Exercices de ci de là

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire.

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer par mél à :

bruno.alaplantive@free.fr

ou par courrier à :

Bruno Alaplantive
Bordeneuve
chemin de Tardibail
09100 Saint Jean du Falga

Pour l'envoi des propositions et des solutions, privilégiez, si possible, le courrier électronique. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial une copie au format PDF pour contrôler en particulier les formules qui sont souvent perturbées d'un logiciel à l'autre. Vous faciliterez ainsi notre tâche. Merci d'avance.

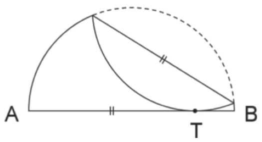
Exercices

Exercice 522–1 *À sommer par nos élèves*

A) x, y et z sont trois réels tels que $x=\sqrt{11-2yz}$, $y=\sqrt{12-2xz}$, $z=\sqrt{13-2xy}$.
Combien vaut $x + y + z$?
B) Le produit d'un ensemble de nombres entiers positifs est 23166. Le plus grand des nombres est le double du plus petit nombre. Quelle est la somme des nombres ?

Exercice 522–2 Paul-Alain Bonvert – Alpha du Ginseng *Fière longueur ?*

Un demi disque de papier de rayon r est plié le long d'une corde de manière que l'arc soit tangent en T au diamètre [AB]. De plus la longueur du pli est égale à AT.



Exprimer cette longueur en fonction de r.

Exercice 522–3 Michel Lafond – Dijon *De Pise.*

Peut-il y avoir quatre termes distincts en progression arithmétique parmi les termes de la suite de Fibonacci $F_0 = F_1 = 1$ et, si $n \geq 2$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$?

Exercice 522–4 *Pick up on a blackboard in South Africa*

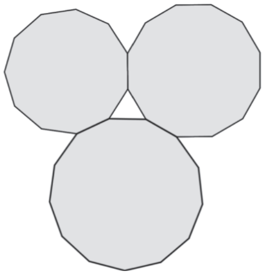
Les nombres $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}$ sont écrits sur un tableau noir.

Deux des nombres, disons a et b, sont choisis et remplacés par $ab + a + b$.
Il y a maintenant 9 nombres sur le tableau noir.
Le processus est répété jusqu'à ce qu'un seul nombre soit laissé sur le tableau.
Prouver que le nombre final est toujours le même, quel que soit l'ordre de choix des nombres de la liste.

Solutions

Exercice 520–1 *pour nos élèves*

Propositions transmises par Paul-Alain Bonvert – Alfa du Ginseng



A – *Vrai ou faux ?*

Dans la figure ci-contre, les polygones sont réguliers

B – *Aire d'un quadrilatère croisé et GeoGebra*.

Dans chacun des trois exemples suivants le logiciel GeoGebra fournit la valeur de l'aire de ABCD (l'unité d'aire est le carreau).

figure 1

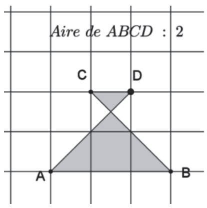


figure 2

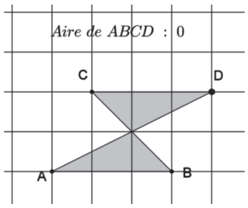
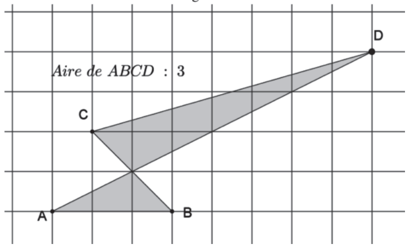
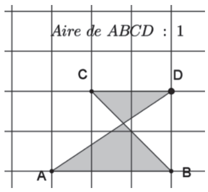


figure 3



a) Quelle définition probable de l'aire d'un quadrilatère croisé est adoptée par GeoGebra ?



b) La vérifier pour la figure ci-contre.

c) Les sommets A, B et C étant fixés comme sur ces figures, quel est le lieu du quatrième sommet D tel que ABCD est un quadrilatère croisé d'aire égale à 1 ?

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Michel Sarrouy (Mende), Pierre Lapôtre (Calais).

Voici les solutions de Pierre Renfer.

A – Les trois polygones P_1, P_2, P_3 ont respectivement 11, 12, 13 côtés.
Le triangle central T est équilatéral.
L'angle de T face à P_1 est partagé par la droite portant le côté commun de P_2 et P_3 en deux angles de mesures $\frac{2\pi}{12}$ et $\frac{2\pi}{13}$. Cet angle a donc pour mesure : $\frac{2\pi}{12} + \frac{2\pi}{13} \neq \frac{\pi}{3}$.
Ceci contredit le fait que T est équilatéral. La figure est donc fausse.

B – a) L'aire est apparemment égale à la valeur absolue de la différence des deux ailes du papillon.

Soit $\vec{i}$ le vecteur horizontal vers la droite et $\vec{j}$ le vecteur vertical vers le haut.

On choisit la base orthonormée $(\vec{i},\vec{j})$.

Pour un quadrilatère ABCD convexe, l'aire S s'obtient par la formule :

$$2\mathrm{S} = \left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right) + \det\left(\overrightarrow{\mathrm{CD}},\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right)\right|.$$

Il apparaît que cette même formule soit appliquée pour l'aire des quadrilatères croisés.

b)
$$\begin{aligned}2\mathrm{S} &= \left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right) + \det\left(\overrightarrow{\mathrm{CD}},\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right)\right| \\ &= \left|\det\left(3\cdot\vec{i},3\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}\right) + \det\left(2\cdot\vec{i},2\cdot\vec{i}-2\cdot\vec{j}\right)\right| = |6-4| = 2.\end{aligned}$$

c) Soit : $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}$ dans le repère $\left(\mathrm{A},\vec{i},\vec{j}\right)$.

$$2\mathrm{S} = \left|\det\left(3\cdot\vec{i},x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}\right) + \det\left((x-1)\cdot\vec{i}+(y-2)\cdot\vec{j},2\cdot\vec{i}-2\cdot\vec{j}\right)\right| = |y-2x+6| = 2.$$

$$y - 2x + 6 = \pm 2$$

Le point D décrit la réunion des deux droites parallèles d'équations $y - 2x + 4 = 0$ et $y - 2x + 8 = 0$, chacune privée du segment pour lequel le quadrilatère n'est pas croisé (soit donc quatre demi-droites).

Nota. Les propositions de Michel Sarrouy et Pierre Lapôtre accompagnées de nombreuses figures, sont disponibles sur le site de l'association.

Exercice 520–2 *pioché de-ci, de-là : Renversant !*

Le renversé de 34 est 43, celui de 127 est 721.
Trouver tous les entiers naturels non palindrome et ne se terminant pas par 0 tels que le carré du renversé est égal au renversé du carré.

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Raymond Heitz (Névez), L.G Vidiani (Fontaine les Dijon).
Voici la solution de L.G Vidiani.

L'expression du carré du retourné ne pose aucun problème : si $\mathrm{N} = a_n 10^n + \cdots + a_0$ alors le carré du retourné est égal à $\left(a_0 10^n + \cdots + a_n\right)^2$.

En revanche, il en va tout autrement pour le retourné du carré pour lequel les retenues éventuelles décalent les chiffres vers la gauche et changent et oblitèrent donc les chiffres du retournement.

Or $\mathrm{N}^2 = \sum_{i=0}^{n} a_i^2 10^{2i} + 2\sum_{i<j\le n} a_i a_j 10^{i+j}$.

Le terme a_i^2 présente des retenues supérieures ou égale à 1 pour $4 \le a_i \le 9$.

Ainsi, pour que les chiffres ne soient pas perturbés (ce qui changerait le retourné), il faut $a_i \leq 3$.
Mais il faut aussi tenir compte du $2a_ia_j$.

$$a_i \in \{0,1,2,3\},\ 2a_i \in \{0,2,4,6\},\ a_j \in \{0,1,2,3\}.$$

• Si $a_i = 3$ et $a_j = 3$ il y a retenue car le produit $2a_ia_j = 18$.
Donc le 3 n'apparait au maximum qu'une fois par exemple dans a_i.
Ainsi $a_j \in \{0,1,2\}$.
• Si $a_i = 3$ alors $a_j = 0$ ou 1 (sinon $2a_ia_j = 12$ donnerait une retenue) ;
• Sinon $a_i \in \{0,1,2\}$ et $a_j \in \{0,1,2\}$.
Et dans ses deux derniers et seuls cas, le calcul de N^2 ne donnant aucune retenue, son retourné est égal au carré du retourné.

Conclusion : Les nombres répondant au problème sont ceux n'ayant comme chiffres que 0, 1 ou 2 ou ceux ayant comme chiffres une seule fois 3 et les autres 0 et 1 ; nombres desquels on retire les palindromes et ceux tels que $a_0 = 0$.

Remarque. L.G Vidiani vous invite particulièrement à visiter la page http://villemin.gerard.free.fr/aNombre/MOTIF/Chiffres/PuisPerm.htm du site de Gérard Villemin.

Je vous fais également part du résultat suivant, issu du livre *70 énigmes corrigées pour lycéens et plus* de Jacques Lévy ISBN 978-1-291-36648-6 :
« on peut trouver une infinité de nombres qui répondent aux conditions en partant des deux identités suivantes :

$$4\times10^{2x}+4\times10^{x}+1=\left(2\times10^{x}+1\right)^{2} \text{ et } 1\times10^{2x}+4\times10^{x}+4=\left(1\times10^{x}+2\right)^{2},$$

où x prend toute valeur arbitraire. »

Exercice 520–3 Michel Lafond (Dijon) *Le cube.*

Un cube est posé sur un plan horizontal en contact avec un de ses sommets.
Les distances des 8 sommets au plan sont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 cm.
Quel est le côté du cube ?

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Bernard Collignon (Coursan), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Raymond Heitz (Névez), Renaud Dehaye (Nancy), Maurice Bauval (Versailles), Robert March (Paris).

Voici la solution de Renaud Dehaye.

Dans l'espace muni du repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on cherche un trièdre orthogonal $\left(\mathrm{O},\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}},\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$ tel que $z_{\mathrm{A}} = 1$, $z_{\mathrm{B}} = 2$, $z_{\mathrm{C}} = 4$. On choisira $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ d'abscisse positive dans le plan $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{k}\right)$.

Posons OA = a. Puisque sur un côté z augmente de 1 alors $a > 1$. On obtient les coordonnées $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\left(\sqrt{a^2-1},0,1\right)$. Posons ensuite $\overrightarrow{\mathrm{OB}}(\alpha,\beta,2)$. Ce vecteur est soumis à deux contraintes :

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0$, ce qui donne $\alpha=\dfrac{-2}{\sqrt{a^2-1}}$;

OB = a, ce qui donne $\beta=\dfrac{\sqrt{a^4-5a^2}}{\sqrt{a^2-1}}$.

Ainsi $\overrightarrow{OB}\left(\dfrac{-2}{\sqrt{a^2-1}},\dfrac{\sqrt{a^4-5a^2}}{\sqrt{a^2-1}},2\right)$.

Posons enfin $\overrightarrow{OC}(\gamma,\delta,4)$. On a à la fois $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}=0$ et $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}=0$, ce qui conduit à trouver γ puis δ en fonction de a.

On obtient alors $\overrightarrow{OC}\left(\dfrac{-4}{\sqrt{a^2-1}},\dfrac{-8a^2}{\sqrt{(a^2-1)(a^4-5a^2)}},4\right)$.

Reste une condition à réaliser : OC = a ou encore OC^2 = a^2.

Soit $\dfrac{16}{a^2-1}+\dfrac{64a^4}{(a^2-1)(a^4-5a^2)}+16=a^2$ ce qui entraîne $a^4-21a^2=0$, soit $a=\sqrt{21}$.

Ainsi $\overrightarrow{OA}(2\sqrt{5},0,1)$, $\overrightarrow{OB}\left(\dfrac{-\sqrt{5}}{5},\dfrac{2\sqrt{105}}{5},2\right)$ et $\overrightarrow{OC}\left(\dfrac{-2\sqrt{5}}{5},\dfrac{-\sqrt{105}}{5},4\right)$ répondent au problème posé.

On complète alors la figure pour obtenir un cube : le point D tel que OADB soit un carré et on a bien $x_D=3$, les points E, F et G tels que CEFG soit l'image de OBDA par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$.

Exercice 520–4 *pioché de-ci, de-là : La preuve par 9.*

u_0 et u_1 sont deux réels quelconques.
On considère la suite (u_n), $n\in\mathbb{N}$ définie par la relation $u_{n+2}=|u_{n+1}|-u_n$.

Montrer que (u_n) est périodique de période 9.

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Pierre Lapôtre (Calais), Raymond Heitz (Névez), L.G Vidiani (Fontaine les Dijon).

Voici la « solution » de tous : Exhaustion des cas !!!

Remarque. En conclusion de sa solution, Raymond Heitz écrit : « mais ce qu'il nous faudrait, c'est un raisonnement global permettant d'obtenir une démonstration générale pour tous les cas simultanément ». Je ne pense pas m'avancer beaucoup en affirmant que tous les solveurs s'y sont essayés peu ou prou.

L'inaccessible étoile que chantait Jacques Brel dans L'Homme de la Mancha ?

Nota. Naturellement, cette solution n'en est pas vraiment une … Je convie le lecteur affamé à se restaurer des solutions de Pierre Lapôtre et Pierre Renfer, disponibles sur le site de l'association.