendiculaires. Une diagonale mesure 5 cm.
Déterminer l'aire du trapèze.

B. Montrer que si $0 < a < b$ alors

$$\ln\left(\frac{b^2}{a^2}\right) < \frac{b}{a} - \frac{a}{b}.$$

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Alain Bougeard (les Lilas), Jean Pilloy (Montpellier), Raymond Heitz (Névez), L.G Vidiani (Fontaine les Dijon).

A. Voici la solution de Alain Bougeard.
Le trapèze à diagonales perpendiculaires ABCD fait penser au rectangle EFGH de côtés parallèles aux diagonales [AC] et [BD] et d'aire double de celle du trapèze ABCD.
Nous connaissons déjà sa largeur AC = 5. Pythagore nous donnera facilement sa longueur [DB], dans le triangle DBK, lorsque nous connaîtrons [KB].



Or dans le triangle rectangle DKI nous reconnaissons le célèbre triangle 3, 4, 5 donc IK = 3.
Alors dans l'autre triangle rectangle IDB nous pouvons appliquer la relation de la hauteur : $DK^2 = KI \times KB$,
d'où nous tirons KB = 16/3.
Donc finalement dans le triangle DBK :
$DB^2 = 4^2 + (16/3)^2 = (20/3)^2$.
Nous obtenons donc l'aire du trapèze ABCD = 1/2 × 5 × 20/3 × 50/3.

B. Voici la solution de Jean Pilloy.
Soit a un réel strictement positif quelconque. Étudions les variations de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{a} - \frac{a}{x} - \ln\left(\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Cette fonction est dérivable sur]0, +∞[et on obtient pour tout $x > 0$

$$f'(x) = \frac{(x-a)^2}{ax^2}.$$

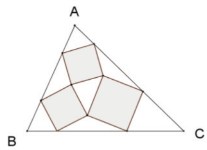
On en tire f que est strictement croissante sur]0, +∞[.
Or $f(a) = 0$ donc si $x > a$, $f(x) > 0$.
On a finalement démontré que pour tout $a > 0$ et pour tout $x > a$ on a

$$\frac{x}{a} - \frac{a}{x} > \ln\left(\frac{x^2}{a^2}\right).$$

En remplaçant x par b, on obtient l'inégalité à prouver.

Exercice 521–4 Oscar Rémal Fatti – Perpignan-gare *Ça ne tourne pas rond !*

Un triangle ABC est tel que l'on a réussi à construire 3 carrés à l'intérieur, de la façon dont l'indique la figure ci-contre.



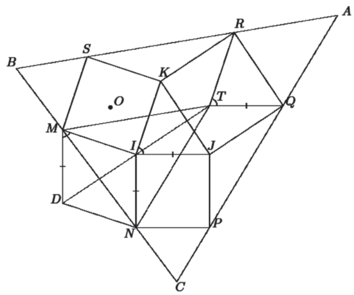
Les côtés de chaque carré ont une position bien définie par rapport à une des droites particulières du triangle. Laquelle et pourquoi ? En déduire une construction des carrés.

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Éric Trotoux (Caen).

• Voici la solution de Marie-Nicole Gras.

I) Une propriété des médianes.

On considère un triangle IJK ; on construit à l'extérieur de ce triangle les carrés IJPN, JKRQ et KIMS.
Les droites PQ et RS se coupent en A ; les droites RS et MN se coupent en B ; les droites MN et PQ se coupent en C.
Nous allons montrer que :



Proposition. Chaque médiane du triangle ABC est perpendiculaire aux deux côtés parallèles du carré inscrit dans l'angle correspondant.

Démonstration. Soit T le quatrième sommet formant le parallélogramme RSMT.
(i) Les triangles IJK et TQR sont isométriques et ont leurs côtés parallèles deux à deux. En effet [RT], [SM] puis [KI] sont de même longueur et parallèles, ainsi que [RQ] et [KJ].
(ii) Il en résulte que [IJ], [TQ] et [NP] sont de même longueur et parallèles, donc le quadrilatère TQPN est un parallélogramme et [TN] et [QP] sont de même longueur et parallèles.
(iii) On a donc montré que le triangle TMN a ses côtés parallèles à ceux du triangle ABC : [MN] // [BC], [NT] // [CA], [TM] // [AB].

Pour démontrer la proposition, il suffit de montrer que les médianes de TMN sont perpendiculaires aux côtés des carrés correspondants.

(iv) Le quadrilatère TQJI est un parallélogramme. Puisque l'angle $\widehat{KIQ}$ est droit, alors [TI] qui est parallèle à [QJ] est perpendiculaire à [JK].

(v) Soient O le centre du carré IKSM et D le quatrième sommet formant le parallélogramme MIND.

La rotation de centre O et d'angle $\pi/2$ transforme M en I et I en K ; les angles $\widehat{DMI}$ et $\widehat{KIJ}$ sont égaux (comme supplémentaires de $\widehat{MIN}$), et on a MD = IN = IJ.
Cette rotation transforme donc le triangle MDI en le triangle IJK, donc ID = KJ et [ID] ⊥ [KJ].
(vi) On vient de montrer que [ID] ⊥ [KJ] et on a montré au (iv) que [IT] ⊥ [KJ] ; il en résulte que D, I et T sont alignés ; et puisque ID = KJ = IT, alors I est le milieu de [DT].

On a donc les égalités vectorielles $\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN}+\overrightarrow{IT}=\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IT}=\vec{0}$; et par conséquent I est le centre de gravité du triangle TMN. Les médianes de TMN sont donc portées par (TI), (MI) et (NI), d'où le résultat.

II) Construction des trois carrés, dits carrés de Malfatti.

On se donne un triangle ABC, et on cherche à inscrire dans ce triangle les trois carrés IJPN, JKRQ et KIMS, avec la disposition du I). On désigne par M_A, M_B et M_C les droites qui portent les médianes de ABC.
(i) On trace trois droites : D_A perpendiculaire à M_A, D_B perpendiculaire à M_B et D_C perpendiculaire à M_C, de manière à ce qu'elles forment un triangle. On note : I′ = DB ∩ DC ; J′ = DC ∩ DA ; K′ = DA ∩ DB.
D'après le I), le triangle IJK cherché a ses côtés parallèles à ceux de I′J′K′.
(ii) On trace extérieurement au triangle I′J′K′ les trois carrés I′J′P′N′, J′K′R′Q′ et K′I′M′S′ ; puis on construit comme au I) le triangle A′B′C′.
(iii) Les triangles ABC et A′B′C′ ont leurs côtés parallèles deux à deux ; ils sont homothétiques et le centre d'homothétie est le point L, intersection de AA′, BB′ et CC′.
Par cette homothétie, le triangle A′B′C′ et ses trois carrés se « transportent » dans le triangle ABC.