Exercices de ci de là

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire.

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer par mél à :

bruno.alaplantive@free.fr

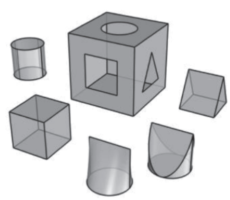
ou par courrier à :

Bruno Alaplantive
Bordeneuve
chemin de Tardibail
09100 Saint Jean du Falga

Pour l'envoi des propositions et des solutions, privilégiez, si possible, le courrier électronique. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial une copie au format PDF pour contrôler en particulier les formules qui sont souvent perturbées d'un logiciel à l'autre. Vous faciliterez ainsi notre tâche. Merci d'avance.

Exercices

Exercice 521 - 1 Robert March – Paris



La boite est percée de 3 trous : le côté du carré, le diamètre du cercle et la base et la hauteur du triangle isocèle sont égaux.
On s'intéresse aux pièces qui passent exactement à la fois dans chacun des 3 trous.
Un coin cylindrique et un coin conique[(1)] font l'affaire.

On se propose de « comparer leurs solidités », autrement dit decalculer leurs volumes respectifs, en suivant les préceptes de Cavalieri(1598-1647) : « si en coupant deux solides par une suite de plans parallèles on obtient des sections dont les aires correspondantes sont toujours dans le même rapport, les volumes compris entre deux de ces plans sont dans le même rapport ».

Exercice 521 - 2 Raphaël Sinteff – Nancy

Tiré du livre *Algèbre et trigonométrie classe de mathématiques élémentaires* conforme au programme du 3 juin 1925.

On donne un demi cercle de diamètre [AB].

(1) Voir au besoin sur http://www.mathcurve.com/surfaces/coinconic/coinconic.shtml

Trouver sur cette courbe un point M tel que si la corde [MN] est parallèle au segment [AB] on ait

$$AM + MN = \ell$$

où ℓ est un réel positif donné

Exercice 521 - 3 *Pour nos élèves*

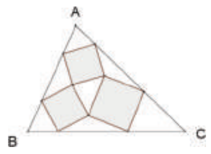
A. Un trapèze de hauteur 4 cm a ses diagonales perpendiculaires. Une diagonale mesure 5 cm.
Déterminer l'aire du trapèze.

B. Montrer que si $0 < a < b$ alors

$$\ln\left(\frac{b^2}{a^2}\right) < \frac{b}{a} - \frac{a}{b}.$$

Exercice 521 - 4 Oscar Rémal Fatti – Perpignan-gare *Ça ne tourne pas rond !*

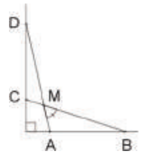
Un triangle ABC est tel que l'on a réussi à construire 3 carrés à l'intérieur, de la façon dont l'indique la figure ci-contre.
Les côtés de chaque carré ont une position bien définie par rapport à une des droites particulières du triangle. Laquelle et pourquoi ? En déduire une construction des carrés.



Solutions

Exercice 519 - 1 Michel Lafond – Dijon

Dans la figure ci-contre, les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires et les segments [AD] et [BC] se coupent en M.
Démontrer que si MB = 3 MA et MD = 5 MC alors l'angle AMB mesure 60°.



Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Raymond Heitz (Névez), Bernard Collignon (Coursan), Ludovic Jany (Bolquère), Jean-Paul Thabaret (Grenoble), Hervé Chastand (Périgueux).

• Voici la solution de Raymond Heitz.

Un repère orthonormé étant choisi, considérons des vecteurs unitaires $\vec{u}$ sur (MA) et $\vec{v}$ sur (MB).

On aura $\overrightarrow{MA} = \lambda\vec{u}$ et $\overrightarrow{MB} = 3\lambda\vec{v}$; $\overrightarrow{MC} = \mu\vec{v}$ et $\overrightarrow{MD} = 5\mu\vec{v}$.

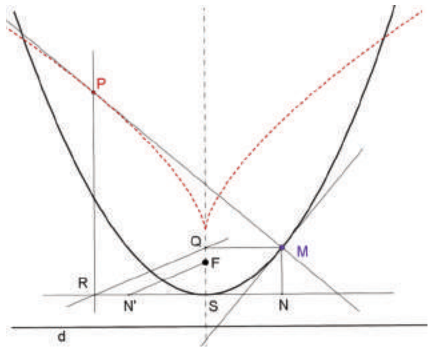
D'où $\overrightarrow{AB} = \lambda\left(3\vec{v} - \vec{u}\right)$ et $\overrightarrow{CD} = \mu\left(5\vec{u} - \vec{v}\right)$.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \lambda\mu\left(16\vec{u}\cdot\vec{v} - 5\vec{u}^2 - 3\vec{v}^2\right) = 0$..

On en déduit que $\vec{u}\cdot\vec{v}=\cos(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{1}{2}$ et l'angle de la figure vaut 60°.

Exercice 519 - 2 Robert March – Paris

F et S sont le foyer et le sommet de la parabole (P)
M un point de cette parabole.
N et Q sont les projetés orthogonaux de M respectivement sur la tangente au sommet et sur l'axe.
N′ est le symétrique de N par rapport à S.
La parallèle menée par Q à [FN′] coupe la tangente au sommet en R.
La parallèle menée par R à l'axe coupe la normale en M au point P.



Montrer que le lieu de P quand M décrit la parabole est sa développée.

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Raymond Heitz (Névez), Ludovic Jany (Bolquère), Jean-Paul Thabaret (Grenoble).

• Voici la solution de Ludovic Jany.
On considère la parabole $y = ax^2$, $a > 0$ dans un repère orthonormé d'origine S dont l'axe des ordonnées est celui de la parabole.
En appliquant les calculs réalisés dans l'article *Réfléchir sur une parabole* de V. Dageville (BV 514, p 275 à 284) on obtient pour la développée l'équation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x(t) = -4a^2t^3 \\ y(t) = 3at^2 + \dfrac{1}{2a} \end{cases}.$$

Pour la figure, on a :

$$\mathrm{S}(0;0), \mathrm{F}\left(0;\frac{1}{4a}\right), \mathrm{M}(m;am^2)\ m \neq 0, \mathrm{N}(m;0), \mathrm{Q}(0;am^2), \mathrm{N}'(-m;0).$$

L'équation de la droite (FN′) est :

$$y = \frac{1}{4am}x + \frac{1}{4a};$$

et celle de (QL) parallèle à (FN′) est :

$$y = \frac{1}{4am}x + am^2.$$

En l'appliquant au point R on a

$$0 = \frac{1}{4am} x_R + am^2,$$

d'où

$$x_R = -4a^2m^3,$$

soit encore

$$x_P = -4a^2m^3,$$

L'équation de la normale à la parabole en M est

$$y = -\frac{1}{2am} x + \frac{1}{2a} + am^2.$$

Puisque P appartient à cette normale on a :

$$y_P = -\frac{1}{2am}\left(-4a^2m^3\right) + \frac{1}{2a} + am^2 = 3am^2 + \frac{1}{2a}.$$

Avec $t = m \neq 0$, les coordonnées de P vérifient l'équation paramétrique de la développée.

Quand M est sur S, on peut étendre la construction en définissant $P\left(0;\frac{1}{2a}\right)$.

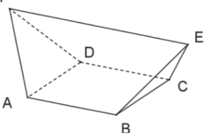
Puisque m est quelconque, la développée entière est décrite et ainsi, lorsque M décrit la parabole, le lieu de P est bien sa développée.

Nota. Dans sa solution, Pierre Renfer a utilisé le cercle osculateur.

Exercice 519 - 3 *Pour nos élèves*

A. Prouver que pour tout réel k, l'équation $x^3 + 4x^2 + 6x + k = 0$ ne peut pas avoir 3 racines réelles distinctes.

B. Dans le solide ABCDEF ci-contre, ABCD est un carré de côté $c = 3\sqrt{2}$ cm ; les triangles BCE et ADF sont équilatéraux. De plus l'arête [EF] est parallèle à la face ABCD et EF = $2c$. Calculer le volume de ce solide.



Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Robert March (Paris), Michel Lafond (Dijon), Raymond Heitz (Névez), Bernard Collignon (Coursan), Ludovic Jany (Bolquère), Jean-Paul Thabaret (Grenoble), Hervé Legrand (Tournefeuille).

A. Voici la solution de Jean-Paul Thabaret.

Considérons la fonction f définie par $f(x) = x^3 + 4x^2 + 6x$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel,

$$f'(x) = 3x^2 + 8x + 6 = 3\left(x^2 + \frac{8}{3}x + 2\right) = 3\left(\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{2}{9}\right).$$

Donc $f'(x)$ est un nombre strictement positif pour tout x réel et la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Alors elle ne peut pas avoir 3 racines réelles distinctes. La fonction f est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et la fonction est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

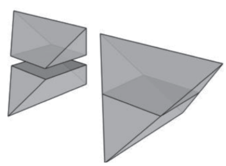
Nota. On peut apporter davantage de précision en montrant que la fonction $x \to x^3 + 4x^2 + 6x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et qu'ainsi, pour tout réel x, l'équation $x^3 + 4x^2 + 6x + k = 0$ a une unique racine réelle.

Remarque. Michel Lafond précise qu'à l'aide des formules de Cardan-Tartaglia (qui auront bientôt 500 ans !) la racine réelle exprimée en fonction de k est :

$$x = \frac{1}{3\sqrt[3]{2}}\left[\left(-27k + 88 + \sqrt{729k^2 - 4752k + 7776}\right)^{1/3} + \left(-27k + 88 - \sqrt{729k^2 - 4752k + 7776}\right)^{1/3}\right] - \frac{4}{3}.$$

B. Voici les solutions de Robert March.

Première solution :



On reconnaît dans ce volume un demi tétraèdre régulier d'arête $a = 2c$. Il s'agit d'un casse-tête d'une grande élégance : deux pièces seulement, identiques, et quelques tâtonnements. Si on considère acquis que le volume du tétraèdre régulier d'arête a est $\frac{a^3}{6\sqrt{2}}$, on obtient :

$$V = \frac{1}{2}\frac{(2c)^3}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}c^3,$$

d'où

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(3\sqrt{2}\right)^3 = 36.$$

Le volume cherché est 36 cm³.

Deuxième solution :

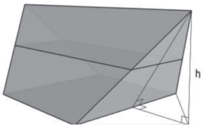
On utilise la « formule des 3 niveaux », jadis utile au maçon pour estimer le volume d'un tas de sable et à l'écolier pour obtenir son « certificat d'études »

Si on appelle $S(x)$ l'aire de la section par un plan horizontal de hauteur x, la « formule des 3 niveaux » nous donne : $V = \frac{h}{6}\left[S(0) + 4S\left(\frac{h}{2}\right) + S(h)\right]$, h étant la hauteur totale.

Ici $\mathrm{S}(0)=c^2$, $\mathrm{S}\left(\frac{h}{2}\right)=\frac{3}{4}c^2$ et $\mathrm{S}(h)=0$; d'où $\mathrm{V}=\frac{h}{6}\left(4c^2\right)=\frac{2}{3}hc^2$.

En effet $\mathrm{S}\left(\frac{h}{2}\right)$ est l'aire d'un rectangle de côtés $\frac{c}{2}$ et $\frac{3c}{2}$.

Il reste à calculer h, en faisant à nouveau appel à Pythagore (voir figure) : $h^2=\left(\frac{c\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2=\frac{c^2}{2}$ et $h=\frac{\sqrt{2}}{2}c$.



Ce qui nous donne bien $\mathrm{V}=\frac{\sqrt{2}}{3}c^3$.

Remarque. $\mathrm{S}(x)$ étant une fonction du second degré, la « formule des 3 niveaux » donne la valeur exacte de V.

Exercice 519 - 4 Paul-Alain Bonvert – Alpha du Ginseng

Dans $\mathbb{C}$ on considère l'équation (E) : $z^2+(a+\mathrm{i}b)z+(c+\mathrm{i}d)=0$.
Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les réels a, b, c et d pour que (E) admette une racine réelle et l'autre complexe.

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Michel Lafond (Dijon), Raymond Heitz (Névez), Bernard Collignon(Coursan), Ludovic Jany (Bolquère), Jean-Paul Thabaret (Grenoble), Hervé Legrand (Tournefeuille), L.G Vidiani (Fontaine les Dijon), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans).

Voici la solution de Pierre Renfer :.

Si z est une solution réelle, alors : $\begin{cases} z^2+az+c=0 \\ bz+d=0 \end{cases}$.

Si $b \neq 0$, alors $d=0$ et l'équation est à coefficients réels et elle a deux racines toutes deux réelles ou toutes deux complexes non réelles.

Pour avoir une racine réelle z et une racine non réelle, il faut donc : $\begin{cases} z^2+az+c=0 \\ bz+d=0 \\ b\neq 0 \end{cases}$.

En remplaçant z par $-\frac{d}{b}$ dans la première ligne, on obtient la condition nécessaire

$$\begin{cases} d^2+abd+b^2c=0 \\ b\neq 0 \end{cases}.$$

Cette condition est aussi suffisante puisqu'elle assure l'existence d'une racine réelle $z=-\frac{d}{b}$, l'autre solution étant non réelle car la somme des deux racines $-(a+\mathrm{i}b)$ est non réelle.