Pour un impôt lisse
Une utopie et une activité au lycée

Marc Roux(*)

Dans la loi actuelle, le calcul de l'impôt sur le revenu correspond à une fonction affine par morceaux. La première section de cet article propose une étude de cette fonction, ainsi que de la fonction « taux global d'imposition ». Dans les sections 2 et 3 nous chercherons comme solution alternative des fonctions « taux global » et « montant de l'impôt » qui soient lisses (c'est-à-dire partout dérivables), et exprimées par une formule unique, la plus simple possible. Enfin la section 4 évoque les conséquences potentielles de l'adoption du modèle proposé en 2. sur le produit de l'impôt.

Les parties en italique et en caractères Arial sont des propositions d'exercices à poser en première ou terminale, dans toute section où on a défini la dérivée et la limite à l'infini d'une fonction (et dès la seconde pour les questions 1.a),, 1.b), 2.a), 2.b), 3.a), 3.b) de la première partie).

Le lecteur est invité à télécharger, sur le site de l'APMEP, le fichier GeoGebra qui a servi à réaliser les figures ci-dessous, et à jouer avec les différents curseurs qu'il contient.

1. État des lieux.

Au moment où j'écris (2016) le barème de l'impôt sur le revenu est le suivant[1] :

- Jusqu'à 9 700 : 0%
- de 9 700 à 26 791 : 14,00%
- de 26 791 à 71 826 : 30,00%
- de 71 826 à 152 108 : 41,00%
- au-delà de 152 108 : 45%

Un exercice plus ou moins classique au lycée est le suivant :

1.1. Soit f la fonction qui, à un revenu de x euros, fait correspondre un montant d'impôt f(x).

a) Exprimer f(x) en fonction de x ; on distinguera 5 cas différents.

b) Représenter la fonction f avec un logiciel de géométrie dynamique.

c) D'après la représentation graphique : f est-elle dérivable en tout point ? Sinon, quels sont les points où elle ne l'est pas ? Étudier le sens de variation de f. Étudier la limite de f en +∞.

d) Démontrer les conjectures faites en c).

1.2. La fonction g représente le taux global d'imposition, en pourcentage :

(*) marc.roux15@wanadoo.fr.

(1) Source : http://www.impots.gouv.fr/portal/dgi/public/popup?espId=1&typePage=cpr02&docOid=documentstandard_7008

$$g(x) = 100 \cdot \frac{f(x)}{x}.$$

a) Donner l'expression de g(x) (on distinguera 5 cas).
b) Représenter g dans la même figure que f.
c) D'après la représentation graphique : g est-elle dérivable en tout point ? Sinon, quels sont les points où elle ne l'est pas ? Étudier le sens de variation de g. Étudier la limite de g en + ∞.
d) Démontrer les conjectures faites en c)

1.3. La fonction r_1 représente le revenu restant après impôt : $r_1(x) = x - f(x)$. Répondre pour r_1 aux mêmes questions a), b), c), d) que pour f et g.

Je laisse au lecteur le soin d'effectuer ces calculs élémentaires. Voici les courbes obtenues avec GeoGebra :

Fig 1a : *une unité représente 10000 €*

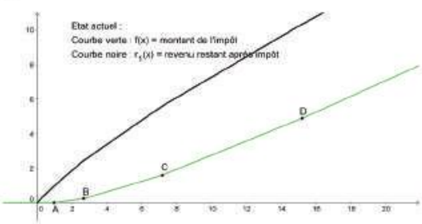
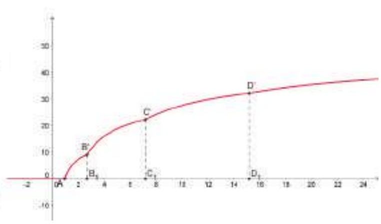


Fig1b : *Taux global d'imposition (état actuel)*



Cet exercice, sans difficulté, est l'occasion de rectifier certaines légendes ou rumeurs, encore propagées par certains, selon lesquelles en passant d'une tranche d'imposition à la tranche supérieure on perdrait de l'argent. Il est aussi l'occasion de bien distinguer le taux d'imposition de la tranche supérieure (taux marginal) d'un taux « maximal » : personne n'est imposé à 45% ! Par contre ce taux est la limite, et la borne supérieure, du taux global d'imposition (les « infiniment riches » seraient imposés à 45%).
S'il n'y a ni discontinuité ni changement de sens de variation pour *g*, sa représentation montre cependant, à chaque changement de tranche, une accélération brutale de la croissance du taux d'imposition, en particulier lorsqu'on dépasse le seuil à partir duquel on est imposable (point A sur la courbe) (effet auquel s'ajoute la perte des avantages divers dont jouissent les personnes non imposables, mais ceci sort de notre sujet). Il me semble donc naturel d'envisager un calcul différent de l'impôt, où le taux serait une fonction « lisse », c'est-à-dire partout dérivable, tout en conservant certaines propriétés de la fonction *g* ci-dessus, à savoir : être nul jusqu'à un certain seuil, que je noterai α ; être majoré par une borne supérieure M, et tendre vers M à l'infini. Cette fonction devrait avoir une expression aussi simple que possible ; c'est l'objet de la deuxième partie.

2. Construction d'une proposition alternative.

On se donne un nombre $\alpha > 0$ et un nombre $M \in [0, 100]$ (α = seuil d'imposabilité, M = borne supérieure du taux d'imposition, en pourcentage). On cherche une fonction h possédant les propriétés suivantes :

h est définie, dérivable et croissante sur $[0, +\infty[$,
h est nulle sur $[0, \alpha]$,
$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \mathrm{M}$.

2.1. Questions préliminaires :

a) Quelle est la valeur de $h(\alpha)$ *? De* $h'(\alpha)$ *?*

b) Expliquer pourquoi une fonction polynôme ne peut pas convenir.

2.2. Pour $x \geq \alpha$*, on cherche une fonction h rationnelle, c'est-à-dire quotient de deux polynômes.*

a) Expliquer pourquoi le numérateur et le dénominateur doivent être de même degré.

b) Expliquer pourquoi ce degré ne peut pas être 1.

c) On cherche h sous la forme d'un quotient de deux polynômes de degré 2*. On suppose que le coefficient de* x^2 *au dénominateur est égal à* 1 *(en effet, si ce n'était pas le cas, on pourrait toujours diviser le numérateur et le dénominateur par ce coefficient). Utiliser 2.a) pour montrer que, (pour* $x \geq \alpha$*), h(x) est nécessairement de la forme* $\dfrac{\mathrm{M}(x-\alpha)^2 + a(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2 + b(x-\alpha) + c}$*, puis que* $a = 0$ *, et donc*

$$h(x) = \frac{\mathrm{M}(x-\alpha)^2}{(x-\alpha)^2 + b(x-\alpha) + c}.$$

d) Expliquer pourquoi c ne peut pas être nul.

e) Inversement, montrer que toute fonction h définie par :

$$\text{Si } 0 \leq x \leq \alpha,\ h(x) = 0;\ \text{Sinon } h(x) = \frac{\mathrm{M}(x-\alpha)^2}{(x-\alpha)^2 + b(x-\alpha) + c}$$

avec $b > 0$ *et* $c > 0$*, vérifie les conditions indiquées.*

2.3. Exploration graphique :

a) Dans un logiciel de géométrie dynamique, dans la même figure que celle de la partie 1, créer 4 curseurs α*,* M*, b, c et la fonction h définie dans 2.e).*

b) Régler les curseurs de façon que la courbe de h soit la plus voisine possible de celle de f.

Fig2a : *de bas en haut : montant de l'impôt, revenu net après impôt, en vert pour l'état actuel, en noir pointillé pour le modèle proposé*

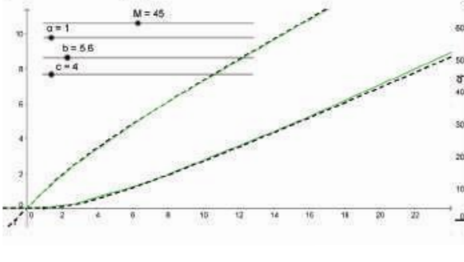
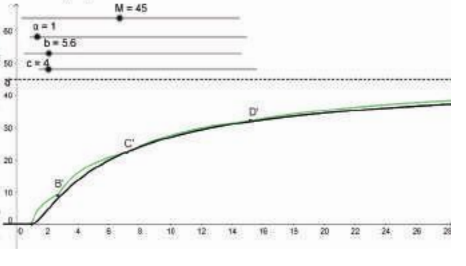


Fig2b : *droite horizontale en pointillés : borne sup taux d'imposition ; taux global : en vert, état actuel ; en noir, modèle proposé*



Dans notre utopie, les décideurs politiques fixeraient au départ les curseurs dans une position voisine de celle-ci, pour éviter un effet de choc ; puis ils les déplaceraient progressivement, d'une façon qui dépendrait de leurs convictions. Ici vient se glisser un paradoxe mathématico-politique : il est clair que déplacer les curseurs α et M vers la droite est une mesure « de gauche » ! En effet il s'agit d'augmenter le seuil d'imposabilité et le taux maximal, donc alléger la contribution des bas revenus, et augmenter celle des hauts revenus. Par curiosité (ou provocation), observons ce qui se passerait si, suivant les idées de certains leaders d'extrême gauche, on optait pour un impôt « confiscatoire », en fixant M à 100% :

c) On note $r(x)$ le revenu restant après impôt : $r(x) = x - x.h(x)$. Représenter r sur la même figure que précédemment.
d) On prend M = 100. *Conjecturer d'après le graphique le sens de variation et la limite à l'infini de la fonction r, puis démontrer ces conjectures ; cette fonction est-elle bornée ? Si oui, déterminer sa borne supérieure.*

On trouvera que r croît strictement et tend vers b. En fixant b à 48 par exemple, même au taux confiscatoire de 100%, plus on gagne, plus le revenu disponible augmente, et celui-ci tend vers 480 000 euros annuels, soit 40 000 € par mois : il reste des riches ! (Fig3)

Fig3a : *montant de l'impôt et revenu net après impôt, en vert pour l'état actuel, en noir pour le modèle proposé*

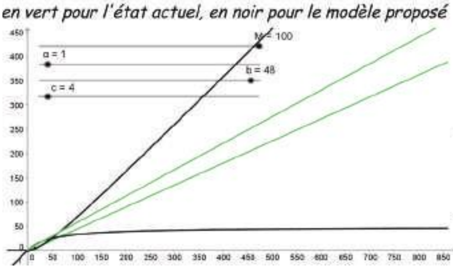
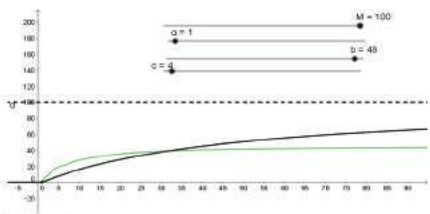


Fig3b : *même légende que Fig2b*



Et si le taux est seulement presque confiscatoire ? Fixons M à 98 et observons (Fig4) : la courbe du revenu restant r semble stagner, mais il est assez évident que $r(x)$ tend vers l'infini avec x, puisque $r > 0{,}02x$; ce que nos élèves nous confirmeront par le calcul. Une occasion de les inciter à se méfier des conclusions hâtives tirées d'observations sans démonstrations.

e) *Mêmes questions qu'en d) avec* M = 98.

Fig4a : *même légende que Fig3a*

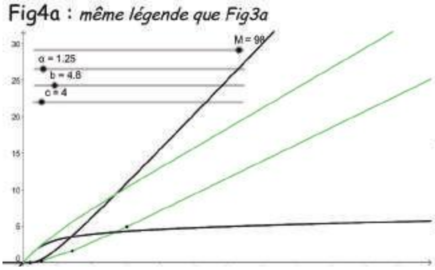
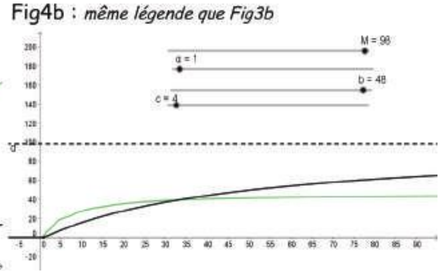


Fig4b : *même légende que Fig3b*



3.

Pour aller plus loin : un autre modèle, plus souple.

Pour disposer de davantage de paramètres à fixer librement, on peut envisager pour *h* un quotient de deux polynômes de degré 3 ; on montrera comme dans 2. que, compte tenu des contraintes, h est alors de la forme :

$$\text{Si } 0 \le x \le \alpha,\ h(x) = 0;\ \text{Sinon } h(x) = \frac{M(x-\alpha)^3 + a(x-\alpha)^2}{(x-\alpha)^3 + b(x-\alpha)^2 + c(x-\alpha) + d}$$

et dépend donc de six paramètres : M, α, *a*, *b*, *c*, *d*. Si on désire (pour une transition en douceur) conserver le taux maximal actuel M = 45, le seuil d'imposition α = 0,97, et les taux d'imposition actuels pour les bornes des tranches d'imposition, on aura à résoudre un système de 4 équations à 4 inconnues : tâche peut-être délicate pour un lycéen actuel, mais qui peut être une occasion d'utiliser un logiciel de calcul formel :

3. On pose $h_1(x) = \dfrac{45(x-0.97)^3 + a(x-0.97)^2}{(x-0.97)^3 + b(x-0.97)^2 + c(x-\alpha)0.97 + d}$ *; on veut déterminer les valeurs de a, b, c, d telles que* h_1 *prend les mêmes valeurs que g aux bornes des tranches d'imposition, c'est-à-dire* 0,97 *;* 2,6791 *;* 7,1826 *;* 15,2108.

a) Traduire ces conditions par un système de quatre équations à quatre inconnues

b) Utiliser un logiciel de calcul formel pour résoudre ce système.

4. Par l'autre bout de la lorgnette.

Il est bon de rappeler que le but de l'impôt n'est pas d'appauvrir les citoyens, mais d'alimenter les caisses de l'état pour pouvoir leur fournir les indispensables services publics. J'aurais aimé exprimer le produit de l'impôt en fonction des différents paramètres ci-dessus. La première difficulté vient du fait que le calcul est fait par foyer fiscal, et non par individu. Un foyer fiscal de revenu R pour *n* parts d'imposition (*n* non nécessairement entier) peut être assimilé à *n* individus ayant chacun un revenu R/*n*. Mais pour faire un calcul crédible, il faudrait disposer de statistiques précises sur la répartition, en fonction des revenus, des parts d'imposition ; or je n'en ai pas trouvé(2). De plus, il faudrait théoriquement tenir compte de multiples abattements, réductions, exonérations et autres « niches fiscales »(3) ; « *l'administration fiscale prend en compte pas moins de 3022 paramètres* »(4)

Pour rester à un degré de complexité abordable par des lycéens, nous nous contenterons d'utiliser le tableau très simplifié suivant, trouvé sur le site de Thomas Piketty(5) (Fig5), et de travailler sur un pays imaginaire de 50 millions

(2) On trouve des statistiques sur les « unités de consommation » (premierer adulte du ménage : 1 unité, autres plus de 14 ans : 0,5 unité, enfants : 0,3 unité) ; ces unités ne correspondent pas aux parts d'imposition.

(3) Entre autres, la déduction des dons aux œuvres et aux associations, dont bénéficient les adhérents à l'APMEP.

(4) Le Canard Enchainé, 11/05/2016.

(5) http://piketty.pse.ens.fr/files/RevenusPatrimoines2010.pdf

d'habitants,ous célibataires sans enfant ni personne à charge, répartis selon les données de Piketty(6).

Fig5 :

La répartition des revenus en France en 2010

Groupe	Nombre de personnes adultes	Revenu annuel par adulte	Revenu mensuel par adulte	Part dans le revenu total
Population totale	50 millions	33 000 €	2 800 €	100%
Classes populaires : Les 50% les plus pauvres	25 millions	18 000 €	1 600 €	27%
Classes moyennes : Les 40% du milieu	20 millions	35 000 €	3 000 €	42%
Classes aisées : Les 10% les plus riches	5 millions	103 000 €	8 600 €	31%
dont classes très aisées : Les 1% les plus riches	0,5 millions	363 000 €	30 300 €	11%
dont classes moyennes-aisées : Les 9% précédents	4,5 millions	73 000 €	6 100 €	20%

Lecture : en 2010, les classes populaires (les 50% les plus pauvres) ont un revenu moyen annuel de 18,000 Euros par adulte (2.800 Euros par mois) et gagnent collectivement 28% du revenu total des ménages, etc.
Source : Voir www.revolution-fiscale.fr, annexe au chapitre 1 (l'estimation de la répartition des revenus permanents est basée sur la répartition au sein de la population de 18 à 65 ans travaillant à au moins 80% du plein temps).
Landais-Piketty-Saez, "Pour une révolution fiscale", Seuil, janvier 2011

4.1 On considère un pays imaginaire dont les 50 000 000 contribuables sont célibataires sans enfant ni personne à charge, ne bénéficiant d'aucune réduction d'impôt, aux revenus conformes à la répartition du tableau, c'est-à-dire :
25 000 000 ont un revenu annuel de 18000 euros
20 000 000 ont un revenu annuel de 35000 euros
4 500 000 ont un revenu annuel de 73000 euros
5 00 000 ont un revenu annuel de 363000 euros
Exprimer P, produit de l'impôt payé par ces 50 000 000 personnes, en utilisant la fonction h

Réponse : $P = 10^6 \times (25 \times 18000 \times h(1,8)/100 + 20 \times 35000 \times h(3,5)/100 + 4,5 \times 73000 \times h(7,3)/100 + 0,5 \times 363000 \times h(36,3)/100)$.

Après simplifications, et exprimé en milliards d'euros, ce produit est :

$$P = 4,5 \times h(1.8) + 7 \times h(3.5) + 3,285 \times h(7,3) + 1,815 \times \mathrm{h}(36,3).$$

Cette expression, entrée dans le fichier GeoGebra, permet d'observer les variations de sa valeur en fonction des différents curseurs.
Commençons par calculer de cette manière l'estimation du produit de l'impôt dans le système actuel :

4.2 Calculer P_0, valeur de P dans le système actuel.
Il suffit de remplacer la fonction h par g :

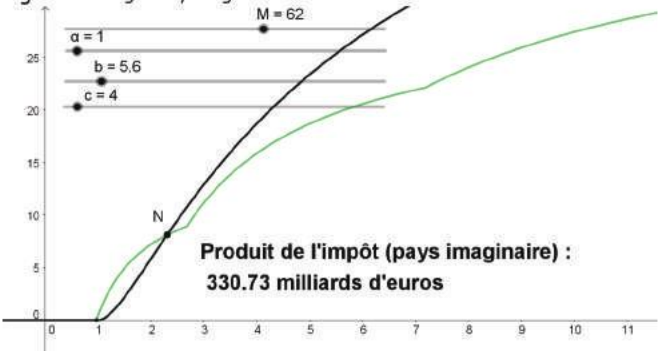
$$P_0 = 4,5 \times g(1.8) + 7 \times g(3.5) + 3,285 \times g(7,3) + 1,815 \times \mathrm{g}(36,3) \approx 272,17.$$

4.3 *Les curseurs* α*, b, c restant réglés selon les résultats de 2.3.b), à savoir* $\alpha = 1$*, b = 5,6, c = 4, quelle doit être la valeur de M (borne sup du taux d'imposition) pour que le produit soit augmenté de 20 % ? Avec ce réglage, à partir de quel revenu le taux réel sera-t-il augmenté ?*

Réponse : on veut avoir $P \geq P_0 \times 1,20 = 273,17 \times 1,2 = 326,6$; cette valeur est dépassée pour M = 62; la courbe de h coupe alors celle de g au point N d'abscisse environ 2,3. (Fig6)

(6) On notera, de la part de Piketty, des approximations grossières pour la correspondance entre revenus annuels et mensuels, et une erreur dans son commentaire ; il faut lire : « … les classes populaires (les 50% les plus pauvres) ont un revenu de 18000 euros par adulte (1600 euros par mois) et gagnent collectivement 27% du revenu total des ménages".

Fig6 : *même légende que Fig3b*



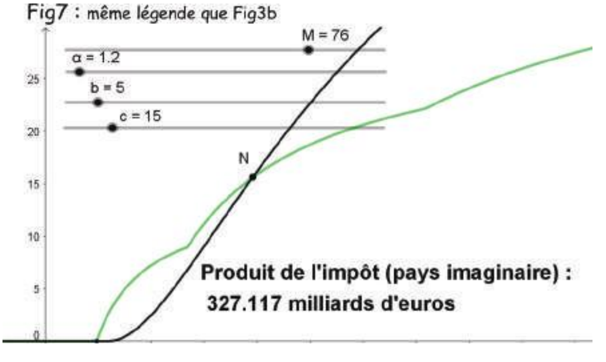
Ce qui signifie que, si le taux maximal est fixé à 62% (taux qui a été dépassé par le passé, et l'est encore dans certains pays), toutes choses égales par ailleurs, le produit de l'impôt augmente de 20%, et l'impôt est en hausse pour les personnes dont le revenu annuel dépasse 23000 €, soit 1917 euros mensuels, en baisse pour les revenus moindres.

On peut juger qu'un tel barème frappe trop les revenus moyens, et chercher un résultat similaire avec des réglages plus favorables à ceux-ci :

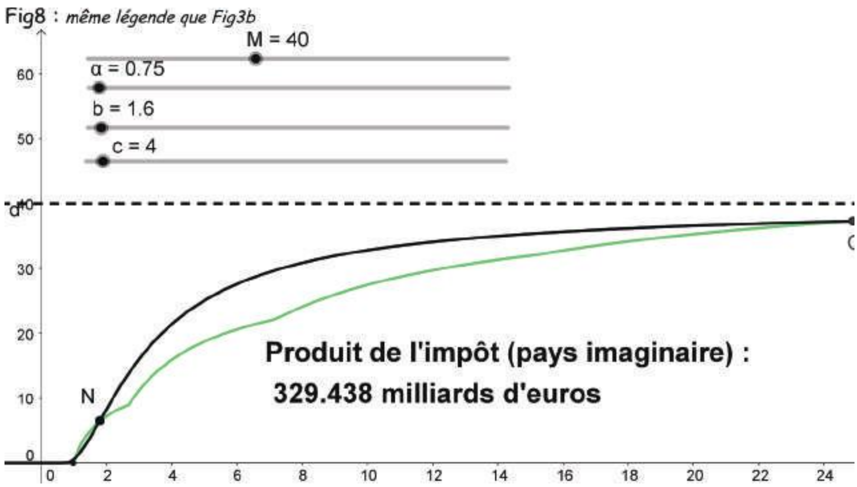
4.4. *Chercher par tâtonnement un réglage des curseurs qui donne un produit supérieur ou égal à* 327 *et tel que l'impôt ne soit augmenté que pour les revenus annuels supérieurs à* 40000 €

Une réponse possible est : M = 76 ; α = 1,2 ; b = 5; c = 15 (Fig 7, où l'abscisse de N est 3,91).

Fig7 : même légende que Fig3b



À l'opposé, on peut vouloir obtenir le même rapport de l'impôt tout en abaissant le taux maximal à 40% : c'est possible, en frappant durement les revenus faibles et moyens ; avec les réglages de la figure 8, l'impôt augmente pour un revenu annuel approximativement compris entre 18000 et 250000 euros (points N et Q), soit entre 1500 et 20833 euros mensuels.



Je suis bien conscient de la distance énorme qu'il y a entre ces calculs extrêmement simplifiés et ceux effectivement faits par le ministère des finances ; cependant je pense que ces quelques exercices pourraient montrer à nos élèves qu'en ce domaine, les hommes politiques ont le choix entre divers moyens d'arriver à un même but, et que ces choix, qui se résument ici à tirer des curseurs vers la droite ou vers la gauche, leurs sont dictés par leur idéologie, et par les groupes de pression (partis, syndicats, organisations patronales, lobbies, …), mais non imposés par l'arithmétique elle-même. Plus généralement ceci montre qu'en politique comme ailleurs, un regard mathématique peut être éclairant.