Les problèmes de l'APMEP

Les propositions de problèmes, solutions ou commentaires, sont à envoyer à

Max HOCHART
13, rue des Garennes
63 800 Cournon d'Auvergne
ou
hochartmax@yahoo.fr

Énoncés des nouveaux problèmes

Problème 519 - 1 (Vincelot Ravoson, Lycée Henri IV, Paris)

Soit a, b, c des réels positifs tels que $ab + bc + ac = 1$. Montrer que

$$abc \geq \frac{1}{12}\left(a+b-|a-b|+2c-\left|a+b-|a-b|+2c\right|\right).$$

Problème 519 - 2 (Michel Lafond, Dijon)

Si S est un entier positif, on note $f(\mathrm{S})$ le plus grand entier égal à un produit de nombres rationnels positifs dont la somme est égale à S.
Ainsi, $f(7) = 12$ car $3 + 4 = 7$ et $3 \times 4 = 12$ et on ne peut pas faire mieux avec d'autres rationnels.
Calculer $f(\mathrm{S})$ pour S = 5, 10, 15, 20.

Problème 519 - 3 (Michel Lafond, Dijon)

Soit $(\mathrm{P}_k)_{1\leq k\leq 7}$ les sept sommets d'un heptagone régulier convexe dans cet ordre. On pose $\mathrm{A} = \mathrm{P}_1$, $\mathrm{B} = \mathrm{P}_2$, $\mathrm{C} = \mathrm{P}_4$. On note A′ le symétrique de A par rapport à (BC), B′ le symétrique de B par rapport à (AC), C′ le symétrique de C par rapport à (AB).

1. Montrer que les triangles (ABC) et (A′B′C′) sont semblables dans une similitude de rapport $\sqrt{2}$.
2. Montrer que le centre I de la similitude est sur le cercle circonscrit à l'heptagone, et déterminer ses coordonnées exactes.
3. Démontrer que l'angle de la similitude vaut $\arctan\left(\sqrt{7}\right)$.

Solutions des problèmes antérieurs

Problème 508-1

On considère une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui envoie tout segment de $\mathbb{R}$ sur un segment de même longueur. Trouver f.

Solutions de Michel Bataille (Rouen), Pierre Cornilleau (Orléans), Raymond Heitz (Lavergne), Alain Perron (Clelles), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques).

Cet énoncé a été donné à l'oral de Polytechnique il y a quelques années. Il m'a été communiqué par **Fernand Canonico** que je remercie. Voici la solution de **Pierre Cornilleau**. On montre d'abord que l'application f est 1-lipschitzienne, donc continue. Si (a,b) est un couple de réels tel que $a \leq b$, $f([a,b])$ est par hypothèse un segment $[m,\mathrm{M}]$ de même longueur que le segment $[a,b]$. Mais ce segment contient $f(a)$ et $f(b)$. Donc

$$\left|f(b)-f(a)\right| \leq \mathrm{M}-m=b-a,$$

ce qui conclut, quitte à échanger les rôles de a et b.
On en déduit alors que f est une isométrie. En effet, avec les notations de ci-dessus, il existe c, $d \in [a,b]$ tels que $\mathrm{M} = f(c)$ et $m = f(d)$. Alors

$$\left|b-a\right| = \mathrm{M}-m=\left|f(d)-f(c)\right| \leq \left|d-c\right| \leq \left|b-a\right|,$$

puisque le segment $[c,d]$ (ou $[d,c]$) est contenu dans $[a,b]$. Ceci impose que $\{a,b\} = \{c,d\}$ et donc $\left|f(b)-f(a)\right| = \left|b-a\right|$ pour tous réels a et b.
Une isométrie étant continue et injective, est monotone. Quitte à remplacer f par son opposée (qui vérifie toujours l'hypothèse de l'énoncé) et lui ajouter une constante (ce qui ne change rien non plus), on peut la supposer croissante et nulle en 0. En particulier, en notant L(S) la longueur d'un segment S, si est un réel positif, on a alors

$$x=\mathrm{L}\left(\left[0,x\right]\right)=\mathrm{L}\left(f\left(\left[0,x\right]\right)\right)=\mathrm{L}\left(\left[0,f(x)\right]\right)=f(x).$$

On montre identiquement que $f(x) = x$ si x est un réel négatif.
Finalement, les fonctions cherchées sont de la forme $x \mapsto x + \mathrm{C}$ et $x \mapsto -x + \mathrm{C}$ où C est un réel quelconque.

Problème 508-3 (Ayoub Bourich, école Centrale de Lyon)

Trouver tous les nombres premiers p tels qu'il existe une matrice A de taille 2×2, à coefficients dans $\mathbb{Z}$, telle que

$$\mathrm{A}+\mathrm{A}^2+\cdots \mathrm{A}^p = p\mathrm{I}_2 \quad \textit{et} \quad \mathrm{A} \neq \mathrm{I}_2.$$

Solutions de Michel Bataille (Rouen), Jean-Claude Carréga (Lyon), Pierre Cornilleau (Orléans), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques).

Voici la solution de **Michel Bataille**. Une telle matrice existe si et seulement si $p = 2$ ou 3.

Pour $p = 2$, la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ convient facilement :

$$\mathrm{A}+\mathrm{A}^2 = 2\mathrm{I}_2.$$

Pour $p = 3$, un calcul montre que la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ vérifie

$$A + A^2 + A^3 = 3I_2.$$

Soit désormais p un nombre premier avec $p > 3$ et soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ satisfaisant

$$A + A^2 + \cdots A^p = pI_2.$$

On va montrer que $A = I_2$. Soit P le polynôme $X^p + X^{p-1} + \cdots + X^2 + X - p$. Ce polynôme annule A et se factorise sous la forme $P = (X - 1)S$ où S est le polynôme $X^{p-1} + 2X^{p-2} + 3X^{p-3} + \cdots + (p-1)X + p$. Admettons pour le moment que S soit irréductible sur $\mathbb{Q}$. Alors, $P = (X - 1)\,S$ est la décomposition de P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$. Soit $M \in \mathbb{Q}[X]$ le polynôme minimal de A. Comme A est une matrice de taille 2, M est unitaire de degré un ou deux. Mais comme P annule A, le polynôme M est un diviseur de P dans $\mathbb{Q}[X]$. Au vu de la décomposition en facteurs irréductibles de P et comme S est de degré $p - 1 > 2$, on a $M = X - 1$. Donc $A = I_2$.
Il reste à montrer l'irréductibilité de S dans $\mathbb{Q}[X]$. Comme S est unitaire et appartient à $\mathbb{Z}[X]$, cela revient à montrer que S est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$. On commence par remarquer que si z est une racine complexe de S, alors

$$z \neq 1 \quad \text{et} \quad |z| \geq 1. \tag{1}$$

En effet, $S(1) \neq 0$ donc $z \neq 1$. Et si $|z| < 1$, comme $S(z) = 0$, on a aussi $P(z) = 0$ donc

$$p = \left|z + \cdots + z^p\right| \leq \left|z\right| + \cdots + \left|z^p\right| < p,$$

contradiction.
Maintenant, supposons que S s'écrive $S = UV$ avec $U, V \in \mathbb{Z}[X]$, unitaires, de degré au moins 1. Alors $S(0) = U(0)V(0) = p$. Mais p est premier et cette égalité a lieu dans $\mathbb{Z}$. Donc $|U(0)| = 1$ ou $|V(0)| = 1$, disons $|U(0)| = 1$.
Notons $z_1, \ldots, z_k$ les racines complexes de U. Alors

$$\left|z_1\right| \cdots \left|z_k\right| = \left|z_1 \cdots z_k\right| = \left|U(0)\right| = 1.$$

Mais les complexes $z_1, \ldots, z_k$ étant aussi racines de S doivent vérifier $|z_i| \geq 1$ et $z_i \neq 1$ pour tout $i \in [1, k]$ d'après (1). Donc

$$\left|z_1\right| = \left|z_2\right| = \cdots \left|z_k\right| = 1.$$

Or z_1 ($\neq 1$) est également racine de

$$(X-1)^2 S = (X-1)\left(X^p + \cdots + X^2 + X - p\right) = X^{p+1} - (p+1)X + p.$$

Ceci est impossible. En effet, en posant $z_1 = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]0, 2\pi[$,

$$\left|z_1-\frac{p}{p+1}\right|^2-\frac{1}{(p+1)^2}=\left(\cos\theta-\frac{p}{p+1}\right)^2+\sin^2\theta-\frac{1}{(p+1)^2}$$
$$=\frac{2p}{p+1}(1-\cos\theta)>0,$$

d'où la contradiction. Donc S est bien irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Problème 509-1

Soit f, g : $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que la fonction

$$(x,y)\mapsto\frac{f(x)g(y)}{x+y}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et trouver la meilleure constante C > 0 telle que

$$\iint_{]0,+\infty[\times]0,+\infty[}\frac{f(x)g(y)}{x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\le \mathrm{C}\sqrt{\int_{]0,+\infty[}f(x)^2\,\mathrm{d}x}\sqrt{\int_{]0,+\infty[}g(y)^2\,\mathrm{d}y}.$$

Aucune solution recue ; commentaires de Moubinool Omarjee (Lycée Henri IV) et Lazare-Georges Vidiani (Fontaine Les Dijon)

Le problème a visiblement semblé difficile aux lecteurs. Voici donc une solution, il est vrai assez astucieuse. On fixes deux réels ε et A tels que $0<\varepsilon<\mathrm{A}$. Alors

$$\iint_{]\varepsilon,\mathrm{A}[^2}\left|\frac{f(x)g(y)}{x+y}\right|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{]\varepsilon,\mathrm{A}[^2}\frac{|f(x)|}{\sqrt{x+y}}\sqrt[4]{\frac{x}{y}}\,\frac{|g(y)|}{\sqrt{x+y}}\sqrt[4]{\frac{y}{x}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

L'inégalité de Cauchy Schwarz sur $\mathrm{L}^2([\varepsilon,\mathrm{A}],\mathrm{C})$ montre que

$$\left(\iint_{]\varepsilon,\mathrm{A}[^2}\left|\frac{f(x)g(y)}{x+y}\right|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^2$$

est majorée par

$$\iint_{]\varepsilon,\mathrm{A}[^2}|f(x)|^2\left|\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}\,(x+y)}\right|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\times\iint_{]\varepsilon,\mathrm{A}[^2}|g(y)|^2\left|\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}\,(x+y)}\right|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Or

$$\int_\varepsilon^{\mathrm{A}}\left|\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}\,(x+y)}\right|\mathrm{d}y\le\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}\,(x+y)}\right|\mathrm{d}y$$

où dans cette inégalité, la seconde intégrale converge. Le changement de variable $y=t^2$ donne

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}\,(x+y)} \right| \mathrm{d}y = \sqrt{x} \int_0^{+\infty} \left| \frac{2}{x+t^2} \right| \mathrm{d}t = \pi.$$

Donc

$$\left(\iint_{]\varepsilon,\mathrm{A}[^2} \left| \frac{f(x)g(y)}{x+y} \right| \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right)^2 \leq \pi^2 \int_\varepsilon^{\mathrm{A}} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x \int_\varepsilon^{\mathrm{A}} |g(y)|^2\,\mathrm{d}y.$$

On a le résultat en faisant tendre ε vers 0 et A vers $+\infty$.

Lazare-Georges Vidiani donne des références, en particulier pour la version discrète de cette inégalité (due à **Hilbert**) et **Moubinool Omarjee** mentionne la majoration suivante : pour des exposants $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et des fonctions $f \in \mathcal{L}^p(]0,+\infty[,\mathbb{R}^+)$ et $g \in \mathcal{L}^q(]0,+\infty[,\mathbb{R}^+)$, on a

$$\iint_{]0,+\infty[^2} \left| \frac{f(x)g(y)}{x+y} \right| \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)} \|f\|_p \|g\|_q .$$

Le cas traité ici correspond au choix $p = q = 2$.

Problème 509-2 (Michel Lafond)

On appelle couple moyen tout couple d'entiers naturels (a,b) avec $0 < a < b$ tels que leur moyenne arithmétique $m = \frac{a+b}{2}$, leur moyenne géométrique $g = \sqrt{ab}$ et leur moyenne harmonique $h = \frac{2ab}{a+b}$ soient des entiers naturels. Par exemple, (a,b) = (10,40) est un couple moyen puisque

$$m = 25,\ g = 20,\ h = 16.$$

(1) Trouver tous les couples moyens.
(2) Montrer que si (a,b) est un couple moyen dont les moyennes valent m, g, h, alors $(m - g, m + g)$ est un couple moyen.
(3) Si (a,b) est un couple moyen, la moyenne quadratique $q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ peut- elle être entière ?

Solutions de Michel Bataille (Rouen), Hélène Brion (Clamart), Richard Beczkowski (Chalon sur Saône), Jean-Claude Carréga (Lyon), Jean-Pierre Friedelmeyer (Strasbourg), Michel Lafond (Dijon), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Vincent Thill (Migennes), Daniel Vacaru (Pitesti, Roumanie)

Voici la solution d'**Hélène Brion**. Soit a et b deux entiers tels que $0 < a < b$. On pose

$$m=\frac{a+b}{2}\,,\ d=\frac{b-a}{2}\,,\ g=\sqrt{ab}\,,\ h=\frac{2ab}{a+b}\ \text{ et } q=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\,.$$

On a alors

$$a = m - d,\ b = m + d,\ g=\sqrt{m^2-d^2}\,,\ h=\frac{g^2}{m}\ \text{ et } q=\sqrt{m^2+d^2}\,.$$

(1) On commence par trouver tous les couples d'entiers a et b tels que m, g et h soient entiers. Le couple (a,b) est un couple moyen si et seulement si m, d, g et h sont entiers non nuls. Soit $k = m \wedge d$. On pose alors

$$m = km_1 \text{ et } d = kd_1 \text{ avec } m_1 \wedge d_1 = 1.$$

Alors

$$g = kg_1 \text{ avec } g_1=\sqrt{m_1^{\,2}-d_1^{\,2}} \text{ et } h_1=\frac{kg_1^{\,2}}{m_1}\,.$$

La racine d'un entier est rationnel si et seulement l'entier est un carré parfait. Donc le réel g est entier si et seulement g_1 est entier. Et g_1 est entier si et seulement si (g_1,d_1,m_1) est un triplet pythagoricien primitif c'est-à-dire si et seulement si il existe deux entiers u et v tels que

$$0 < u < v,\ u \wedge v = 1 \text{ et } uv \in 2\mathbb{Z}$$

et

$$m_1 = u^2 + v^2$$

et

$$\begin{cases} d_1 = 2uv \\ g_1 = v^2-u^2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} g_1 = 2uv \\ d_1 = v^2-u^2 \end{cases}.$$

Le réel h est entier si et seulement si m_1 divise $kg_1^{\,2}$. Comme $g_1 \wedge m_1 = 1$, h est entier si et seulement si m_1 divise k c'est-à-dire $k = \lambda m_1$ où λ est un entier non nul.
En conclusion, le couple (a,b) est un couple moyen si et seulement si il existe trois entiers non nuls λ, u et v avec $0 < u < v$, $u \wedge v = 1$, $uv \in 2\mathbb{Z}$ tels que $a = m_1(m_1 - d_1)$ et $b = m_1(m_1 + d_1)$ où $m_1 = u^2 + v^2$ et $d_1 = 2uv$ ou $v^2 - u^2$.

(2) On montre que si (a,b) est moyen alors $(m - g, m + g)$ est aussi moyen. Puisque (a,b) est moyen (avec $0 < a < b$), les moyennes g et m sont entiers. Les nombres a et b étant différents, leur moyenne géométrique est toujours strictement inférieure à leur moyenne arithmétique : $0 < g < m$ donc $0 < m - g < m + g$. Donc

- la moyenne arithmétique de $m - g$ et $m + g$ vaut m, qui est un entier ;
- la moyenne géométrique de $m - g$ et $m + g$ est $\sqrt{m^2-g^2}=\sqrt{d^2}=d$, qui est un entier ;
- la moyenne harmonique de $m - g$ et $m + g$ est $\dfrac{m^2-g^2}{m}=m-h$, également entier.

Donc le couple $(m - g, m + g)$ est bien un couple moyen.

(3) On montre que si (a,b) est un couple moyen, alors la moyenne quadratique q ne peut jamais être entière. Si (a,b) était un couple moyen avec q entier, on aurait des solutions entières au système

$$\begin{cases} g^2 = m^2 - d^2 \\ q^2 = m^2 + d^2 \end{cases}.$$

Par différence on aurait $q^2 - g^2 = 2d^2$, soit encore $\frac{1}{2}(q-g)(q+g) = d^2$ et par somme, on aurait $q^2 + g^2 = 2m^2$, soit encore

$$(q-g)^2 + (q+g)^2 = 2q^2 + 2g^2 = 4m^2.$$

Le triangle de côtés $(q - g, q + g, 2m)$ serait rectangle de côtés entiers et d'aire égale à un carré. Or on sait depuis **Fermat** (commentaire 45 de **Diophante**) qu'un tel rectangle n'existe pas. Ainsi, si (a,b) est un couple moyen, q ne peut donc pas être entier.

Hélène Brion termine sa contribution en rappelant que la démonstration de cette non-existence fait appel à une descente infinie. On peut se limiter aux triangles primitifs (si le triangle n'est pas primitif, on peut diviser tous les côtés par le diviseur commun, son aire restera un carré). On suppose donc qu'il existe trois entiers non nuls (x,y,z) tels que $x \wedge y = 1$ et vérifiant : $x^2 + y^2 = z^2$ et $\frac{1}{2}xy$ est un carré

Puisque $x \wedge y = 1$ et que $\frac{1}{2}xy$ est un carré, l'un des nombres, x par exemple, est le double d'un carré ($x = 2s^2$) et l'autre est le carré d'un nombre impair ($y = t^2$).
Comme d'autre part, (x,y,z) est un triplet primitif, il existe deux entiers u et v, $0 < u < v$ et $u \wedge v = 1$ tels que

$$\begin{cases} z = u^2 + v^2 \\ x = 2s^2 = 2uv \\ y = t^2 = v^2 - u^2 \end{cases}$$

Comme $s^2 = uv$ et $u \wedge v = 1$, u et v sont des carrés : $u = u_1{}^2$ et $v = v_1{}^2$. Comme $t^2 + u^2 = v^2$ avec $u \wedge v = 1$ et t impair, (t,u,v) est un triplet pythagoricien primitif et il existe deux entiers x_1 et y_1, $x_1 \wedge y_1 = 1$, tels que $v = x_1{}^2 + y_1{}^2$ et $u = 2x_1y_1$. Or $v = v_1{}^2$ donc $x_1{}^2 + y_1{}^2 = v_1{}^2$ et u étant un carré pair, $\frac{1}{2}x_1y_1$ est un carré. On a donc trouvé un triangle rectangle primitif de côtés entiers (x_1,y_1,v_1) dont l'aire est un carré et dont l'hypoténuse v_1 vérifie $v_1 \leq v < z$.
Ceci est l'amorce d'une descente infinie qui prouve qu'il n'existe pas de triangle rectangle à côtés entiers dont l'aire soit un carré.