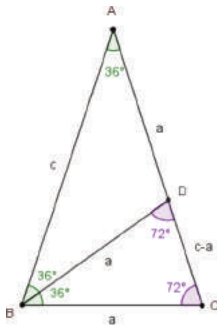
Dans l'œil de la spirale d'or

Robert March(*)

La spirale logarithmique construite à partir d'un rectangle d'or est bien connue. C'est moins vrai pour celle construite à partir d'un triangle d'or. On se propose ici d'étudier différentes constructions du point asymptote de cette spirale et d'en déduire quelques propriétés géométriques.

1 Triangle d'or



On appelle triangle d'or un triangle ABC isocèle dont les angles mesurent $\hat{A} = 36°$, $\hat{B} = \hat{C} = 72°$. Ce nom est justifié par ce que le rapport des longueurs des côtés $\frac{AB}{BC}$ est égal au nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Autrement dit, les côtés ont pour longueur BC = a ; AB = AC = $\varphi\, a$.

Pour établir cette propriété, traçons la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ABC}$. Elle coupe AC en D. Il en résulte que $\widehat{ABD} = \widehat{DBC} = 36°$ et que le triangle DBC est isocèle (c'est un triangle d'or), de même que le triangle ABD (deux angles égaux à 36°). Notons c = AB = AC et a = BC.
Alors BD = a, AD = a et CD = $c - a$.
Par ailleurs les triangles ABC et BCD sont semblables (triangles d'or) et on a donc $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD}$ soit $\frac{c}{a} = \frac{a}{c-a} = \frac{1}{\frac{c}{a}-1}$.

En posant $\frac{c}{a} = x$ on obtient $x = \frac{1}{x-1}$ soit $x^2 - x - 1 = 0$ ($x \neq 1$). Cette équation admet deux racines dont l'une est le nombre d'or φ ; l'autre est négative et donc ne convient pas. (Remarque : $\varphi^2 = \varphi + 1$ et $1/\varphi = \varphi - 1$).

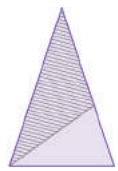
(*) École Nationale Supérieure d'Architecture Paris-Val-de-Seine -- robermarch@gmail.com

Puisque ABC et BCD sont semblables (non isométriques) il existe une similitude directe S qui transforme ABC en BCD.

Elle transforme A en B, B en C et C en D. L'angle de S est $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right) = \dfrac{3\pi}{5} = 108°$ et son rapport est $k = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{a}{c} = \dfrac{1}{\varphi}$. S n'est ni une translation ni une réflexion, elle se décompose donc en produit d'une rotation et d'une homothétie de même centre Ω.

NB : On nomme parfois triangle d'argent un triangle isocèle dont les angles ont pour valeur 36°, 36° et 108° ou, ce qui est équivalent, dont les côtés ont pour mesure a, a, et φ a. Le triangle d'argent est le gnomon(1) du triangle d'or, et réciproquement.


triangle d'argent et son gnomon

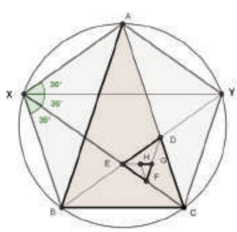

triangle d'or et son gnomon

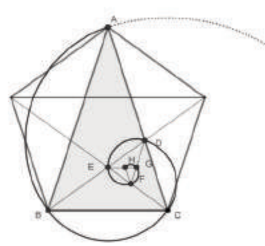
2 Pentagone régulier et spirale d'or

Considérons un pentagone régulier AXBCY, son cercle circonscrit et ses 5 diagonales. En analysant la figure on trouvera nombre de triangles d'or et d'argent. L'omniprésence du nombre d'or est liée à celle des angles de 36°. Ainsi en est-il des 3 angles définis par les 2 côtés et les 2 diagonales issues d'un même sommet : ce sont 3 angles inscrits interceptant des arcs égaux d'angle au centre 2π/5 (72°).

Soustraction de gnomons

Nous allons étudier la suite de points définie par A ; B = S(A) ; C = S(B) = S^2(A) ; D = S^3(A) ; etc. L'image par S du triangle ABC est le triangle BCD ce que l'on peut également traduire par le fait qu'en amputant le triangle d'or ABC de son gnomon le triangle d'argent ADB, on obtient un nouveau triangle d'or BCD (puisque la similitude conserve les angles). En itérant cette opération, on obtient une succession de triangles d'or CDE, DEF, EFG, …





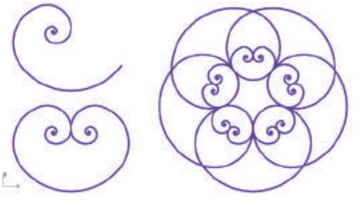
(1) « Les Anciens appelaient gnomon d'une quantité ce qu'il faut lui ajouter pour obtenir une quantité de la même famille » (A. Warusfel, *Les Nombres et leurs mystères*, p. 80, Seuil, 1961 [2012]). Ainsi $(2n + 1)$ est le gnomon de n^2.

Le tracé de la spirale d'or se fait alors par arcs de cercles successifs : l'arc AB de centre D, l'arc BC de centre E, etc., ce qui assure le raccordement tangentiel des arcs. En effet la tangente en B à l'arc AB est perpendiculaire à (DB) et la tangente en B à l'arc BC est perpendiculaire à (EB) = (DB).

On peut prolonger cette spirale en traçant l'arc de cercle de centre C et de rayon CA.

La suite de cette étude est une plongée dans l'œil de la spirale d'or, qui n'est autre que le centre de la similitude S. En guise de conclusion nous verrons que cette spirale est un tracé approché très satisfaisant de la spirale logarithmique passant par les points A, B, C, D, …

Remarque : La spirale d'or peut faire l'objet d'un exercice graphique : le plus simple étant de partir d'un triangle ABC de base 10 cm et de hauteur 15,4 cm. On pourra créer différents motifs décoratifs :



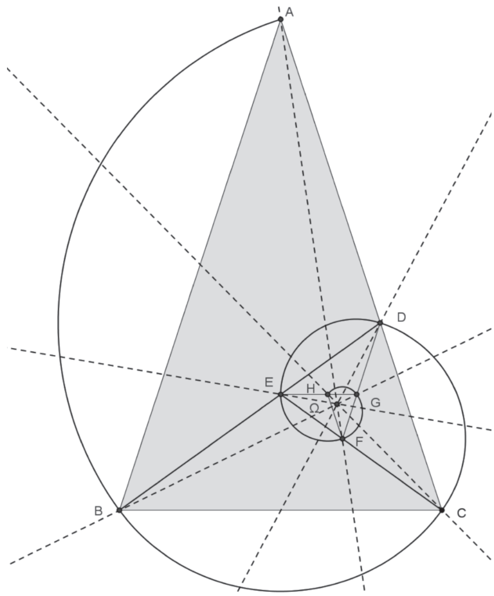
3 Étude de la similitude S

Elle a pour angle $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=\frac{3\pi}{5}$, pour rapport $\frac{BC}{AB}=\frac{1}{\varphi}$ et pour centre un point Ω que nous allons déterminer par diverses approches.

Remarque préliminaire : l'image du triangle d'or BCD par S est le triangle d'or CDE et les triangles d'or successifs BCD, CDE, DEF, EFG, FGH, … sont les images de ABC par S, S^2, S^3, S^4, S^5, …

3.1 Première approche : S^5 est une homothétie.

S^5 est la similitude de centre Ω, de rapport $\frac{1}{\varphi^5}$ et d'angle $5\times\frac{3\pi}{5}=3\pi$.. C'est donc l'homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{\varphi^5}$. Puisque l'image de ABC par S^5 est FGH, le centre Ω se trouve à l'intersection des droites (AF), (BG) et (CH).



Remarque : les droites joignant Ω aux points A, B, C, D, E, … forment un faisceau régulier, d’angle $\pi/5$.

3.2 Deuxième approche : les médianes

Soient I et J les milieux de [AB] et [BC], K le point d’intersection de (CI) et (DJ). La médiane (DJ) du triangle BCD est l’image par S de la médiane (CI) du triangle ABC. L’angle $\left(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{JD}\right)=\left(\overrightarrow{IK},\overrightarrow{JK}\right)=\left(\overrightarrow{KI},\overrightarrow{KJ}\right)$ est donc égal à $\dfrac{3\pi}{5}$ et puisque (IJ) et (DC) sont parallèles : $\dfrac{KI}{KC}=\dfrac{KJ}{KD}=\dfrac{IJ}{DC}$ donc $\dfrac{KJ}{KI}=\dfrac{KD}{KC}=\dfrac{KJ+KD}{KI+KC}=\dfrac{DJ}{IC}=\dfrac{1}{\varphi}$.

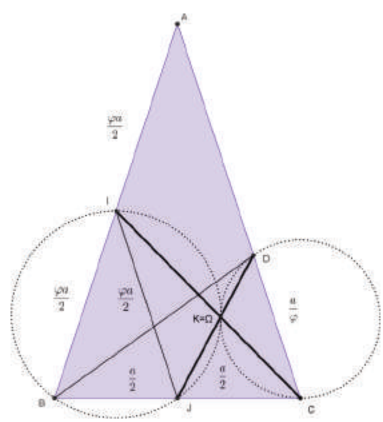
Par conséquent K n’est autre que le centre Ω de S.

Construction d’Euler :

Si (MN) a pour image (M′N′) dans une similitude S, et que P est le point d’intersection de (MN) et (M′N′), alors le centre Ω de S est le deuxième point d’intersection des cercles MM’P et NN′P.

Ici, (CI) et (DJ) se coupent en K ; on en déduit que Ω est le deuxième point d’intersection des cercles CDK et IJK. Or on vient de voir que K = Ω.

Donc les cercles ΩCD et ΩIJ se coupent en deux points confondus : autrement dit ils sont tangents en Ω.



Remarque :

En posant a = BC rappelons que : AC = $a\varphi$ donc $\mathrm{IJ} = \dfrac{a\varphi}{2}$; $\mathrm{CD} = \dfrac{a}{\varphi}$ et

$$\frac{\Omega \mathrm{I}}{\Omega \mathrm{C}} = \frac{\mathrm{IJ}}{\mathrm{CD}} = \frac{\frac{a\varphi}{2}}{\frac{a}{\varphi}} = \frac{\varphi^2}{2} = \frac{\varphi+1}{2}.$$

On en déduit : $2\overrightarrow{\Omega \mathrm{I}} + (\varphi+1)\overrightarrow{\Omega \mathrm{C}} = \vec{0}$ puis $\overrightarrow{\Omega \mathrm{A}} + \overrightarrow{\Omega \mathrm{B}} + (\varphi+1)\overrightarrow{\Omega \mathrm{C}} = \vec{0}$.
Ω est donc le barycentre des points A(1), B(1) et C(φ + 1).
Cette relation permet d’obtenir les coordonnées de Ω dans un repère orthonormé, par exemple celui défini par [BC] et sa médiatrice :

Dans ce repère les coordonnées de A, B, C sont : $\mathrm{A}\left(0; \frac{a}{2}\tan\frac{2\pi}{5}\right)$ $\mathrm{B}\left(-\frac{a}{2};0\right)$ $\mathrm{C}\left(\frac{a}{2};0\right)$.

En notant (x ; y) les coordonnées de Ω la relation $\overrightarrow{\Omega \mathrm{A}} + \overrightarrow{\Omega \mathrm{B}} + (\varphi+1)\overrightarrow{\Omega \mathrm{C}} = \vec{0}$ permet le calcul de x et de y soit : $x = \dfrac{a\varphi}{2(\varphi+3)}$ et $y = \dfrac{a\tan\frac{2\pi}{5}}{2(\varphi+3)}$.

En rappelant que $\tan\dfrac{2\pi}{5} = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$ et puisque $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ on obtient finalement les coordonnées de Ω :

$$\Omega\left(\frac{a}{44}\left(1+3\sqrt{5}\right); \frac{a}{44}\left(7-\sqrt{5}\right)\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right).$$

Ce calcul nous permet également d’obtenir des valeurs approchées des mesures des angles $\widehat{\Omega \mathrm{BC}}$ et $\widehat{\Omega \mathrm{BD}}$.

En effet : $\tan\widehat{\Omega \mathrm{BC}} = \dfrac{\frac{a}{44}\left(7-\sqrt{5}\right)\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\frac{a}{2}+\frac{a}{44}\left(1+3\sqrt{5}\right)} = \dfrac{\left(7-\sqrt{5}\right)\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{23+3\sqrt{5}} \approx 0{,}494.$

Par conséquent : $\widehat{\Omega \mathrm{BC}} \approx 26{,}27°$ et $\widehat{\Omega \mathrm{BD}} \approx 36° - 26{,}27° = 9{,}73°$.

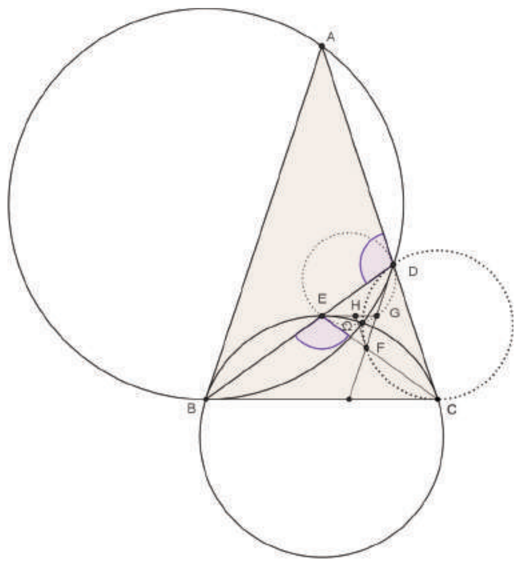
Ces valeurs seront exploitées par la suite (§4).

3.3 Troisième approche : ensemble des points du plan d’où l’on voit un segment sous un angle donné.

S(A) = B : Ω appartient donc à l’arc capable de 2π/5 construit sur [AB] ; or D est un point de cet arc capable (ADB est un triangle d’argent) ; donc Ω appartient au cercle ABD (tangent en B à (BC)).
De même S(B) = C : Ω appartient donc à l’arc capable de 2π/5 construit sur [BC] ; or E est un point de cet arc donc Ω appartient au cercle BCE (tangent en B à (AB) et

en C à (AC)).
Conclusion : Ω est le deuxième point d'intersection des cercles ABD et BCE.

Remarque : il s'ensuit que Ω appartient aux cercles BCE, CDF, DEG, … images du cercle ABD par S, S^2, S^3, …

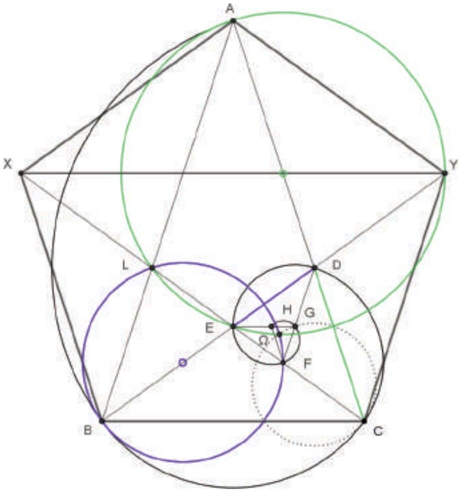


3.4 Quatrième approche : ensemble des points M du plan tels que MA/MB=k.

S(C) = D, donc $\Omega D = \frac{1}{\varphi}\Omega C$ et par conséquent le point Ω appartient au cercle ensemble des points M tels que $\frac{MC}{MD} = \varphi$.
Or A, Y et E vérifient cette propriété puisque YCD est un triangle d'argent et ECD un triangle d'or.
Donc Ω appartient au cercle AYE (dont le centre est à l'intersection de la droite (CD) et de la médiatrice de [AY]).

Remarque : L appartient également à ce cercle : LCD est un triangle d'argent.
De même S(D) = E : Ω appartient donc au cercle ensemble des points M tels que $\frac{MD}{ME} = \varphi$; or B, L et F vérifient cette propriété : LDE est un triangle d'argent, FDE un triangle d'or.
Donc Ω appartient au cercle BLF (dont le centre est à l'intersection de la droite (DE) et de la médiatrice de [BL]).

Conclusion : Ω est le deuxième point d'intersection des cercles AEL et BFL.

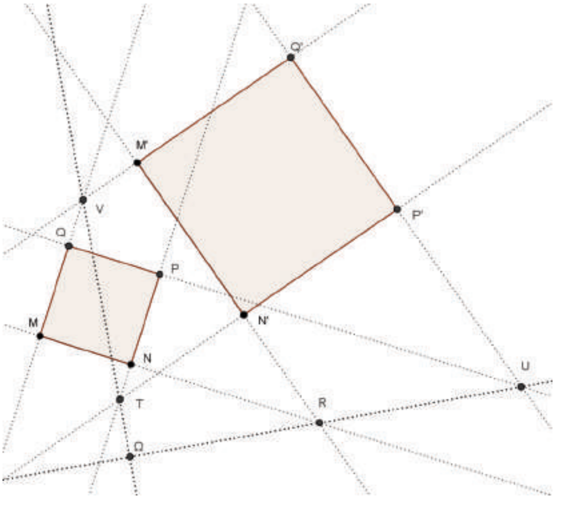


Remarque : il s’ensuit que Ω appartient aux cercles transformés du cercle AEL par S, S^2, S^3, …

3.5 Cinquième approche : la ronde des carrés

Cette méthode permet de déterminer le centre d’une similitude directe par l’intersection non pas de cercles mais de droites[(2)].

Soit MNPQ un carré construit sur le segment [MN] et M′N′P′Q′ son image par S. Soient R, T, U, V les points d’intersection de, respectivement, (MN) et (M′N′), (NP) et (N′P′), (PQ) et (P′Q′), (QM) et (Q′M′). Alors, le point d’intersection de (RU) et (TV) est le centre Ω de la similitude S.



(2) Wikipedia, similitude (géométrie) ; Programme TS 2002, document d’accompagnement p. 64-65.

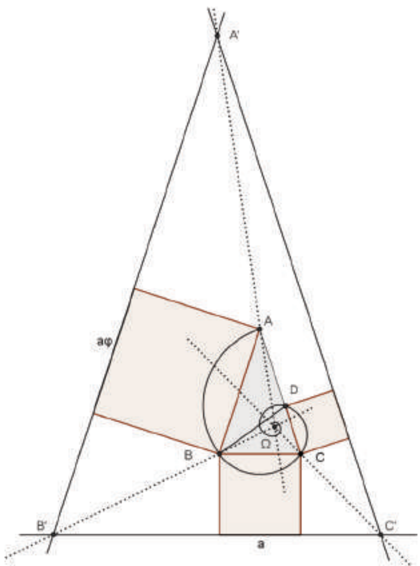
En effet :

R appartenant à (MN), son image R′ par S appartient à (M′N′) ; de même, U appartenant à (PQ), son image U′ par S appartient à (P′Q′) (R′ et U′ n’ont pas été représentés sur la figure). Donc (RR′) et (UU′) sont parallèles et, par conséquent, Ω appartient à la droite (RU) (et à la droite (R′U′)). Un raisonnement analogue montre que Ω appartient à la droite (TV) et permet de conclure :

Ω est le point d’intersection des droites (RU) et (TV).

Appliquons cette méthode à notre cas de figure, en construisant un premier carré de côté [AB] (extérieur au triangle ABC) et ses images par S et S^2. En prolongeant les côtés parallèles à ceux du triangle ABC jusqu’à leurs intersections, on construit un triangle A′B′C′ homothétique de ABC (leurs côtés sont deux à deux parallèles).

Revenons aux deux premiers carrés, et transposons les notations initiales : M est en A, N en B, M′ en B et N′ en C. Le point R est donc en B et le point U en B’. Le centre Ω de S est donc sur la droite (BB′). On montre de la même façon que Ω est sur (CC′) et, comme les deux triangles ABC et A′B′C′ sont homothétiques, le centre Ω de S est également le centre de cette homothétie.
Conclusion : Ω est le point d’intersection des droites (AA′), (BB′) et (CC′).



Curiosité :

Le rapport d’homothétie $k = \dfrac{A'B'}{AB}$ n’est pas égal à 4 comme toute figure tracée à la règle et au compas, aussi soignée soit-elle, le porte à croire… En effet :

Remarquons que $k = \dfrac{B'C'}{BC}$ et donc dans le repère orthonormé défini par (BC) et la médiatrice de [BC] les coordonnées des points B, C, Ω (calculés au §3.2) sont : $B\left(-\frac{a}{2};0\right)$ $C\left(\frac{a}{2};0\right)$ $\Omega\left(\frac{a\varphi}{2\varphi+6};\frac{a\tan\theta}{2\varphi+6}\right)$ avec $\theta=\frac{2\pi}{5}$.

Les coordonnées de B′ sont obtenues comme intersection de la droite (B Ω) avec la droite (B′C′) d'équation $y=-a$.

On obtient : $B'\left(-\frac{a}{2}-\frac{a(2\varphi+3)}{\tan\theta};-a\right)$.

Un calcul analogue nous donne $C'\left(\frac{a}{2}+\frac{3a}{\tan\theta};-a\right)$.

D'où $B'C'=\frac{a}{2}+\frac{3a}{\tan\theta}+\frac{a}{2}+\frac{a(2\varphi+3)}{\tan\theta}=a+\frac{2a\varphi+6a}{\tan\theta}$

soit finalement $k=\frac{B'C'}{BC}=1+\frac{2\varphi+6}{\tan\theta}$.

Et en remplaçant φ et tan θ par leurs valeurs : $k=1+\frac{7+\sqrt{5}}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}\approx 4{,}00098$.

4 Au fait, et la spirale logarithmique ?

Considérons une spirale logarithmique de centre Ω d'origine A et passant par B. L'équation polaire de cette spirale est de la forme $\rho = \rho_0 b^{\theta}$. Elle passe par A donc $\rho_0 b^0 = \rho_0 = \Omega A$ et puisque elle passe par B :

$$\rho=\rho_0 b^{\frac{3\pi}{5}}=\Omega B=\frac{\Omega A}{\varphi}=\frac{\rho_0}{\varphi} \text{ soit } b=\varphi^{\frac{-5}{3\pi}}$$

L'équation de cette spirale est donc : $\rho=\rho_0\varphi^{-\frac{5}{3\pi}\theta}$ avec $\rho_0 = \Omega A$.

Quand θ augmente de $3\pi/5$, ρ est multiplié par φ^{-1} ; par conséquent la spirale passe par les points C, D, E, F, …

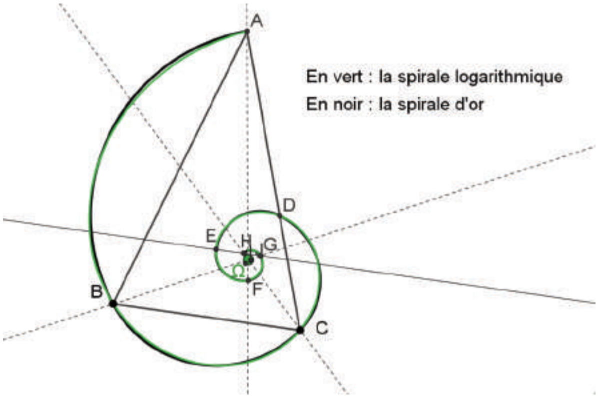
L'angle v que fait la tangente à la spirale logarithmique avec le rayon vecteur vérifie :

$$\tan v=\frac{1}{\ln b}=\frac{1}{\ln\left(\varphi^{\frac{-5}{3\pi}}\right)}=\frac{3\pi}{5}\frac{1}{\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} \text{ soit } v\approx 75{,}68°.$$

Considérons maintenant l'angle que fait la tangente en B à l'arc de cercle AB de centre D avec (ΩB) : il est égal à $\frac{\pi}{2}-\widehat{\Omega BD}$, soit environ 90° − 9,73° = 80,27° (cf §3.2).

L'angle que font entre elles les tangentes aux deux courbes (la spirale d'or et la spirale logarithmique) en B est donc de 80,27° − 75,68° = 4,59°.

Cela témoigne du faible écart entre les deux courbes et de la pertinence du tracé approché par arcs de cercles.



Voici, pour terminer, quelques modélisations de volutes réalisées à partir d’une spirale d’or.