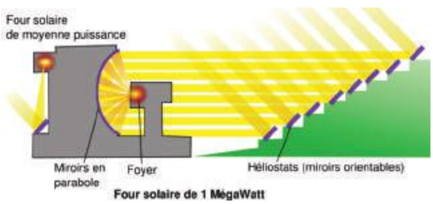
# Four solaire et parabole

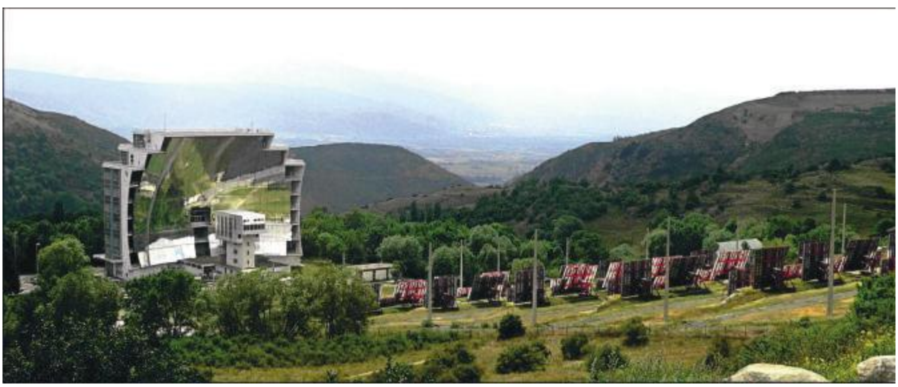
## Groupe Maths-Physique de l'IREM de Besançon

L'activité présentée dans cet article est inspirée du fonctionnement du four solaire : un dispositif en métal réfléchissant capte les rayons du Soleil et les réfléchit de façon à les faire tous converger vers un point (ou une ligne ou une zone plus large) qui atteint alors des températures plus ou moins élevées.

Il existe des fours domestiques transportables qui demandent une orientation manuelle de la part de l'utilisateur, la température de cuisson peut varier de 120°C à 200°C selon la forme et le modèle (plus d'informations sur le site http://www.atlascuisinesolaire.com par exemple).




Il existe aussi des fours de taille beaucoup plus grande et massifs et donc de position fixe : c'est le cas du grand four solaire d'Odeillo (en France, dans les Pyrénées Orientales) qui est l'un des plus grands au monde et permet d'atteindre des températures supérieures à 3000°C. Les panneaux du grand four sont fixes et forment un paraboloïde de révolution. Une série de miroirs plans, orientables, de taille plus petite réfléchit les rayons lumineux vers le grand four qui les réfléchit à son tour en les concentrant en un « point » positionné au sommet d'une tour centrale.

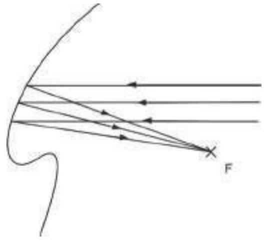


(photos tirées de l'article Wikipédia Four solaire d'Odeillo)

Notre activité, qui a été présentée lors d'un stage inscrit au Plan Académique de Formation de l'académie de Besançon en mars 2013, s'intéresse au cas où l'on souhaite concentrer les rayons lumineux en un point fixe (qui sera appelé foyer). Des documents sont téléchargeables dans les ressources en ligne du site de L'IREM de Franche-Comté (groupe de travail Maths-Physique[1]).

(1) http://www-irem.univ-fcomte.fr/pages/fr/menu2562/ressources-en-ligne/groupe-math-phys-13511.html

La problématique est la suivante : quelle forme doit avoir un objet réfléchissant qui réfléchirait des rayons lumineux incidents (tous parallèles) vers un unique point noté F?

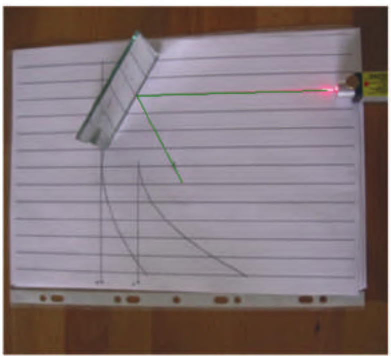



Dans toute l'activité, on se place dans un plan en coupe verticale de l'objet ce qui revient à chercher une courbe et non une surface. On fait aussi le choix de chercher une courbe continue, voire même qui admet une tangente en tout point.

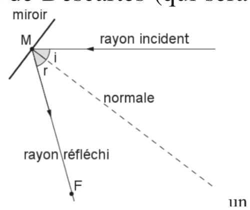
**1) Approche expérimentale** *(dès la Seconde)*

On trace une série de droites parallèles espacées du même écartement et qui représentent les rayons lumineux. On place le point F et on se donne un point de départ $M_0$ (supposé appartenir à l'objet réfléchissant) sur l'une des parallèles. On utilise également un petit miroir rectangulaire et un pointeur laser.

On place le miroir à la verticale de façon que sa base passe par $M_0$, on aligne le laser sur la parallèle à laquelle appartient $M_0$, il ne reste plus qu'à orienter le miroir de sorte que le rayon réfléchi en $M_0$ passe par F. On trace alors un trait le long du bord du miroir, ce trait intercepte la parallèle voisine en un point $M_1$.
On réitère le procédé en $M_1$ et ainsi de suite afin d'obtenir une courbe polygonale qui approche la courbe recherchée.
Voici le résultat obtenu en prenant un (ou deux) point $M_0$ à l'extrémité de la feuille (on aurait pu également faire le choix de placer $M_0$ sur la même parallèle que F).



Au cours de l'expérience, on peut vérifier la loi de réflexion de Descartes (qui sera utilisée dans les autres approches) :

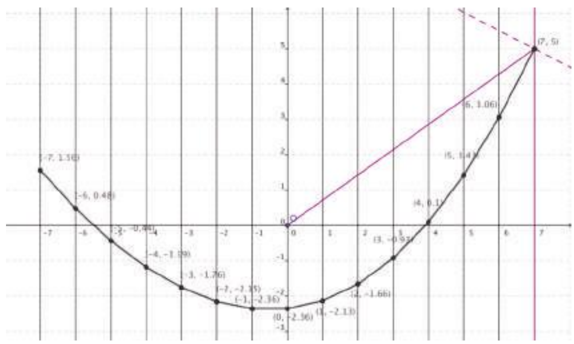



| |
|---|
| Le rayon réfléchi est le symétrique du rayon incident par rapport à la normale à la surface réfléchissante. |

On a donc l'égalité d'angles suivante : $i = r$.

*Remarque* : si l'on ne possède pas le matériel utilisé, on peut positionner un miroir fictif représenté par un segment perpendiculaire à la bissectrice de l'angle formé par les deux rayons (incident et réfléchi) et faire la même construction de proche en proche.

Résultat sur GeoGebra (avec F = O) et dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ :



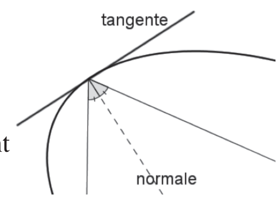
Première conclusion : la courbe obtenue ressemble fortement à une parabole même si l'accumulation des approximations et le choix de placer $M_0$ à l'extrémité de la feuille lui ont fait perdre son caractère symétrique (un peu à la manière de la méthode d'Euler).

**2) Approche géométrique**

Cet exercice a tout d'abord été proposé à des lycéens lors d'un atelier de la Journée Découverte de la Recherche en Mathématiques 2012 qui a eu lieu à l'UFR Sciences et Techniques de l'Université de Franche-Comté. Il correspond à la fiche élève téléchargeable sur le site.

La courbe recherchée n'étant pas une droite (sinon les rayons réfléchis seraient parallèles et ne passeraient donc pas tous par F …), la loi de Descartes s'écrit :

> Le rayon réfléchi est le symétrique du rayon incident par rapport à la normale à la tangente à la surface réfléchissante.




À nouveau l'angle d'incidence et l'angle de réflexion sont égaux.

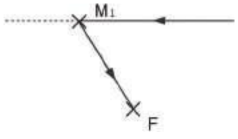
L'approche expérimentale nous incite à penser que la courbe recherchée est une parabole. Géométriquement, une parabole se caractérise par son foyer et une droite particulière appelée directrice(2). L'exercice s'organise en deux temps (analyse/synthèse) afin de dégager l'existence de cette droite particulière liée à la courbe recherchée.

Partie Analyse :
Supposons qu'il existe un tel objet curviligne.
Considérons alors $M_1$ un point de cet objet : le rayon incident se réfléchit en $M_1$ et arrive en F (foyer).
Rappel de la loi de la réflexion de Descartes :
Le rayon réfléchi est le symétrique du rayon incident par rapport à la normale à la surface réfléchissante.

1. Construire la tangente $T_1$ en $M_1$ à l'objet.

(2) Ce lien entre la définition géométrique et la courbe représentative d'une fonction du second degré reste à justifier s'il n'a pas été aborde auparavant.

2. Tracer la droite $\Delta_1$ perpendiculaire à $T_1$ passant par le foyer F.




3. Noter $H_1$ le point d'intersection de la droite $\Delta_1$ et du rayon passant par $M_1$.

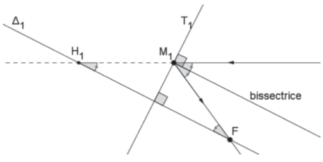
4. Montrer que $M_1H_1 = M_1F$.

5. Que représente géométriquement le point $H_1$ par rapport au point F ? Quelle est sa signification en optique ?

6. On considère un rayon parallèle au-dessus du premier, distant de $p$ = 1cm. On appelle $M_2$ le point d'intersection de ce rayon avec $T_1$. Construire la tangente $T_2$ en $M_2$, puis le point $H_2$ correspondant.
Renouveler le procédé plusieurs fois afin de construire les points $H_3$, $H_4$... Quelle remarque peut-on faire concernant ces points ?

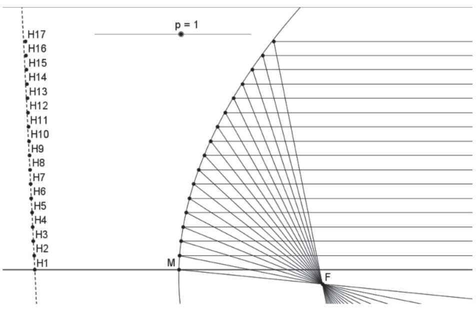
Éléments de correction :

La tangente $T_1$ est la perpendiculaire en $M_1$ à la bissectrice de l'angle formé par les deux rayons. La droite $\Delta_1$ est alors parallèle à cette même bissectrice et en considérant des angles correspondants et alternes-internes égaux, on montre que le triangle $FM_1H_1$ est isocèle en $M_1$.




Le point $H_1$ est le symétrique de F par rapport à la tangente $T_1$. De plus, $H_1$ représente l'image optique de F dans un miroir plan confondu avec la tangente $T_1$. C'est à dire, qu'un onservateur placé sur la rayon incident passant par $H_1$ voit F dans le miroir comme s'il était en $H_1$.

La figure ci-contre donne la position des points $H_1$ à $H_{17}$ obtenus à l'aide du logiciel GeoGebra (document courbeHH'.ggb sur le site).




Partie synthèse :

La construction précédente a été réalisée avec GeoGebra. On peut observer que si le pas $p$ est suffisamment petit, alors les points $H_1$ semblent s'aligner sur une droite perpendiculaire à la direction des rayons que l'on appellera par la suite droite directrice.

a) Droite directrice
On note D une droite perpendiculaire aux rayons incidents. L'idée, maintenant, va être de construire un objet P lorsque H décrit la droite directrice D et de montrer que la courbe P répond à la problématique de départ.

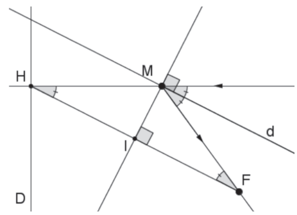
1. Tracer le rayon passant par H.

2. En notant I le milieu de [HF], construire la médiatrice de [HF].

3. En notant M l'intersection de ces deux droites, tracer la perpendiculaire $d$ à (IM) passant par M.


4. Justifier que MH = MF et montrer que l'angle entre la droite $d$ et le rayon incident est égal à l'angle entre $d$ et (MF).

On s'appuie cette fois-ci sur la directrice D pour construire une courbe P, on retrouve les mêmes propriétés d'angles que dans la partie analyse.
On a donc prouvé que la droite $d$ normale à (IM) est la bissectrice de l'angle formé par les deux rayons. Il faut encore prouver que la droite (IM) est bien la tangente à la courbe P au point M afin que la loi de Descartes soit vérifiée.




**b) Tangente** *(en Première)*
Il ne reste plus qu'à montrer que (IM) est bien la tangente en M à cet objet P :

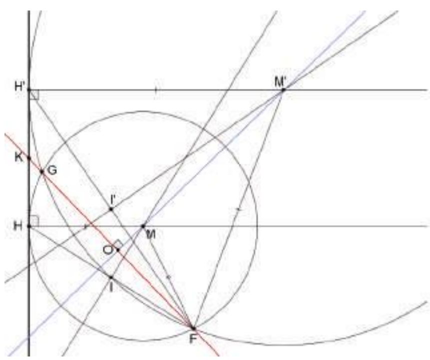
1. Construire M et M′ associés à H et H′ de la même manière que précédemment.

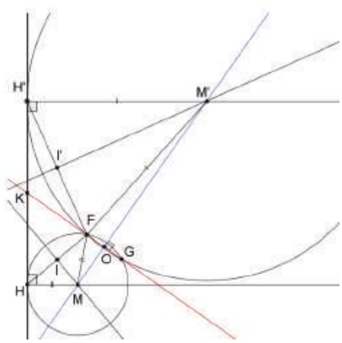
2. Tracer les cercles de centre M et M′ passant par F.

On note G le deuxième point d'intersection de ces deux cercles et K l'intersection de (FG) et D la directrice.


On remarque tout d'abord que (FG) est perpendiculaire à (MM′). On constate, de plus, que lorsque H′ tend vers H, M′ tend vers M et K, G tendent vers H[3]. Donc la tangente en M à l'objet  est orthogonale à (HF) et passe par M : c'est donc bien la médiatrice de [FH].

Différents cas de figures (on suppose les deux cercles sécants en 2 points donc non tangents en F) :




(3) NDLR : La nécessité de discuter des positions de K et G est éclairée par la remarque qui suit la conclusion de ce paragraphe.

On note $r$ = MF et R = M′ F les rayons des deux cercles.
MF = MG = $r$ et M′F = M′G = R donc M et M′ sont équidistants des points F et G : [MM′] est la médiatrice de [FG] donc (MM′) est perpendiculaire à la droite (FK). On note O leur point d'intersection, c'est le milieu de [FG].

On se retrouve dans la configuration d'une droite D qui est la tangente commune à deux cercles sécants en deux points.

(Remarque : dans le cas où les cercles sont tangents, alors F = G = O et F, M, M′ sont alignés. On note K le point d'intersection entre D et la tangente commune aux deux cercles en F donc on a également (FK) et (MM′) perpendiculaires.)

On peut alors montrer, en utilisant plusieurs fois le théorème de Pythagore, que K est le milieu de [HH′] : dans OFM, $OF^2 = FM^2 - OM^2 = r^2 - OM^2$ et dans OFM′, $OF^2 = FM'^2 - OM'^2 = R^2 - OM'^2$ ; donc

$$OM^2 - r^2 = OM'^2 - R^2 \qquad (1)$$

De plus dans KHM, $KM^2 = KH^2 + HM^2$ et dans KOM, $KM^2 = KO^2 + OM^2$ ; donc

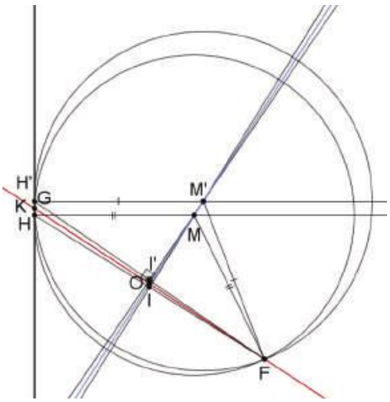
$$KH^2 = KO^2 + OM^2 - HM^2 = KO^2 + OM^2 - r^2 \qquad (2)$$

De la même façon $KM'^2 = KH'^2 + H'M'^2 = KO^2 + OM'^2$ dans les triangles KH′M′ et KOM′. Alors

$$KH'^2 = KO^2 + OM'^2 - H'M'^2 = KO^2 + OM'^2 - R^2$$

D'après les égalités (1) et (2), on en déduit que $KH^2 = KH'^2$ donc KH = KH′ et, comme les trois points sont alignés sur la droite D, K est bien le milieu de [HH′].
Pour montrer que (IM) est la tangente en M à la courbe, on fait tendre M′ vers M à l'aide des points H et H′ :
Quand H′ tend vers H, M′ tend vers M et K tend aussi vers H puisqu'il est le milieu de [HH′]. La position limite de la droite (FK) est donc la droite (FH), celle de (MM′) est la tangente à la courbe en M.
On rappelle que (MM′) est perpendiculaire à (FK). Alors, par conservation de l'orthogonalité lors du passage à la limite, la tangente à la courbe au point M est perpendiculaire à (FH).
On en déduit que la tangente à la courbe en M est bien (IM).

La figure ci-contre illustre ce phénomène (document GeoGebra tangente.ggb sur le site).

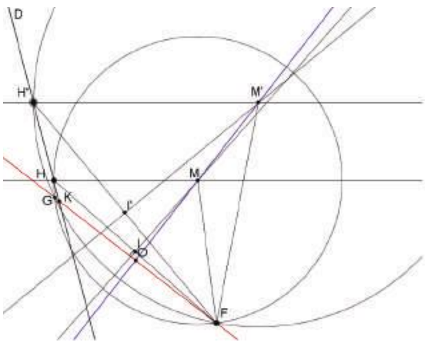


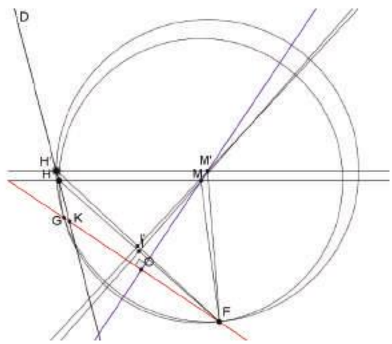
**Conclusion** : un objet P répondant au problème peut être facilement construit point par point à l'aide d'une droite directrice D perpendiculaire aux rayons incidents. On fait parcourir la droite D par un point H auquel on associe un point M sur le même rayon incident que H en utilisant simplement la relation MH = MF. L'objet P est alors l'ensemble des points M obtenus.

On reconnaît la définition d'une parabole par sa directrice et son foyer. Cela nous donne un objet P possible qui répond au problème posé. L'approche analytique qui suit va prouver l'unicité de la solution (connaissant un point de l'objet).

*Remarque* : on peut s'interroger sur la nécessité de prendre une directrice D perpendiculaire à la direction des rayons. En fait, si ce n'est pas le cas, on perd la certitude que K appartient au segment [HH′] et lorsque H′ tend vers H, K ne tend plus nécessairement vers H, comme l'illustre la figure ci-dessous.

Toutes les relations d'angles restent vraies (a. de la partie synthèse) mais la tangente à la courbe en M n'est plus forcément (IM).




### 3) Approche analytique

Cette approche a été traitée dans un devoir à la maison donné en 2012-2013 en première année d'université dans le cadre d'un cours d'analyse. Le document *résolution analytique.pdf* est téléchargeable sur le site.

**L'objectif de l'exercice est de déterminer une courbe qui réfléchit des rayons parallèles en un unique point O donné.**

1\. Résolution graphique : tracé approché de la courbe (cf. approche expérimentale précédente).

2\. Équation différentielle associée

On note $f$ la fonction associée à la courbe cherchée, on suppose $f$ dérivable en tout point.

(a) Dans un repère $\left(\mathrm{O}; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$ orthonormé, placer un point M($x$ ; $y$). En supposant que les rayons incidents sont parallèles à l'axe des ordonnées, construire le miroir associé à M. On note (T) la droite sur laquelle est placé le miroir : c'est en fait la tangente à la courbe cherchée.

(b) La droite parallèle à (T) et qui passe par O coupe le rayon incident passant par M en un point K. Montrer que le triangle OMK est isocèle en M.

(c) Exprimer les coordonnées de K en fonction de $x$ et $y$.

(d) Déduire des questions précédentes l'expression de $f'(x)$ en fonction de $x$ et de $f(x)$.

(e) Donner l'équation différentielle vérifiée par $f$, avec la condition initiale. Quel est le type de cette équation différentielle ?

3. Une courbe solution

On suppose que $f$ est une fonction du second degré.

(a) Donner l'expression de $f(x)$ en utilisant la question 1 (par lecture graphique, en assimilant la courbe obtenue à une parabole).

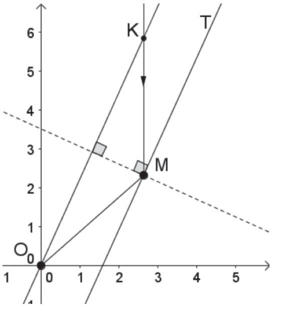
(b) Déterminer l'expression de $f(x)$ en utilisant l'équation différentielle de la question 2 (en cherchant les solutions de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$).

**Correction du DM :**

2. La bissectrice de l'angle $\widehat{\mathrm{OMK}}$ est aussi la hauteur issue de M dans le triangle OMK (car elle est perpendiculaire à T et (OK) et T sont parallèles).
On en déduit que le triangle OMK est isocèle en M($x$ ; $y$).

Alors $x_K = x_M$ et $y_K = y_M + \mathrm{KM} = y_M + \mathrm{OM} = y + \sqrt{x^2 + y^2}$.

$f'(x)$ est le coefficient directeur de la tangente T parallèle à (OK) donc :




$$f'(x) = \frac{y_K - y_O}{x_K - x_O} = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}.$$

On constate qu'il faut $x \neq 0$, donc on résoudra l'équation différentielle sur ]0 ; +∞[ou sur ]−∞ ; 0[.

La fonction $f$ recherchée est donc solution sur ]0 ; +∞[ou ]−∞ ; 0[ de l'équation différentielle ($E_1$) :

$$xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

*Remarque* : lorsque $x = 0$, la droite (OK) est l'axe des ordonnées et la tangente T est parallèle à celui des abscisses, on peut donc poser $f'(0) = 0$.

3. À l'aide de la courbe tracée sur GeoGebra en partant du point M(7 ; 5) (voir précédemment), on peut conjecturer que la courbe cherchée est une parabole. En prenant par exemple S(0 ; −2.36) pour sommet, on obtient :

$$f(x) = \frac{1}{7}x^2 - 2.36.$$

Cas général : on cherche une solution de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a > 0$ car, vue l'inclinaison des rayons lumineux (dans le sens descendant de l'axe (O$y$)), la parabole doit être tournée « vers le haut ». En remplaçant dans l'équation différentielle ($E_1$), on trouve :

$$f(x) = ax^2 - \frac{1}{4a}.$$

En effet :

Si $x(2ax+b) = ax^2+bx+c+\sqrt{x^2+\left(ax^2+bx+c\right)^2}$ alors $\left(ax^2-c\right)^2 = x^2+\left(ax^2+bx+c\right)^2$ et $2abx^3+x^2\left(b^2+4ac+1\right)+2bcx=0$ pour tout réel $x$ de ]0 ; +∞[ ou ]-∞ ; 0[ avec $a \neq 0$.

Par identification : $b = 0$ et $c = -\frac{1}{4a}$.

On vérifie aisément que cette fonction est bien solution de l'équation pour tout réel $a > 0$.

**Résolution complète :**

La résolution de l'équation différentielle n'était pas demandée dans le devoir, elle peut néanmoins se faire avec les connaissances du premier semestre de première année de licence en effectuant un changement de variable.

On pose : $z = \frac{y}{x}$ (avec $x \neq 0$).

Alors $y$ est solution de ($E_1$) : $xy' = y+\sqrt{x^2+y^2}$ si et seulement si $z$ est solution de ($E_2$) : $\frac{z'}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{1}{|x|}$.

• Sur ]0 ; +∞[ :

$$\frac{z'}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \operatorname{argsh} z = \ln x + \mathrm{C}, \mathrm{C} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \operatorname{sh}(\ln x + \mathrm{C}), \mathrm{C} \in \mathbb{R}.$$

Sachant que $\operatorname{sh} x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$ pour tout réel $x$, on obtient $z = \frac{1}{2}\left(x\mathrm{e}^{\mathrm{C}} - \frac{1}{x\mathrm{e}^{\mathrm{C}}}\right)$.

On en déduit que $y = zx = \frac{1}{2}\left(x^2\mathrm{e}^{\mathrm{C}} - \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{C}}}\right) = kx^2 - \frac{1}{4k}$ si on pose $k = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{C}}}{2}$.

• Sur ]-∞ ; 0[ :

$$\frac{z'}{\sqrt{1+z^2}} = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow \operatorname{argsh} z = -\ln(-x) + \mathrm{C}, \mathrm{C} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \operatorname{sh}(-\ln(-x) + \mathrm{C}), \mathrm{C} \in \mathbb{R}.$$

On obtient $z = \frac{1}{2}\left(x\mathrm{e}^{-\mathrm{C}} - \frac{1}{x\mathrm{e}^{-\mathrm{C}}}\right)$ et $y = zx = \frac{1}{2}\left(x^2\mathrm{e}^{-\mathrm{C}} - \frac{1}{\mathrm{e}^{-\mathrm{C}}}\right) = kx^2 - \frac{1}{4k}$ si on pose

$k = \frac{e^{-C}}{2}$.

• En 0 :

Les solutions précédentes sur ]0 ; +∞[ et ]-∞ ; 0[ peuvent se prolonger chacune en 0 en posant :

$$y(0) = -\frac{1}{4k}.$$

On a bien alors $y'(0) = 0.$.

*Remarque* : avec une condition initiale , on calcule le paramètre $\lambda$ en résolvant l'équation :

$$y_0 = 4x_0^2 - \frac{1}{4k}$$

équivalente à

$$4k^2x_0^2 - 4ky_0 - 1 = 0.$$

Cette équation du second degré admet un discriminant positif donc deux solutions réelles : l'une positive et l'autre négative (en effet le produit des racines est négatif). Vu l'inclinaison des rayons lumineux, la parabole doit être tournée « vers le haut » donc on ne garde que la solution positive pour $k$. La solution de l'équation différentielle, avec une condition initiale, est donc unique.

**Conclusion :**

Les seules courbes dérivables en tout point (et donc continues) qui permettent de réfléchir les rayons lumineux vers un même point F sont les paraboles, la solution est unique si l'on se donne un point de la courbe.

C'est cette forme parabolique qui a été utilisée lors de la construction du tout premier four solaire à Mont-Louis (1949, classé aux monuments historiques et toujours en activité) et que l'on a reprise dans les années 70 pour le four solaire d'Odeillo et pour son homologue ouzbèke à Parkent.

On peut toutefois remarquer qu'une courbe non continue constituée de morceaux de paraboles de même foyer (comme cela existe dans certains phares de voiture) aurait également été envisageable.