

Les problèmes de l'APMEP

Les propositions de problèmes, solutions ou commentaires, sont à envoyer à

Max HOCHART
13, rue des Garennes
63 800 Cournon d'Auvergne

ou

hochartmax@yahoo.fr

Énoncés des nouveaux problèmes

Problème 521 - 1

On pose $p_2 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $p_{n+1} = p_n \left(1 - \frac{p_n}{n}\right)$. Étudier la suite $(p_n)_{n \geq 2}$: convergence ou divergence, équivalent, développement asymptotique, interprétation probabiliste, etc.

Problème 521 - 2

Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ peut-on définir une suite en posant $u_0 = a$ et $u_{n+1} = u_n^{3/2} - 1$?

Problème 521 - 3 (Michel Lafond, Dijon)

On note $[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6]$ le dé qui porte sur ses faces les entiers $(a_i)_{1 \leq i \leq 6}$ avec $1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6$.

On note $S_n(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ le nombre de sommes distinctes que l'on peut obtenir en lançant n fois le dé $[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6]$.

1. Montrer que, pour tout dé, $S_n(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) \leq \binom{n+5}{5}$.
2. Pour tout entier $n \geq 1$, démontrer que ce maximum est atteint.
3. Pour $n \in \{2, 3, 4, 5\}$, trouver des dés $[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6]$ avec a_6 minimal tels que $S_n(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) \leq \binom{n+5}{5}$.

Voici un exemple : pour $n = 2$, le maximum $\binom{7}{5} = 21$ est atteint avec le dé $[1, 2, 5, 11, 13, 18]$ qui, lancé deux fois, peut donner les 21 sommes

2, 3, 4, 6, 7, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 29, 31, 36
et $a_6 = 18$ est le minimum possible.

Erratum 1 – Dans le bulletin 520, les problèmes étaient évidemment mal numérotés. Ils devaient porter les numéros 520-1, 520-2 et 520-3. *Mea culpa*.

Erratum 3 – Toujours dans le bulletin 520, une erreur de signe s'est glissée lors de la mise en page. *Non mea culpa*. Voici l'énoncé correct :

Problème 520 - 1 (Vincelot Ravoson, Lycée Henri IV, Paris)

Soit a, b, c des réels positifs tels que $ab + bc + ac = 1$. Montrer que

$$abc \geq \frac{1}{12} (a+b-|a-b| + 2c - |a+b-|a-b|-2c|).$$

Solutions des problèmes antérieurs

Problème 508-2 (Isao Sauzzede, ENS Lyon)

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ l'ensemble des applications réelles continues sur $[0, 1]$. On définit une application $\tau : E \rightarrow E$ de la façon suivante : pour $f \in E$,

$$\tau(f) = \left| f - \int_0^1 f(t) dt \right|.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note τ^n la fonction $\tau \circ \tau \circ \dots \circ \tau$ itérée n fois. Pour $f \in E$, étudier la convergence (simple, uniforme) de la suite de fonctions $(\tau^n(f))_{n \in \mathbb{N}}$.

Solution de Fernand Canonico (Clermont-Ferrand) et Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques).

Je remercie chaleureusement **Pierre Renfer** qui, à plusieurs reprises, a détaillé sa rédaction à ma demande. Et tout aussi chaleureusement, je remercie mon collègue **Fernand Canonico** pour ses nombreuses explications, toujours enrichissantes. C'est lui qui a attiré mon attention sur les énoncés 521-1 et 521-2. Et c'est à lui que l'on doit la belle solution exposée ci-après.

Les deux réponses proposées établissent, par des méthodes très différentes, le résultat suivant :

Théorème – Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $f_0 = f$ et $f_{n+1} = \tau(f_n)$ converge uniformément vers 0.

On commence par un lemme.

Lemme 1 – La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément équicontinue.

Preuve du lemme 1

Soit $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $v = \tau(u)$ et $\mu = \int_0^1 u(t) dt$. D'après le théorème de Heine, la fonction u est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$. Soit δ un module de continuité uniforme pour u associé à ε . C'est aussi un module de continuité pour v associé à ε . En effet, si $|x - y| \leq \delta$, alors

$$|v(x) - v(y)| = \left| \int_0^1 u(t) dt - \int_0^1 u(t) dt \right| \leq \int_0^1 |u(x) - u(y)| dt \leq \varepsilon.$$

Il s'ensuit par récurrence sur n qu'un module de continuité uniforme pour $f_0 = f$ associé à ε est un module de continuité uniforme pour chaque f_n .

Voici un second lemme.

Lemme 2 – Si (g_n) est une suite uniformément équicontinue de fonctions positives sur $[0, 1]$, la convergence vers 0 de la suite $\left(\int_0^1 g_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ équivaut à la convergence uniforme sur $[0, 1]$ de la suite de fonctions (g_n) vers 0.

Preuve du lemme 2

Soit $\delta \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$. Pour tout $x \in [0, 1]$, on note $J_\delta(x)$ un segment de longueur δ inclus dans $[0, 1]$ et contenant x . Par exemple, pour $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, on choisit $J_\delta(x) = [x, x + \delta]$ et pour $\frac{1}{2} < x \leq 1$, $J_\delta(x) = [x - \delta, x]$. Comme $\int_0^1 g_n \rightarrow 0$, la majoration

$$0 \leq \frac{1}{\delta} \int_{J_\delta(x)} g_n \leq \frac{1}{\delta} \int_0^1 g_n$$

montre la convergence uniforme vers 0 de la suite de fonctions $x \mapsto \frac{1}{\delta} \int_{J_\delta(x)} g_n$. Soit

$\varepsilon > 0$. Fixons $\delta \leq \frac{1}{2}$ un module de continuité uniforme pour chaque g_n associé à

$\frac{\varepsilon}{2}$. On a

$$\left| \frac{1}{\delta} \int_{J_\delta(x)} g_n - g_n(x) \right| = \left| \frac{1}{\delta} \int_{J_\delta(x)} (g_n(t) - g_n(x)) dt \right|$$

donc

$$\left| \frac{1}{\delta} \int_{J_\delta(x)} g_n - g_n(x) \right| \leq \frac{1}{\delta} \int_{J_\delta(x)} |g_n(t) - g_n(x)| dt \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1)$$

Par convergence uniforme vers 0 de la suite de fonctions $\left(x \mapsto \frac{1}{\delta} \int_{J_\delta(x)} g_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$, il existe n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\frac{1}{\delta} \int_{J_\delta(x)} g_n \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2)$$

Les relations (1) et (2) donnent alors, pour tout $n \geq n_0$ et tout $x \in [0, 1]$

$$0 \leq g_n(x) \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve le lemme.

On peut maintenant conclure.

Preuve du théorème

Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On pose $f_0 = f$ et $f_{n+1} = \tau(f_n)$. D'après le premier lemme, la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément équicontinue. Pour $n \geq 1$, chaque f_n est positive. Donc, d'après le second lemme, il suffit de montrer que $\int_0^1 f_n$ tend vers 0. Posons pour simplifier

$$\mu_n = \int_0^1 f_n.$$

Alors, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \int_0^1 f_{n+1}^2 = \int_0^1 (f_n - \mu_n)^2 = \int_0^1 f_n^2 - \mu_n^2.$$

Ceci montre déjà que la suite $\left(\int_0^1 f_n^2\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Minorée par 0, elle converge, disons vers ℓ . Mais alors

$$\mu_n^2 = \int_0^1 f_n^2 - \int_0^1 f_{n+1}^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell^2 - \ell^2 = 0,$$

ce qui conclut.

Problème 509-3 (Michel Lafond, Dijon)

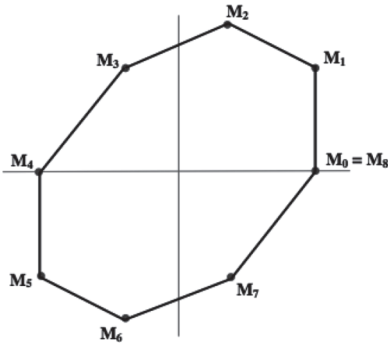
Si n est un entier supérieur ou égal à 3, on pose $A = 2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on définit la suite de points $(M_k(x_k, y_k))_{k \in \mathbb{N}}$ par

$$M_0(1, 0)$$

et pour $k \geq 1$,

$$x_k = x_{k-1} - Ay_{k-1}; y_k = y_{k-1} + Ax_k.$$

Par exemple, pour $n = 8$, voici les 9 premiers points de la suite :



- (1) Montrer que cette suite de points est périodique de période n .
- (2) Montrer que tous les points de la suite sont situés sur une même ellipse.
- (3) Montrer que l'aire du polygone $(M_0M_1 \dots M_{n-1})$ est comprise entre $\pi - \frac{\pi^3}{6n^2}$ et π .

Solutions de Michel Bataille (Rouen), Maurice Bauval (Versailles), Richard Beczkowski (Chalon sur Saône), Jean-Pierre Friedelmeyer (Strasbourg), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Michel Lafond (Dijon), Étienne Lefaux (Lille), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques).

- (1) On commence par montrer que la suite de points $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ admet n pour période. D'après la définition des suites $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$, on a pour $k > 1$,

$$y_k = y_{k-1} + Ax_k = Ax_{k-1} + (1 - A^2)y_{k-1}.$$

Donc pour $k \geq 1$,

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{pmatrix}$$

où N est la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 1 & -A \\ A & 1 - A^2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour $k \geq 0$,

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = N^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice N a pour polynôme caractéristique

$$\chi_N(X) = X^2 - (2 - A^2)X + 1.$$

Or

$$2 - A^2 = 2 - 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

Donc

$$\chi_N(X) = \left(X - \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)^2 + 1 - \cos^2\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \left(X - \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)^2 + \sin^2\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

Les valeurs propres de N sont donc

$$\zeta = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right) \text{ et } \bar{\zeta} = \exp\left(-\frac{2i\pi}{n}\right).$$

Ayant deux valeurs propres (distinctes), la matrice N est diagonalisable sur \mathbb{C} . Il existe une matrice P de passage telle que

$$N = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \bar{\zeta} \end{pmatrix}.$$

Il est clair que $D^n = I_2$ donc $N^n = PD^nP^{-1} = I_2$, ce qui montre que la suite est périodique de période n : pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} x_{k+n} \\ y_{k+n} \end{pmatrix} = N^n \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}.$$

Noter que la suite est périodique quelle que soit la condition initiale (x_0, y_0) .

(2) On montre maintenant que tous les points M_k sont sur une ellipse. Pour cela, on cherche une matrice de passage P explicite dans l'écriture $N = PDP^{-1}$. Un vecteur propre $V_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre $\lambda_1 = \zeta$ vérifie

$$u_1(1 - \zeta) = Av_1.$$

En posant

$$\omega = \exp\left(\frac{i\pi}{n}\right),$$

on a

$$\zeta = \omega^2 \text{ et } A = \frac{1}{i}(\omega - \bar{\omega}).$$

Si l'on choisit $v_1 = \omega$, on a alors

$$u_1 = \frac{Av_1}{1 - \zeta} = \frac{\omega^2 - 1}{i(1 - \omega^2)} = i.$$

On prend donc $V_1 = \begin{pmatrix} i \\ \omega \end{pmatrix}$. Par conjugaison, un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = \bar{\xi}$ est par exemple $V_2 = \begin{pmatrix} -i \\ \bar{\omega} \end{pmatrix}$. Une matrice de passage possible est

$$P = \begin{pmatrix} i & -i \\ \omega & \bar{\omega} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\det(P) = i(\omega + \bar{\omega}) = 2i \cos\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

et

$$P^{-1} = \frac{1}{2i \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} \begin{pmatrix} \bar{\omega} & i \\ -\omega & i \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = N^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = PD^k P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2i \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} \begin{pmatrix} i & -i \\ \omega & \bar{\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^k & 0 \\ 0 & \bar{\xi}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\omega} \\ -\omega \end{pmatrix},$$

soit

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \frac{1}{2i \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} \begin{pmatrix} 2i \Re(\bar{\omega}^k) \\ 2i \Im(\xi^k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{n}\right) \\ \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \end{pmatrix}.$$

Un peu de trigonométrie donne

$$\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) x_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Donc

$$x_k - \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) y_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right).$$

Par ailleurs,

$$\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) y_k = \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right).$$

En sommant les carrés de ces deux relations, on a montré que tous les points $M_k(x_k, y_k)$ sont sur l'ellipse d'équation

$$\left(x - \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)y\right)^2 + \left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)y\right)^2 = 1,$$

soit encore

$$x^2 + y^2 - 2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)xy = 1.$$

Le centre de cette ellipse est l'origine du repère et les axes de cette ellipse sont portés par les bissectrices des axes du repère.

(3) On calcule maintenant l'aire du polygone délimité par les points $(M_k)_{0 \leq k \leq n}$. Cette aire est la somme de l'aire des triangles $OM_k M_{k+1}$ pour $0 \leq k \leq n-1$. L'aire d'un tel triangle est égale à

$$\frac{1}{2} |x_k y_{k+1} - y_k x_{k+1}|.$$

Avec les relations de récurrence vérifiées par les suites (x_k) et (y_k) , cela vaut

$$\frac{1}{2} |Ax_k^2 + (1-A^2)x_k y_k - x_k y_k + Ay_k^2| = \frac{A}{2} |x_k^2 - Ax_k y_k + y_k^2| = \frac{A}{2}.$$

L'aire de chaque triangle est constante, donc l'aire du polygone vaut

$$n \frac{A}{2} = n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

L'inégalité classique

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$$

valable pour $x > 0$ donne alors l'encadrement voulu : l'aire est comprise entre $\pi - \frac{\pi^3}{6n^2}$ et π .