Exercices de ci de là

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire.

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer par mél à :

bruno.alaplantive@free.fr

ou par courrier à :

Bruno Alaplantive
Bordeneuve
chemin de Tardibail
09100 Saint Jean du Falga

Pour l'envoi des propositions et des solutions, privilégiez, si possible, le courrier électronique. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial une copie au format PDF pour contrôler en particulier les formules qui sont souvent perturbées d'un logiciel à l'autre. Vous faciliterez ainsi notre tâche. Merci d'avance.

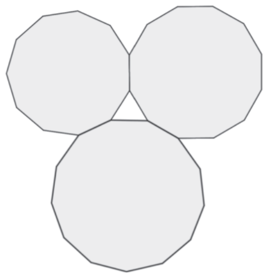
Exercices

Exercice 520–1 *Pour nos élèves*

Propositions transmises par Paul-Alain Bonvert – Alfa du Ginseng

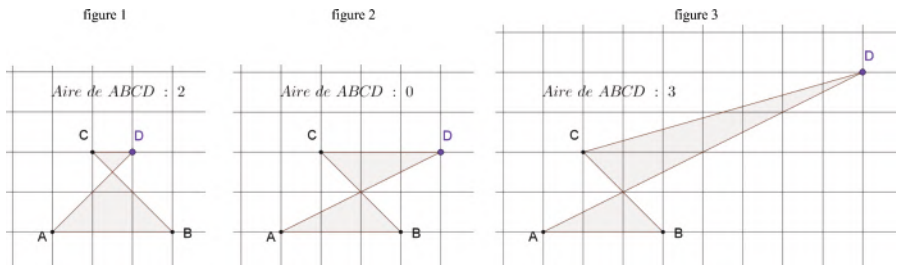
A – *Vrai ou faux ?*

Dans la figure ci-contre, les polygones sont réguliers



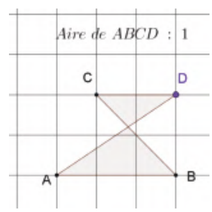
B – *Aire d'un quadrilatère croisé et GeoGebra.*

Dans chacun des trois exemples suivants le logiciel GeoGebra fournit la valeur de l'aire de ABCD (l'unité d'aire est le carreau).



a) Quelle définition probable de l'aire d'un quadrilatère croisé est adoptée par GeoGebra ?

b) La vérifier pour la figure ci-contre.



c) Les sommets A, B et C étant fixés comme sur ces figures, quel est le lieu du quatrième sommet D tel que ABCD est un quadrilatère croisé d'aire égale à 1 ?

Exercice 520–2 *pioché de-ci, de-là : Renversant !*
Le renversé de 34 est 43, celui de 127 est 721.
Trouver tous les entiers naturels non palindrome et ne se terminant pas par 0 tels que le carré du renversé est égal au renversé du carré.

Exercice 520–3 Michel Lafond – Dijon *Le cube*.
Un cube est posé sur un plan horizontal en contact avec un de ses sommets.
Les distances des 8 sommets au plan sont $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ cm.
Quel est le côté du cube ?

Exercice 520–4 *pioché de-ci, de-là : La preuve par 9*.
u_0 et u_1 sont deux réels quelconques.
On considère la suite (u_n), $n \in \mathbb{N}$ définie par la relation $u_{n+2} = |u_{n+1}| - u_n$.

Montrer que (u_n) est périodique de période 9.

Solutions

Remarques préliminaires.

- Certaines résolutions me parviennent après le bouclage du numéro dans lequel il en est normalement fait mention. Leurs auteurs ne sont alors pas nommés. Il m'arrive par ailleurs de mélanger quelque peu les noms et les exercices résolus … Je prie donc les personnes concernées de bien vouloir m'en excuser et aussi de ne pas hésiter à me le faire savoir puisque selon le proverbe latin « *Errare humanum est, perseverare diabolicum* ».
- Jean Couzineau poursuit plus avant recherche et nomenclature exhaustive des 17 droites – 101 points de l'exercice 515-2. J'en ferai état dans le prochain numéro du BV. Son œil de lynx a repéré deux erreurs dans les configurations parues au BV 517. Erreurs qu'il me faut assumer puisque l'une provient de ma propre

proposition …, quand l'autre est due au fait que j'ai fort mal exécuté le programme de construction de la solution indiquée par Raymond Heitz !
Les figures interactives corrigées sont disponibles sur :
https://www.geogebra.org/m/VmpbebaW et
https://www.geogebra.org/m/QwCQq8FS.

Exercice 517–3 Jean-Christuphe Laugier – Rochefort *Dénombrement et application*

Dénombrer les applications $f : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$, X ensemble fini de cardinal égal à n ($n \geq 1$), telles que :

1. Pour un élément a donné de X, $f \circ f(x) = a$ pour tout x de X.
2. Pour un sous ensemble B de X, non vide, de cardinal p, $f \circ f(x) \in \mathrm{B}$ pour tout x de X.

La solution de la question 1 est parue dans le numéro précédent.

– Voici la solution de Pierre Renfer pour la question 2.
On suppose que $(f \circ f)(\mathrm{X}) = \mathrm{B}$, c'est-à-dire que tout élément de B admet au moins un antécédent par $f \circ f$ dans X.

Pour la partie B, C_n^p choix sont possibles.

Soit $\mathrm{A} = f^{-1}(\mathrm{B})$ l'image réciproque de B par $\boldsymbol{f}$.
L'ensemble A contient l'ensemble B, car tout élément b de B possède un antécédent d par $f \circ f$, donc un antécédent $c = f(d)$ par f.

Et alors : $f(b) = (f \circ f)(c) \in \mathrm{B}$.

L'ensemble A contient aussi $\mathrm{C} = f(\mathrm{X} - \mathrm{A})$ et les parties X – A, C et B sont disjointes.
La restriction de f à X – A est une surjection de X – A sur C.

La restriction de f à $\mathrm{B} \cup \mathrm{C}$ doit être une surjection de $\mathrm{B} \cup \mathrm{C}$ sur B.
Car tout élément b de B possède un antécédent d par $f \circ f$, donc un antécédent $c = f(d)$ par f.

Si $d \in \mathrm{A}$, alors $b - f(c) \in f(\mathrm{B})$ et si $d \in \mathrm{X} - \mathrm{A}$, alors $b - f(c) \in f(\mathrm{C})$.

Soit $\mathrm{S}_{n,k}$ le nombre de surjections d'un ensemble de cardinal n sur un ensemble de cardinal k.

Par convention on pose : $\begin{cases} \mathrm{S}_{n,0} = 0 \text{ si } n \neq 0 \\ \mathrm{S}_{n,0} = 0 \text{ si } k \neq 0 \\ \mathrm{S}_{0,0} = 0 \end{cases}$

Soit u le cardinal de X – A et v celui de C. Alors $v \leq u$ et $u + v \leq n - p$.

Pour la partie X – A, C_{n-p}^u choix sont possibles.

Pour la partie C, C^u_{n-p-u} choix sont possibles.

Pour les restrictions de f à X – A, à $B \cup C$ et à $A - B \cup C$, les nombres de choix sont respectivement : $S_{u,v}$, $S_{p+v,p}$ et $p^{n-p-u+v}$.
Soit I l'ensemble des couples d'indices (u,v) tels que : $u = v = 0$ ou
Le nombre de possibilités N pour f est :

$$N = C_n^p \cdot \sum_{(u,v)\in I}^{n} C^u_{n-p} \cdot C^v_{n-p+u} \cdot S_{u,v} \cdot S_{p+v,p} \cdot p^{n-p-u-v}.$$

Le terme correspondant à $u = v = 0$ est égal à $p!\, p^{n-p}$.
Donc :

$$N = C_n^p \cdot \left(p!\, p^{np} + \sum_{\substack{1 \le v \le u \\ u+v \le np}}^{n} C^u_{n-p} \cdot C^v_{n-p+u} \cdot S_{u,v} \cdot S_{p+v,p} \cdot p^{n-p-u-v} \right)$$

Annexe : Le nombre de surjections

On rappelle que les nombres $S_{n,k}$ vérifient la relation de récurrence suivante :

$S_{n,k} = k \cdot \left(S_{n-1,k} + S_{n-1,k-1}\right)$ si $n > k \geq 2$, avec les conditions au bord : $\begin{cases} S_{n,n} = n! \\ S_{n,1} = 1 \end{cases}$.

En effet pour une surjection f d'un ensemble A, de cardinal n, sur un ensemble B, de cardinal k, on commence par choisir comme image d'un élément fixé a de A, l'un des k éléments de B.
Ou bien cette image possède au moins un autre antécédent que a et pour la restriction de f à A – $\{a\}$, $S_{n-1,k}$ choix sont possibles.
Ou bien cette image ne possède que a comme antécédent et pour la restriction de f à A – $\{a\}$, $S_{n-1,k-1}$ choix sont possibles.

Un exemple de calcul.

On choisit l'exemple : X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} et B = {1, 2}, $n = 7$, $p = 2$.
On va parcourir les cas pour les couples d'indices (u,v) et calculer le terme $T_{u,v}$ correspondant dans la somme de la formule de N.
Dans chaque cas, on donnera un exemple d'application f en donnant dans la deuxième ligne les images par f des éléments au-dessus dans la première ligne.
On aura besoin des nombres $S_{3,2}$ et $S_{4,2}$:

$$S_{3,2} = 2 \cdot \left(S_{2,2} + S_{2,1}\right) = 2 \cdot (2+1) = 6 \text{ et } S_{4,2} = 2 \cdot \left(S_{3,2} + S_{3,1}\right) = 2 \cdot (6+1) = 14.$$

a) cas $\begin{cases} v = 0 \\ u = 0 \end{cases}$

$T_{0,0} = 2 \cdot 2^5 = 64$

Exemple pour f : $\begin{matrix} 1&2&3&4&5&6&7 \\ 1&2&1&1&1&1&1 \end{matrix}$

$A = X \qquad C = \varnothing$

c) cas $\begin{cases} v = 1 \\ u = 2 \end{cases}$

$T_{2,1} = C_5^2 \cdot C_3^1 \cdot S_{2,1} \cdot S_{3,2} \cdot 2^2 = 720$

Exemple pour f : $\begin{matrix} 1&2&3&4&5&6&7 \\ 1&1&1&1&2&5&5 \end{matrix}$

$A = \{1,2,3,4,5\} \qquad C = \{5\}$

e) cas $\begin{cases} v = 1 \\ u = 4 \end{cases}$

$T_{4,1} = C_5^4 \cdot C_3^1 \cdot S_{4,1} \cdot S_{3,2} = 30$

Exemple pour f : $\begin{matrix} 1&2&3&4&5&6&7 \\ 1&1&2&3&3&3&3 \end{matrix}$

$A = \{1,2,3\} \qquad C = \{3\}$

b) cas $\begin{cases} v = 1 \\ u = 1 \end{cases}$

$T_{1,1} = C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot S_{1,1} \cdot S_{5,2} \cdot 2^3 = 64$

Exemple pour f : $\begin{matrix} 1&2&3&4&5&6&7 \\ 1&1&1&1&1&2&6 \end{matrix}$

$A = \{1,2,3,4,5,6\} \qquad C = \{6\}$

d) cas $\begin{cases} v = 1 \\ u = 3 \end{cases}$

$T_{3,1} = C_5^3 \cdot C_2^1 \cdot S_{5,1} \cdot S_{5,2} \cdot 2^2 = 240$

Exemple pour f : $\begin{matrix} 1&2&3&4&5&6&7 \\ 1&1&1&2&4&4&4 \end{matrix}$

$A = \{1,2,3,4\} \qquad C = \{4\}$

f) cas $\begin{cases} v = 2 \\ u = 2 \end{cases}$

$T_{2,2} = C_5^2 \cdot C_3^2 \cdot S_{2,2} \cdot S_{4,2} \cdot 2 = 1680$

Exemple pour f : $\begin{matrix} 1&2&3&4&5&6&7 \\ 1&1&1&2&2&4&5 \end{matrix}$

$A = \{1,2,3,4,5\} \qquad C = \{4,5\}$

g) cas $\begin{cases} v = 2 \\ u = 3 \end{cases}$

$T_{3,2} = C_5^3 \cdot C_2^2 \cdot S_{5,1} \cdot S_{3,2} \cdot S_{4,2} = 840$

Exemple pour f : $\begin{matrix} 1&2&3&4&5&6&7 \\ 1&1&1&2&3&4&4 \end{matrix}$

$A = \{1,2,3,4\} \qquad C = \{3,4\}$

Exercice 518 – 1 Jean-Christophe Laugier – Rochefort

On numérote au hasard de 1 à 8 les sommets d'un cube. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas deux sommets adjacents portant des numéros consécutifs (1 et 8 sont considérés ici consécutifs) ?

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Bernard Collignon (Coursan), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Jean Couzineau (Massy-Palaiseau).

– Voici la solution de Jean Couzineau.

On modélise les huit sommets du cube par un 8-uplet contenant tous les nombres de 1 à 8. Il y a 8 ! = 8 × 7 × 6 × 5 × 4 × 3 × 2 × 1 = 40 320 configurations possibles (8 choix pour le premier sommet, 7 pour le second, …).
On identifie chaque position d'un nombre dans le 8-uplet à la position de ce nombre sur un des sommets du cube. Par exemple, si le cube est posé au sol, la face du bas contient les positions 1, 2, 3 et 4 du 8-uplet et celle du haut 5, 6, 7, et 8. Le sommet numéro 5 étant au dessus du numéro 1, la numérotation en bas et en haut se faisant en tournant dans le même sens.
Il faut tester si chacune des 12 arêtes du cube relie deux nombres consécutifs. C'est-à-dire, avec a et b deux nombres entre 1 et 8, si $|b-a|=1$ = 1 (ou $|b-a|=1$ = 7 pour les nombres 1 et 8). N'ayant trouvé aucun raisonnement satisfaisant, j'écris lâchement sur Python un programme qui me donne 480 configurations sans sommets consécutifs.

La probabilité cherchée est donc $p=\dfrac{480}{40320}=\dfrac{1}{84}$.

Remarques.

Bernard Collignon ayant lui-même utilisé un programme fait le commentaire suivant : « Cette solution peut paraître incomplète ou risquée. En effet, elle fait confiance totalement à l'ordinateur et suppose en outre qu'il n'y a pas d'erreur dans l'algorithme ni dans le programme. » Il indique avoir donc fait des tests partiels pour vérifier la cohérence.

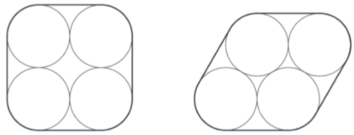
Marie Nicole Gras et Pierre Renfer ont dénombré « à l'ancienne », obtenant respectivement
$p=\dfrac{60\times 8}{40320}=\dfrac{1}{84}$ après le dénombrement de 60 cas ;
et $p=\dfrac{10}{840}=\dfrac{1}{84}$ en ayant tout d'abord réduit le cardinal de l'univers Ω en considérant les classes de cubes (aux sommets numérotés) sous l'action du groupe des 48 isométries du cube avant de dénombrer 10 cas.
Leurs solutions sont disponibles sur le site de l'association.

Exercice 518 - 2 *pour nos élèves*

A – *transmis par Raphaël Sinteff - Nancy*
Soit la suite u définie par

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 5u_n + 8 \end{cases}$$

1. Pour $n \geq 2$, déterminer les trois premiers chiffres en partant de la droite du terme général u_n.
2. Déterminer le nombre de chiffres du terme u_{2016}.



B – *pioché de-ci, de-là*
Pour lequel des ces deux assemblages de quatre disques unité, la ligne d'enceinte est-elle la plus courte ?

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Bernard Collignon (Coursan), Michel Sarrouy (Mende), Jean Fromentin (Niort), Raymond Heitz (Névez).

A – Voici la solution de Bernard Collignon.

1) Chiffres finaux de u_n :
Calcul des premiers termes de u :

n	0	1	2	3	4	5
u_n	3	23	123	623	3123	15623

Démontrons par récurrence sur n que pour tout $n \geq 2$ les trois derniers chiffres de u_n sont :

$$\begin{cases} 123 \text{ si } n \text{ est pair} \\ 623 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

C'est-à-dire encore que : $\forall p \in \mathbb{N}^* \begin{cases} u_{2p} \text{ se termine par } 123 \\ u_{2p+1} \text{ se termine par } 623 \end{cases}.$

• ***Initialisation :*** vrai pour $p = 1$.
En effet, on a : $u_2 = 123$ et $u_3 = 623$.
• ***Hérédité :***
On suppose que pour $p \in \mathbb{N}^*$, u_{2p} se termine par 123 et u_{2p+1} se termine par 623.
On peut donc écrire : $u_{2p} = k_{2p} \times 10^3 + 123$ avec $k_{2p} \in \mathbb{N}^*$ et $u_{2p+1} = k_{2p+1} \times 10^3 + 623$ avec $k_{2p+1} \in \mathbb{N}^*$.
On en déduit :

$$u_{2(p+1)} = u_{2p+2} = 5\, u_{2p+1} + 8 = 5\,(k_{2p+1} \times 10^3 + 623) + 8 = 5\, k_{2p+1} \times 10^3 + 3123$$

Soit : $u_{2p+2} = k_{2p+2} \times 10^3 + 123$ avec $k_{2p+2} = 5k_{2p+1} + 3$ et donc $k_{2p+2} \in \mathbb{N}^*$ et u_{2p+2} se termine par 123 .

D'autre part :

$$u_{2(p+1)+1} = u_{2p+3} = 5\, u_{2p+2} + 8 = 5\,(k_{2p+2} \times 10^3 + 123) + 8 = 5\, k_{2p+2} \times 10^3 + 623$$

Donc : $u_{2p+3} = k_{2p+2} \times 10^3 + 623$ avec $k_{2p+3} = 5\, k_{2p+2} +$ et donc $k_{2p+3} \in \mathbb{N}^*$ et u_{2p+3} se termine par 623.
L'hérédité est bien vérifiée et le résultat est donc établi pour tout entier $p \geq 1$.

2) *Nombre de chiffres du terme* u_{2016}
Démontrons en préliminaire par récurrence sur n que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 5^{n+1} - 2 \qquad (1)$$

- ***Initialisation :*** La relation est vérifiée pour $n = 0$ car $u_0 = 5^1 - 2$.
- ***Hérédité :*** Supposons que pour $n \in \mathbb{N}, u_n = 5^{n+1} - 2$, alors :

$u_{n+1} = 5u_n + 8 = 5\left(5^{n+1} - 2\right) + 8 = 5^{n+2} - 10 + 8 = 5^{n+2} - 2$ donc l' hérédité est vérifiée.

Finalement , la relation (1) est bien vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $5^n < u_n < 5^{n+1}$ et donc que l'on a :

$$5^{2016} < u_{2016} < 5^{2017}.$$

Le nombre de chiffres de tout entier naturel x est donné par la fonction f définie pour tout réel $x > 0$ par : $f(x) = \text{Ent}(\log(x)) + 1$, où la fonction Ent désigne la fonction partie entière d'un nombre réel et la fonction log désigne la fonction logarithme décimal, ces deux fonctions étant croissantes sur $]0;+\infty[$.

La fonction f est croissante par composition de fonctions croissantes donc :

$$f\left(5^{2016}\right) \leq f\left(u_{2016}\right) \leq f\left(5^{2017}\right).$$

Avec une calculatrice on obtient :

$$f\left(5^{2016}\right) = \text{Ent}\left(\log\left(5^{2016}\right)\right) + 1 = \text{Ent}\left(2016\log(5)\right) + 1 = 1410,$$

$$f\left(5^{2016}\right) = \text{Ent}\left(\log\left(5^{2016}\right)\right) + 1 = \text{Ent}\left(2016\log(5)\right) + 1 = 1410,$$

On en déduit puisque la fonction f est croissante : $f\left(u_{2016}\right) = 1410$.

Cela signifie que le terme u_{2016} a une écriture décimale de 1410 chiffres et se termine par 123.

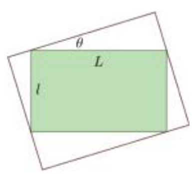
B – Voici la solution photographiée de Michel Sarrouy.

Matériel.

Les lignes d'enceinte ont la même longueur.

Nota. Naturellement, Michel Sarrouy fournit également la justification mathématique, mais hélas la marge trop étroite…

Exercice 518 – 3 : Paul-Alain Bonvert – Alfa du Ginseng



Un rectangle de longueur L et de largeur l étant donné, déterminer le plus grand rectangle circonscrit (en aire).

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Bernard Collignon (Coursan), Michel Sarrouy (Mende), Jean Couzineau (Massy-Palaiseau), Jean Fromentin (Niort), Raphaël Sinteff (Nancy), Raymond Heitz (Névez).

– Voici la solution de Jean Fromentin.
Les sommets du rectangle circonscrit au rectangle de base se déplacent sur les demi-cercles de diamètre les côtés de ce dernier.
L'aire du rectangle circonscrit est la plus grande lorsque l'aire des quatre triangles rectangles accolés au rectangle grisé est la plus grande possible.
Les hypoténuses de ces triangles rectangles sont constantes. Leurs aires sont donc maximum pour les hauteurs relatives aux hypoténuses maximum, ce qui est le cas lorsque ces triangles rectangles sont isocèles et donc lorsque le rectangle circonscrit est un carré.

Exercice 518 – 4 : Michel Lafond – Dijon *Courbe en polaire*

Soit $n > 2$ un entier.

On pose $\omega = \dfrac{\pi(n+2)}{2n}$ et on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x.
À quoi ressemble la courbe plane d'équation polaire

$$\rho(\theta) = \frac{\sin\omega}{\sin\left(\omega - \theta + \dfrac{2\pi}{n}\left\lfloor \dfrac{n\cdot\theta}{2\pi} \right\rfloor\right)} \qquad \theta \in [0, 2\pi] \quad ?$$

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Bernard Collignon (Coursan).

– Voici la solution de Pierre Renfer.

Le changement de valeur pour la partie entière de la formule a lieu pour $\theta = \dfrac{2k\pi}{n}$, avec $0 \le k \le n$.

En ces valeurs $\theta_k = \dfrac{2k\pi}{n}$, la fonction prend la valeur 1 et elle est continue

(C'est évident pour la continuité à gauche et d'autre part : $\lim\limits_{\theta \to \theta_k} \rho(\theta) = \dfrac{\sin\omega}{\sin\omega} = 1$).

Les points particuliers ainsi obtenus sont les sommets du polygone régulier U_n des racines n-ièmes de l'unité.
Pour $\theta_k \le \theta < \theta_{k+1}$:

$$\rho(\theta) = \frac{\sin\omega}{\sin(\omega - \theta + \theta_k)} = \frac{\sin\omega}{\sin(\omega + \theta_k) - \cos\theta - \cos(\omega + \theta_k) \cdot \sin(\theta)}$$

Donc :

$$\sin(\omega + \theta_k) \cdot \rho(\theta) \cdot \cos\theta - \cos(\omega + \theta_k) \cdot \rho(\theta) \cdot \sin(\theta) = \sin\omega \qquad (1)$$

En coordonnées cartésiennes l'équation (1) s'écrit :

$$\sin(\omega + \theta_k) \cdot x - \cos(\omega + \theta_k) \cdot y = \sin\omega.$$

On reconnaît une équation de droite.

La courbe décrite est la réunion des segments reliant les sommets consécutifs de U_n.

Remarque.
Un fichier GeoGebra de la courbe est disponible sur

https://www.geogebra.org/m/ZPg25Hft .