Les problèmes de l'APMEP

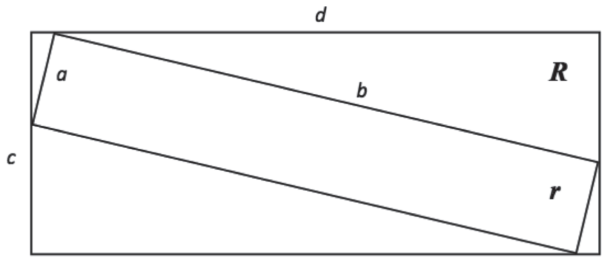
Les propositions de problèmes, solutions ou commentaires, sont à envoyer à

Max HOCHART
13, rue des Garennes
63 800 Cournon d'Auvergne
ou
hochartmax@yahoo.fr

Énoncés des nouveaux problèmes

Problème 521 - 3 (Michel Lafond, Dijon)

On dit qu'un quadruplet d'entiers Q = (a, b, c, d) est imbriqué si $a < b$ et si le rectangle r dont les côtés mesurent a et b et R dont les côtés mesurent c et d sont tels que chaque côté de R contient un sommet et un seul de r.



1. Démontrer que si Q = (a, b, c, d) est imbriqué, alors $c \neq d$.
2. Démontrer que si Q = (a, b, c, d) est imbriqué, il existe quatre entiers k, l, m, n tels que

$$a = k\left(m^2 + n^2\right),$$
$$b = l\left(m^2 + n^2\right),$$
$$c = 2kmn + l\left(m^2 - n^2\right),$$
$$d = 2lmn + k\left(m^2 - n^2\right).$$

3. Démontrer que Q = (a, b, c, d) est imbriqué si et seulement si

$$\left(b^2 - a^2\right)^2 = \left(bc - ad\right)^2 + \left(bd - ac\right)^2$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ et $a < b$.

Problème 522 - 2

On pose $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{u_n}$. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: convergence de la suite, puis, en notant ℓ l'éventuelle limite, équivalent quand n tend vers $+\infty$ de $u_n - \ell$.

Problème 522 - 3

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que f est une somme finie de projecteurs si et seulement si sa trace est un entier supérieur ou égal à son rang. Cela reste-t-il vrai sur un corps quelconque ?

Solutions des problèmes antérieurs

Problème 510-2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne n réels $x_1, \ldots, x_n$, tous distincts. Montrer que pour tout réel $q \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \prod_{j\neq k} \left(\frac{q x_k - q^{-1} x_j}{x_k - x_j} \right) = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}.$$

Solutions de Michel Bataille (Rouen), Michel Lafond (Dijon), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans) et Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques).

Voici une première solution, utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange. On va établir le résultat si tous les x_k sont non nuls, ce qui suffira. En effet, puisque tous les x_k sont différents, il en existe au plus un qui est nul (disons x_1). Or la formule à démontrer est une expression continue en x_1. Si on la montre pour $x_1 \neq 0$, on aura la formule en faisant tendre x_1 vers 0. On peut donc supposer tous les x_k non nuls (et tous différents).

On commence par réécrire l'égalité à démontrer, en la rendant polynomiale en q. Puisque q est supposé non nul, on peut multiplier par q^{n-1} que l'on écrit $\frac{q^n}{q}$ dans le membre de droite. Il s'agit donc de montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \prod_{j\neq k} \left(\frac{q^2 x_k - x_j}{x_k - x_j} \right) = \frac{q^{2n} - 1}{q^2 - 1}. \qquad (1)$$

On pose $Z = q^2$, c'est un réel différent de 0 et 1. On veut donc montrer que pour $Z \neq 0, 1$,

$$\sum_{k=1}^{n}\prod_{j\neq k}\left(\frac{Zx_k - x_j}{x_k - x_j}\right) = \frac{Z^n - 1}{Z - 1}. \qquad (2)$$

Pour $1 \leq k \leq n$, on introduit les polynômes interpolateurs de Lagrange aux n points $x_1, \ldots, x_n$:

$$L_k(X) = \prod_{j\neq k}\left(\frac{X - x_j}{x_k - x_j}\right).$$

On veut montrer que pour $Z \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$,

$$\sum_{k=1}^{n} L_k(Zx_k) = \frac{Z^n - 1}{Z - 1}. \qquad (3)$$

On rappelle quelques résultats classiques concernant les polynômes interpolateurs de Lagrange. On note

$$M(X) = \prod_{r=1}^{n}(X - x_r),$$

et pour $k \in [1, n]$,

$$M_k(X) = \prod_{j\neq k}(X - x_j).$$

Ainsi, pour tout $k \in [1, n]$,

$$M(X) = M_k(X)(X - x_k).$$

En dérivant et en testant en x_k,

$$M'(x_k) = M_k(x_k).$$

Les polynômes interpolateurs de Lagrange sont donnés pour $k \in [1, n]$, par

$$L_k(X) = \prod_{j\neq k}\frac{X - x_j}{x_k - x_j} = \frac{M_k(X)}{M_k(x_k)} = \frac{M(X)}{(X - x_k)M'(x_k)}.$$

Donc pour $Z \neq 1$,

$$L_k(Zx_k) = \frac{M(Zx_k)}{x_k(Z-1)M'(x_k)}.$$

Finalement, ce que l'on veut prouver, c'est que pour $Z \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{M(Zx_k)}{x_k M'(x_k)} = Z^n - 1. \qquad (4)$$

On fixe $Z \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$. On introduit le polynôme $P(X) = M(ZX) - M(X)$. On effectue la décomposition en éléments simples de la fraction $F(X) = \dfrac{P(X)}{M(X)}$. Le polynôme P(X) est de degré au plus n, son coefficient devant X^n est $Z^n - 1$. Ainsi, la partie entière de la fraction F(X) vaut $(Z^n - 1)$. Les pôles de la fraction F(X) sont simples, donc on a une décomposition de la forme

$$F(X) = (Z^n - 1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{X - x_k}.$$

Pour $k \in [1, n]$,

$$\lambda_k = \lim_{X \to x_k} \left|\left(F(X) - (Z^n - 1)(X - x_k)\right)\right| = \frac{P'(x_k)}{M'(x_k)} = \frac{M(Zx_k)}{M'(x_k)}.$$

Ainsi, pour tout $Z \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$,

$$\frac{M(ZX) - M(X)}{M(X)} = Z^n - 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{M(Zx_k)}{M'(x_k)(X - x_k)}$$

C'est ici qu'intervient l'hypothèse supplémentaire des x_k non nuls. On fait tendre X vers 0. Alors M(ZX) – M(X) tend vers 0 mais pas M(X). On obtient donc

$$0 = Z^n - 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{M(Zx_k)}{M'(x_k)x_k},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Voici une autre approche. Classiquement, les résultats obtenus par interpolation de Lagrange sont aussi obtenus par l'utilisation des déterminants de Vandermonde. C'est ce que proposent **Marie-Nicole Gras** et **Pierre Renfer**. On va directement démontrer la formule (1) que l'on rappelle ci-dessous :

$$\sum_{k=1}^{n} \prod_{j \neq k} \left(\frac{q^2 x_k - x_j}{x_k - x_j}\right) = \frac{q^{2n} - 1}{q^2 - 1} \quad \left(q \in \mathbb{R} - \{0, 1, -1\}\right).$$

Là encore, on introduit les polynômes interpolateurs de Lagrange, mais cette fois-ci, on les développe :

$$L_k(X) = \prod_{j \neq k} \frac{X - x_j}{x_k - x_j} = \sum_{i=0}^{n-1} a_{k,i} X^i,$$

les $a_{k,i}$ étant fonctions des x_j. On considère alors les deux matrices

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,0} & \cdots & a_{1,i} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k,0} & \cdots & a_{k,i} & \cdots & a_{k,n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,0} & \cdots & a_{n,i} & \cdots & a_{n,n-1} \end{pmatrix} \text{ et } M=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_1^i & \cdots & x_j^i & \cdots & x_n^i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_j^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

La matrice M est une matrice de Vandermonde. Elle est inversible puisque tous les x_i sont distincts. Par ailleurs, les coefficients de la matrice AM sont donnés par

$$(\mathrm{AM})_{k,j}=\sum_{i=0}^{n-1}a_{k,i}x_j^i=\mathrm{P}_k(x_i)=\delta_{k,i},$$

où $\delta_{k,i}$ est le symbole de Kronecker, valant 1 si $k = i$ et 0 sinon. Autrement dit, on a la relation matricielle

$$\mathrm{AM}=\mathrm{I}_n.$$

Ceci redonne l'inversibilité de M puisque $A = M^{-1}$.
Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\prod_{j\neq k}\left(\frac{q^2x_k-x_j}{x_k-x_j}\right)&=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{L}_k\left(q^2x_k\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{n-1}a_{k,i}\left(q^2x_k\right)^i\\&=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{k,i}x_k^i\right)q^{2i}.\end{aligned}$$

Or on reconnaît dans la somme intérieure les coefficients diagonaux du produit matriciel MA :

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_{k,i}x_k^i\right)=(\mathrm{MA})_{1,i}=1,$$

puisque MA vaut I_n. Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n}\prod_{j\neq k}\left(\frac{q^2x_k-x_j}{x_k-x_j}\right)=\sum_{i=0}^{n-1}q^{2i}=\frac{q^{2n}-1}{q^2-1}.$$

ce qui termine la démonstration.

Problème 511-1

Trouver tous les polynômes scindés sur $\mathbb{R}$ et à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$.

Solutions de Pierre Cornilleau (Orléans), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques).

Soit P un polynôme scindé sur le corps des réels et dont tous les coefficients valent −1, 0 ou 1. Quitte à factoriser par X^k (où k est la valuation de P), on peut supposer que le coefficient constant de P n'est pas nul. En notant d le degré de P, on a donc

$$P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \quad \text{avec } a_0 \times a_d \neq 0.$$

On peut alors observer que le polynôme miroir de P, à savoir

$$P_\sigma = \sum_{k=0}^{d} a_{d-k} X^k$$

possède les mêmes propriétés que P. En effet, $a_0 a_d \neq 0$, P est de degré d, ses coefficients valent −1, 0 ou 1 et il est scindé sur $\mathbb{R}$ puisque ses racines sont les inverses de celles de P. On note x_i les racines de P (répétées avec multiplicités). On note

$$S_1 = \sum_{i=1}^{d} x_i$$

et

$$S_2 = \sum_{1 \le i \le j \le d} x_i x_j.$$

D'après les relations coefficients-racines, les sommes S_1 et S_2 valent −1, 0 ou 1. Donc

$$0 \le \sum_{i=1}^{d} x_i^2 = S_1^2 - 2S_2 \le 3.$$

En appliquant ce qui précède à P_σ, on a de même que la somme S_2' des inverses des carrés des x_i est inférieure à 3 :

$$\sum_{i=1}^{d} \left(\frac{1}{x_i}\right)^2 \le 3.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$d^2 = \left(\sum_{i=1}^{d} x_i \times \frac{1}{x_i}\right) \le \left(\sum_{i=1}^{d} x_i^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^{d} x_i \times \frac{1}{x_i}^2\right) \le 3 \times 3.$$

Donc d vaut 0, 1, 2 ou 3.
Si $d = 0$ ou 1, les polynômes ±1 et ± X ± 1 sont solutions.
Si $d = 2$, on écrit, au signe près, $P = X^2 + aX + b$. Puisque le discriminant $a^2 - 4b$ doit être positif, les solutions sont $X^2 + aX - 1$ avec $a = 0$, 1 ou −1 (en effet, b n'est pas nul par hypothèse de travail).
Enfin si $d = 3$, le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que tous les x_i ont mêmes carrés. Ainsi, toutes les racines de P sont égales ou opposées. Il

existe donc x réel et n et m deux entiers dont la somme vaut 3 tels que (au signe près)

$$P = (X - x)^n (X + x)^m .$$

On en tire $x^3 = 1$ ou -1 donc $x = 1$ ou -1. Ceci exclut $m = 3$ ou $n = 3$ donc $(m, n) = (1, 2)$ ou $(2, 1)$ puis

$$P = X^3 - X^2 - X + 1 = (X^2 - 1)(X - 1)$$

ou

$$P = X^3 + X^2 - X - 1 = (X^2 - 1)(X + 1)$$

Finalement les solutions sont, au signe près, les polynômes

$$P = X^3 + X^2 - X - 1 = (X^2 - 1)(X + 1)$$

où n est un entier quelconque.

Problème 511-3

Une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ transformant tout segment en segment est-elle automatiquement continue ?

Solutions de Hélène Brion (Clamart), Pierre Cornilleau (Orléans), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Georges Vidiani (Fontaine Les Dijon)

La réponse est bien sûr non. La fonction f qui à x non nul associe sin(1/x) et qui à 0 associe 0 n'est pas continue en 0 mais envoie tout segment sur un segment. En effet, si S est un segment ne contenant pas 0 alors f y est continue donc f(S) est un segment. De plus, si S est un segment non trivial contenant 0 alors f(S) est toujours égal au segment d'extrémités -1 et 1.