Kaléidoscope(*)

Serge Cantat(**)

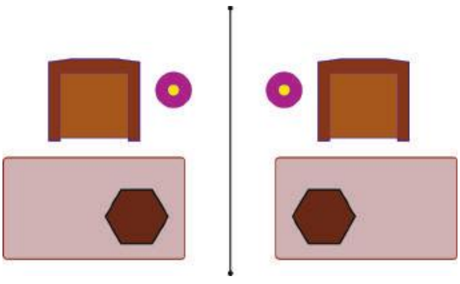
Le kaléidoscope est un tube formé d'un agencement de miroirs qui contient des fragments de verre colorés, mobiles, aux formes variées. À chaque secousse, il offre une figure différente ; d'ailleurs, son étymologie grecque signifie « de belles formes à observer ».

Sa conception repose sur deux principes : les propriétés de réflexion de la lumière et les lois de composition des symétries. C'est la composition de ces symétries que nous voulons décrire dans ce texte.

Un miroir

Un rayon lumineux qui vient heurter un miroir est réfléchi ; les angles que forme le miroir avec le rayon incident et le rayon réfléchi sont égaux. Lorsqu'on scrute un miroir, les objets observés se situent donc dans une zone qui dépend de la taille du miroir et de l'angle d'observation. Ce phénomène est bien connu des conducteurs, qui se méfient de l'angle mort dans leur rétroviseur.

Face à un miroir, ce n'est pas une copie conforme de soi-même qui s'offre à nous car la gauche et la droite ont été inversées : si l'on se gratte l'oreille droite, l'image se gratte l'oreille gauche. En outre, le reflet parait relativement éloigné, la distance apparente étant égale au double de notre distance au miroir. Tout ceci illustre au quotidien des propriétés de base de la symétrie plane, notre reflet apparaissant en effet transformé par une telle symétrie orthogonale. La figure suivante résume les propriétés principales de cette transformation ; le dessin y est une « vue de dessus » et correspond donc à la symétrie par rapport à une droite du plan. Dans la suite, les figures seront d'ailleurs presque toutes situées dans un plan ; on peut penser, comme ici, que c'est une vue de dessus de la situation tridimensionnelle, ou que le plan est orthogonal au miroir : la symétrie par rapport au miroir devient alors la symétrie par rapport à la droite d'intersection du plan et du miroir.



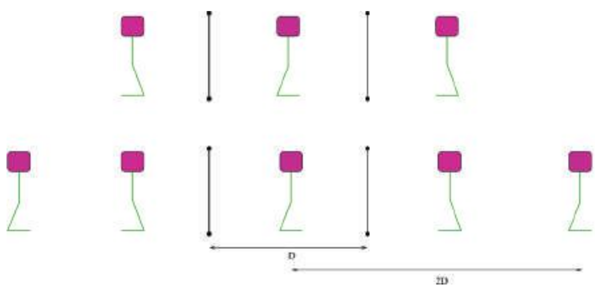
(*) Ce texte est adapté de l'article paru en 2016 sur le site web \Images des Mathématiques" du CNRS.

(**) IRMAR, UMR 6625 du CNRS, Université de Rennes I, 35042 Rennes, France E-mail address: cantat@univ-rennes1.fr

Ainsi, le miroir renvoie une image symétrique des objets qui s'y reflètent, comme s'ils étaient situés au-delà du plan du miroir, les distances entre les objets étant préservées, mais les positions relatives étant inversées ; plus précisément, la symétrie renverse l'orientation ce qu'on observe par exemple sur la figure précédente.

Deux miroirs parallèles

Lorsque deux miroirs se font face, chacun renvoie l'image de l'autre. Un objet situé entre eux étant reflété dans le premier miroir, le second miroir recoit deux images : celle de l'objet, et celle de son reflet dans le premier miroir. Ces deux images sont alors reflétées à leur tour par le second miroir, et ainsi de suite, si bien qu'en fait les miroirs créent à eux deux une infinité de copies de l'objet initial. Bien sûr, les copies paraissent de plus en plus petites car à chaque réflexion la distance apparente est doublée. Vue de dessus, on peut représenter les copies de l'objet observé en prenant garde à leurs orientations et distances respectives :

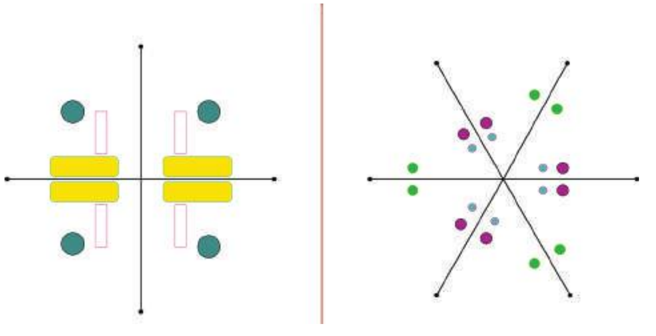


Un objet entre deux miroirs qui se font face donne naissance à deux copies, qui à leur tour donnent naissance à d'autres copies, etc.

Du point de vue mathématique, lorsque l'on compose deux réflexions par rapport à des plans parallèles, le résultat obtenu est une translation dont la direction est orthogonale aux plans et la longueur est le double de la distance D entre ces plans. Un objet situé entre les miroirs apparait alors identique à lui-même, mais translaté à une distance 2D, puis 4D, 6D, etc. À ces copies s'ajoutent des copies symétriques, qui sont situées à distance D, 3D, 5D, etc, lorsque l'objet est à égale distance des deux miroirs.

Deux miroirs accolés

Imaginez maintenant deux miroirs accolés dans l'angle d'une pièce, un sur chaque mur. Ils forment entre eux un angle droit. En les regardant, votre portrait apparaît dans chacun d'entre eux, mais l'image reflétée par le miroir de gauche l'est à nouveau par celui de droite, et vice-versa. Ce sont donc en fait quatre copies qui apparaissent. Si les deux miroirs faisaient un angle de soixante degrés (ou π/3), nous aurions six copies, comme sur les figures suivantes.



À gauche, deux miroirs à angle droit ; à droite, deux miroirs à 60°.

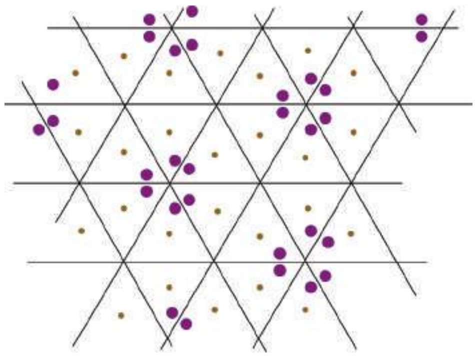
Du point de vue mathématique, la composition des symétries par rapport à deux plans sécants est une rotation autour de la droite d'intersection des plans dont l'angle est le double de l'angle α entre ces plans. Un objet situé entre les miroirs apparait alors identique à lui même, mais tourné d'un angle 2α, puis 4α, 6α, etc. À ces copies s'ajoutent des copies symétriques ; elles sont obtenues en effectuant une première symétrie plane, puis en effectuant ensuite des rotations d'angle 2α, 4α, etc. Pour deux plans qui se coupent à angle droit, la rotation est d'un demi-tour, et l'on observe quatre copies de l'objet, dont deux « retournées » par symétrie. Elle est d'un tiers de tour pour des droites qui forment un angle de soixante degrés, et l'on observe alors six copies. Si les deux droites forment un angle dont la mesure en degrés est irrationnelle, les deux symétries planes engendrent une rotation d'angle irrationnel ; les objets se reflètent alors une infinité de fois.

Ces remarques géométriques correspondent à des relations entre certaines isométries du plan (ou de l'espace), donc à des identités au sein du groupe des déplacements. Ainsi, si ℓ et ℓ' sont deux droites parallèles distinctes, et si s_ℓ et $s_{\ell'}$ sont les symétries orthogonales par rapport à ces droites, alors $s_\ell \circ s_{\ell'} = t_{\mathbf{v}}$ est la translation définie par un vecteur **v** orthogonal à ℓ et de longueur égale au double de la distance entre ℓ et ℓ'. Si les deux droites se coupent en un point p, alors $s_\ell \circ s_{\ell'} = r_{p,2\alpha}$ est la rotation centrée en p dont l'angle est double de celui entre les deux droites.

Trois miroirs : le kaléidoscope classique

Le fonctionnement du kaléidoscope repose sur le même principe, mais avec plus de miroirs. Accolez trois miroirs rectangulaires le long de leurs bords pour obtenir un tube à section triangulaire, en forme de prisme. Nous supposerons ici que les miroirs sont identiques et que la section est un triangle équilatéral ; les angles aux sommets valent donc tous un sixième de tour (π/3, ou 60°).

Placons un objet au centre, entre les miroirs. Les trois miroirs engendrent à nouveau une infinité de copies de l'objet ; le dessin suivant, vu de dessus, décrit leur agencement.



Si vous êtes dans une pièce triangulaire dont les murs sont ainsi tapissés de miroirs, vous observez alors une infinité de copies de la pièce : assis au milieu de la figure précédente, apparaissent face à vous une multitude de copies des objets orange et rose. Bien sûr, les réflexions lointaines apparaissent de plus en plus petites et de moins en moins lumineuses. Le principe du kaléidoscope est identique, à ceci près que l'on ne s'assied pas dans une pièce et qu'il y a plus de verroterie :

Photographie d'une image kaléidoscopique. On distingue la structure triangulaire qui se répète indéfiniment.

Au-delà de trois miroirs : pentagones, hexagones, etc

Si votre kaléidoscope est pentagonal, avec cinq miroirs identiques sur ses faces, la figure parait plus chaotique. C'est que l'angle formé par deux faces consécutives est égal à trois dixièmes de tour. Chaque coin du pentagone donne donc naissance à dix copies du pentagone central qui se chevauchent les unes les autres.

L'image suivante, due à Julia Dessirier[1], illustre ce phénomène.

(1) Voir le site web [http://www.juliadessirier.com/nouveaux-mondes].

Photographie de Julie Dessirier. Trois reflets kaléidoscopiques, l'un pentagonal, l'autre triangulaire, et le dernier hexagonal.

On y voit, en bas de la figure, que les kaléidoscopes à base équilatérale ou hexagonale régulière proposent une image symétrique, la photographie étant « pavée », ou « carrelée », par des copies du triangle ou de l'hexagone central, chacun reflétant une partie de l'immeuble observé (dans cette image, le kaléidoscope hexagonal n'est pas parfaitement symétrique). Cet agencement régulier en pavage n'apparaît pas avec une base pentagonale.

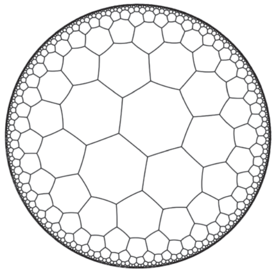
Ceci est lié à l'absence de pavage du plan par des pentagones réguliers ; parmi les polygones réguliers, seuls les triangles, les carrés et les hexagones permettent de paver le plan. Pour s'en convaincre, considérons tout d'abord les polygones réguliers à $n > 7$ côtés. Lorsqu'on accole deux tels polygones le long d'une de leurs arêtes, l'angle laissé libre au voisinage d'un sommet qui touche les deux polygones est trop petit pour venir incruster un troisième pavé : on ne peut donc pas poursuivre le pavage. Pour $n = 5$, un problème similaire apparait : on peut placer trois pentagones autour d'un sommet(2), mais il reste une zone librequi est trop petite pour y placer un quatrième pentagone. Par contre, il existe de nombreux pavages du plan par des copies d'un même pentagone irrégulier(3).

Pavages

La géométrie des kaléidoscopes est ainsi reliée, en germes, à celle des pavages du plan. En géométrie hyperbolique, d'autres pavages sont possibles, par exemples avec des heptagones, comme sur la figure suivante(4). Dans cette géométrie, les distances

(2) seulement deux si les côtés sont recollés de manière décalée.
(3) voir par exemple [http://images.math.cnrs.fr/L-enigme-des-pentagones].
(4) voir aussi [http://images.math.cnrs.fr/Une-chambre-hyperbolique].

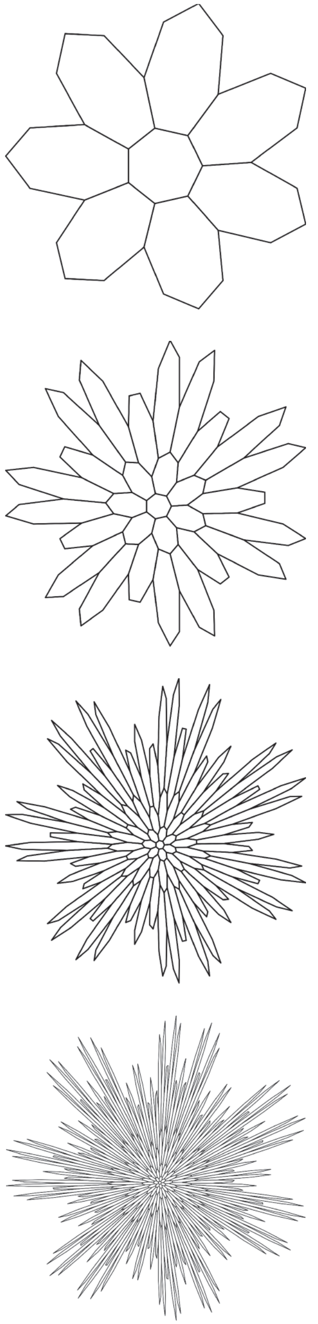
ne sont pas les distances usuelles. Ainsi, sur cette figure, les côtés des heptagones ont-ils tous la même « longueur hyperbolique », même si certains nous paraissent plus petits : c'est juste que la carte du monde hyperbolique qui est utilisée pour représenter ce pavage déforme les distances (de même que les planisphères déforment les distances du globe terrestre).



L'étude des pavages dépend donc de la géométrie envisagée, et la notion de géométrie peut à son tour être modifiée : dans son sens premier, elle permet de mesurer des distances, de comparer des formes. Oublions ces distances, et ne retenons d'un kaléidoscope que les symétries associées à ses faces ; en composant indéfiniment ces symétries entre elles, nous obtenons tout un groupe de transformations du plan (ou de l'espace). D'autres groupes de transformations ne préservant pas les distances peuvent fournir d'élégants pavages ; comprendre l'interaction entre pavages, groupes de transformations et géométries est d'ailleurs un sujet d'actualité … depuis bien longtemps maintenant.

Pour conclure en illustrant cette dernière phrase, voici un pavage du plan par des heptagones qui a été mis au point en 2001 par Yves Benoist(5). Il s'agit d'un pavage par des heptagones réguliers, mais réguliers dans la géométrie affine ! Les tuiles du pavage ne sont pas isométriques : elles se déduisent l'une de l'autre par une transformation affine du plan et sont donc toutes « semblables » à l'heptagone central, mais la notion de similarité envisagée ne préserve pas les distances. Le groupe de symétries est celui des transformations affines ; si les alignements et les proportions sont conservés, angles, distances et aires sont modifiées.

(5) Yves Benoist. Pavages du plan. Journées X-UPS, Mai 2001.



Pavage heptagonal de Y. Benoist. – Les quatre images illustrent comment le pavage est construit de facon itérative, en partant d’un heptagone central régulier puis en collant des hepatgones à sa périphérie. Attention, à chaque