Autour des sommes

Quang-Thai NGO(*)

Au Vietnam, il faut passer un examen pour entrer en Sixième.
Dans l'épreuve de mathématiques, les élèves rencontrent souvent des sommes telles que

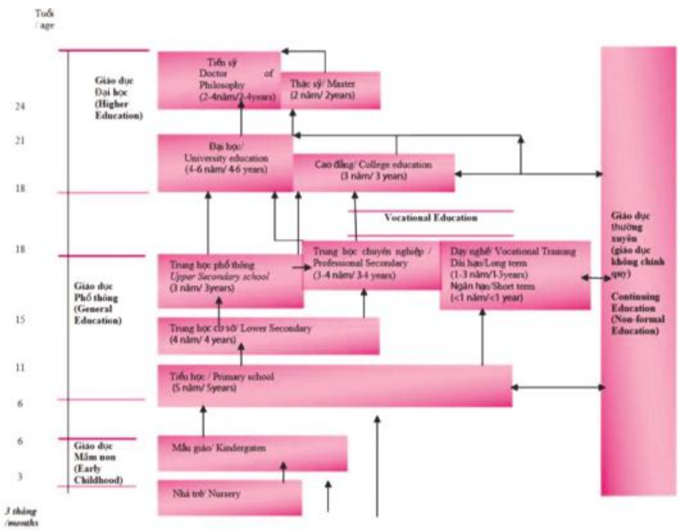
$$T_n = 1 + 2 + \ldots + n,\ U_n = 1 \times 2 + 2 \times 3 + \ldots + n \times (n + 1),$$

$$W_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2, \text{ etc.}$$

qui sont au programme. Ces exercices se résolvent à l'aide des méthodes de **regroupage**, de **somme télescopique** ou de **différence décalée**. Nous proposons dans cet article des activités bâties autour de ces trois idées simples et efficaces.

1. Le système éducatif vietnamien

Le système éducatif vietnamien ressemble en beaucoup de points à l'école française. Comme pour le modèle français, le cursus classique est scindé en trois parties :
– L'école primaire (7 200 000 élèves, 15 361 écoles)
– Le collège (4 800 000 élèves, 10 847 établissements)
– Le lycée (2 700 000 élèves, 2 708 lycées).



Le nombre d'élèves et d'étudiants représente environ un quart de la population vietnamienne (90 millions d'habitants). Les écoles primaires sont gratuites et l'éducation est obligatoire de 6 à 14 ans.

Jusqu'à la fin du collège, tous les élèves suivent un programme national commun. À partir du lycée, ils peuvent suivre trois filières : formation de base ; programme

(*) lucchicama@yahoo.fr

renforcé en sciences ; programme renforcé en sciences humaines. Ici, il existe deux types de lycées : le lycée général et le lycée d'élite où on entre par un concours difficile. À la fin de l'année scolaire, les élèves sont répartis, en fonction de leurs résultats, entre les classes générales et les classes d'excellence. En théorie, les élèves peuvent passer d'une classe à une autre, mais en réalité c'est très rare.

C'est le Ministère de l'Éducation et de la Formation (MEF) qui définit et développe les programmes. Mais à la différence de la France, les enseignants n'ont pas accès à ces documents qui ne sont disponibles qu'aux rédacteurs de manuels. Par conséquent, il n'y a pas plusieurs manuels concurrents comme en France. À chaque niveau, il n'y a qu'un seul manuel.

Une autre différence importante vient du fait que l'enseignement mathématique au Vietnam est organisé autour de deux grands thèmes : la géométrie (hinh hoc) et l'algèbre (so hoc, qui regroupe les nombres, les fonctions, les statistiques et les probabilités).

Malgré le manque de moyens, les efforts constants du Vietnam ont permis d'obtenir une performance éducative élevée. Le pays se classe parmi les 20 premiers au classement PISA 2012. En mathématique, le score du Vietnam est de 511 contre 494 pour la moyenne de l'OCDE.

2. Comment sont introduites les suites aux élèves ?

Au Vietnam, la droite graduée est très souvent mobilisée pour représenter les nombres réels :

À cette occasion, les élèves vietnamiens rencontrent les pointillés. Ils les utilisent également lors de la division infinie et des nombres décimaux illimités périodiques : $\frac{1}{3} = 0{,}33\ldots$ L'écriture utilisant des pointillés « … » signifie une succession de nombres ou de chiffres. Citons un exemple d'exercice :

Exercices : Comparez les nombres réels suivants :
a) 0,123 et 0,123123…. ;

b) 0,(01) et 0,01001000100001… (*avec* $0{,}\overline{01} = 0{,}010101\ldots$ *que l'on peut aussi noter* 0,01)

En ce qui concerne les suites, aucune définition formelle n'est donnée. Voici une activité d'introduction :

Activité : progression régulière
Voici deux progressions régulières : 1°) 5, 10, 15, … 2°) 3, 7, 11, … Donner trois termes qui suivent ces deux suites.

1°) Comme 10 – 5 = 5 et 15 – 10 = 5, l'écart entre deux termes est 5. Par conséquent, les trois termes suivants de la première progression sont :

15 + 5 = 20
20 + 5 = 25
25 + 5 = 30

Notre progression est donc : 5, 10, 15, 20, 25, 30.

2°) Comme 7 – 3 = 4 et 11 – 7 = 4, l'écart entre deux termes est 4. Par conséquent, les trois termes suivants de la deuxième progression sont :

11 + 4 = 15
15 + 4 = 19
19 + 4 = 23

Notre progression est donc : 3, 7, 11, 15, 19, 23.

Activité : Nombre de termes

1°) Compléter le tableau suivant :

Suites	Nombre de termes	Calcul $\dfrac{\text{dernier terme} - \text{premier terme}}{\text{écart entre deux termes}} + 1$
2, 5, 8, 11		
2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23,26		
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37		

2°) Considérons la suite : 11, 14, 17, ..., 68.
a- Combien y a-t-il de termes ?
b- Sachant que 11 est le premier terme, quel est le 1 996^{e} terme ?
3°) Si nous écrivons tous les nombres pairs de 2 jusqu'à 1 998, combien y a-t-il de termes ?

1°) On a :

Suites	Nombre de termes	Calcul $\dfrac{\text{dernier terme} - \text{premier terme}}{\text{écart entre deux termes}} + 1$
2, 5, 8, 11	4	$(11-2)/3+1=4$
2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23,26	9	$(26-2)/3+1=9$
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37	19	$(37-1)/2+1=19$

2°) a- On a : 14 – 11 = 3, 17 – 14 = 3.
Ainsi l'écart entre deux termes est 3.
Appliquons la formule : (68 – 11): 3 + 1 = 20, il y a donc 20 termes.
b- Écrivons :
Premier terme : 11
Deuxième terme : 14 = 11 + 3 = 11 + (2 – 1) × 3

Troisième terme : 17 = 11 + 6 = 11 + (3 – 1) × 3
Quatrième terme : 20 = 11 + 9 = 11 + (4 – 1) × 3
…
1996^e^ terme : 11 + (1996 – 1) × 3 = 5 996.

3°) L'écart entre deux termes est 2, le premier est 2 et le dernier 1 998.

Appliquons $\dfrac{\text{dernier terme} - \text{premier terme}}{\text{écart entre deux termes}} + 1 = \dfrac{1996}{2} + 1 = 999.$

Propriété 1. Soit donnée une progression régulière avec des termes consécutifs. Alors le nombre de termes est donné par la formule :

$$\frac{\text{dernier terme} - \text{premier terme}}{\text{écart entre deux termes}} + 1.$$

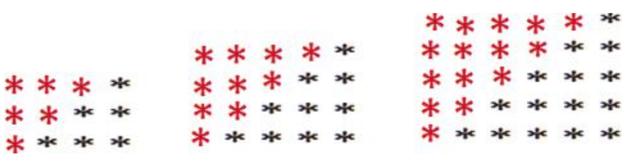
3. Méthode de regroupage

Activité : les nombres triangulaires

1°) Sur les dessins suivants, les alignements de * forment un triangle. Compléter le tableau :

Dessins	Nombres de lignes	Nombres de *	Calcul $n \cdot (n+1)/2$
…* * * * * *	3		$3 \times 4/2$
* * * * * * * * * *			$4 \times 5/2$
* * * * * * * * * * * * * * *			$5 \times 6/2$
	6		$6 \times 7/2$

2°) En plaçant deux configurations triangulaires de base n l'une sur l'autre, vérifier que $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$



3°) Calculer T_{63}.

Propriété 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors : $\mathrm{T}_n = 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Preuve : Regroupons les nombres 1, 2, …, n – 1 et n entre eux de la manière suivante :

- 1 va avec n
- 2 va avec n – 1
- 3 va avec n – 2
- etc.

Lorsque n est pair, on remarque que : $1 + n = 2 + n - 1 = 3 + n - 2 = \ldots = \dfrac{n}{2} + \left(\dfrac{n}{2} + 1\right)$.

C'est le nombre d'équilibre. Dans ce cas, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_n &= (1+n) + (2 + (n-1)) + \cdots + \left(\frac{n}{2} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\right)\\ &= ((n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1))\\ &= \frac{n(n+1)}{2} \text{ car il y a } \frac{n}{2} \text{ termes } (n+1)\end{aligned}$$

Lorsque n est impair, alors n – 1 est pair. Dans ce cas, on a : $\mathrm{T}_{n-1} = \dfrac{(n-1)n}{2}$.

D'où : $\mathrm{T}_n = \mathrm{T}_{n-1} + n = \dfrac{(n-1)n}{2} + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Cette preuve a été utilisée par Gauss à l'âge de 7 ans.

Méthode 1. Comment calculer la somme d'une progression régulière ?

La preuve précédente nous donne une méthode pour calculer la somme d'une progression régulière. Elle consiste à regrouper des termes. On procède en plusieurs étapes :

1°) Vérifier qu'on a bien une progression régulière.
2°) Regrouper le premier terme et le dernier terme pour obtenir le nombre d'équilibre $\mathrm{Nb}_{\text{équilibre}}$.
3°) Chercher le nombre de termes qui est donné par la formule :

$$\mathrm{Nb}_{\text{termes}} = \frac{\text{dernier terme} - \text{premier terme}}{\text{écart entre deux termes}} + 1.$$

4°) La somme cherchée est égale à : $\dfrac{\mathrm{Nb}_{\text{termes}} \times \mathrm{Nb}_{\text{équilibre}}}{2}$.

Exemple :
Calculer S = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 +11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 + 29.
1°) On a bien une progression régulière puisque l'on a une progression de 2 en 2.
2°) On constate que : 1 + 29 = 30, 3 + 27 = 30, 5 + 25 = 30, etc.
Le nombre d'équilibre est donc : $\mathrm{Nb}_{\text{équilibre}} = 30$.

3º) Le nombre de termes est donné par la formule : $\mathrm{Nb}_{\text{termes}} = \frac{29-1}{2}+1.$.

Quand on a une petite somme comme ici, on peut se contenter de compter le nombre de termes. Et effectivement, il y en a bien 15.

4º) $\frac{\mathrm{Nb}_{\text{termes}} \times \mathrm{Nb}_{\text{équilibre}}}{2} = \frac{15\times 30}{2} = 225.$

Exercices : Calculer les sommes suivantes :
1º) $1+2+3+\cdots+2015+2016$; 2º) $101+103+\cdots+997+999$;
3º) $2+4+6+8+\cdots+2n$; 4º) $1+3+5+\cdots+(2n+1)$;
5º) $1+4+7+10+\cdots+2005$; 6º) $2+5+8+\cdots+2006$; 7º) $1+5+9+\cdots+2001$.

4. Somme télescopique

Activité : Les dominos

Soient a et des entiers naturels.

1º) Vérifier que : $\frac{1}{a}-\frac{1}{a+n}=\frac{n}{a(a+n)}$.

2º) Calculer la somme $\mathrm{A}=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{2015.2016}$.

Méthode 2. La méthode des dominos ou des différences finies

Lorsqu’on étudie une somme $\mathrm{S}_n = d_1+d_2+\cdots+d_n$, il est parfois utile de décomposer les termes d_k sous la forme d’une différence :

$$d_1 = a_2 - a_1,\ d_2 = a_3 - a_2,\ \ldots,\ d_n = a_{n+1} - a_n.$$

Par télescopage, on obtient : $\mathrm{S}_n = d_1+d_2+\cdots+d_n = a_{n+1}-a_1$.

La difficulté réside dans la décomposition sous forme de différence finie. Pour la lever, on pourrait faire une analogie avec l’analyse et remarquer que :

$d_k = \frac{a_k - a_{k-1}}{k-(k-1)} = a_k - a_{k-1}$	$\sum_{k=1}^{n} d_k = a_n - a_0$
$f(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(x-h)}{x-(x-h)}=\mathrm{F}'(x)$	$\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(n)-\mathrm{F}(0)$

Voyons un exemple d’utilisation :

Exemple : Calculer $\mathrm{T}_n = 1+2+\cdots+n$ avec une somme télescopique.

On introduit la fonction $f(x) = x$.

Une primitive d’une fonction polynôme du premier degré est de la forme $\mathrm{F}(x) = ax^2 + bx + c$.

Cherchons a, b et c tels que : $f(x) = \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x-1) \Leftrightarrow 2ax - a + b = x \Leftrightarrow a = b = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi : $\mathrm{T}_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = \mathrm{F}(n) - \mathrm{F}(0) = \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Bien évidemment, l'élève de CM2 ou de Sixième au Vietnam n'utilisera pas le calcul intégral, il sera guidé pas à pas.
Par contre, il peut utiliser certaines formules pour trouver une différence finie :

Forme des termes	Décomposition	Exemples
$3kn(n+k)$	$n(n+k)(n+2k)$ $-(n-k)n(n+k)$	$1\times2+2\times3+\cdots+97\times98$ $1\times3+3\times5+\cdots+97\times99$
$4kn(n+k)(n+2k)$	$n(n+k)(n+2k)(n+3k)$ $-(n-k)n(n+k)(n+2k)$	$1\cdot3\cdot5+3\cdot5\cdot7$ $+\cdots+95\cdot97\cdot99$
n^2	$(n-a)(n+a)+a^2$ $n(n+1-n)$	$1^2+2^2+\cdots+100^2$ $1^2+3^2+\cdots+99^2$
n^3	$(n-2)n(n+2)+4n$	$1^3+3^3+5^3+\cdots+99^3$
$\dfrac{a}{n(n+a)}$	$\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+a}$	$\dfrac{1}{25\cdot27}+\dfrac{1}{27\cdot29}+\cdots+\dfrac{1}{73\cdot75}$
$\dfrac{2a}{n(n+a)(n+2a)}$	$\dfrac{1}{n(n+a)}-\dfrac{1}{(n+a)(n+2a)}$	$\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\dfrac{1}{18\cdot19\cdot20}$

Exemple : Calculer $\mathrm{U}_n = 1\times2+2\times3+\cdots+n\times(n+1)$.

Utilisons la première formule du tableau précédent avec $k = 1$:

$$3n(n+1) = n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1).$$

Multiplions U_n par 3, nous obtenons :

$$\begin{aligned}3\mathrm{U}_n &= 1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot3+3\cdot4\cdot3+\cdots+n(n+1)\cdot3\\ &= 1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot(4-1)+3\cdot4\cdot(5-2)+\cdots+n(n+1)\cdot(n+2-(n-1))\\ &= 1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4-1\cdot2\cdot3+3\cdot4\cdot5-2\cdot3\cdot4+\cdots-(n-1)n(n+1)+n(n+1)(n+2)\\ &= n(n+1)(n+2).\end{aligned}$$

D'où : $\mathrm{U}_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Exemple : $\mathrm{B} = 1\times3+3\times5+\cdots+97\times99$.

Utilisons de nouveau la formule

$$3kn(n+k) = n(n+k)(n+2k) - (n-k)n(n+k)$$

avec $k = 2$:

$$6n(n+2) = n(n+2)(n+4) - (n-2)n(n+2).$$

Multiplions B par 6, nous obtenons :

$$\begin{aligned}6\cdot \mathrm{B} &= 1\cdot 3\cdot 6+3\cdot 5\cdot 6+5\cdot 7\cdot 6+\cdots+97\cdot 99\cdot 6\\ &= 1\cdot 3\cdot(5+1)+3\cdot 5\cdot(7-1)+5\cdot 7\cdot(9-3)+\cdots+97\cdot 99\cdot(101-95)\\ &= 1\cdot 3\cdot 5+1\cdot 3+3\cdot 5\cdot 7-1\cdot 3\cdot 5+5\cdot 7\cdot 9-3\cdot 5\cdot 7+\cdots+97\cdot 99\cdot 101-95\cdot 97\cdot 99\\ &= 3+97\cdot 99\cdot 101\end{aligned}$$

D'où $\mathrm{B}=\dfrac{1+97\cdot 33\cdot 101}{2}=161\,651.$

Exemple : Calculer $\mathrm{S}=\dfrac{1}{10\times 11}+\dfrac{1}{11\times 12}+\cdots+\dfrac{1}{99\times 100}$.

Remarquons que : $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$, d'où

$\mathrm{S}=\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{100}=\dfrac{9}{100}=0{,}09.$

Exemple : Calculer $\mathrm{V}_n=1^2+2^2+\cdots+n^2$.

On a :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}_n &= 1^2+2^2+\cdots+n^2\\ &= 1\cdot 1+2\cdot 2+\cdots+n\cdot n\\ &= 1\cdot(2-1)+2\cdot(3-1)+\cdots+n\cdot(n-1)\\ &= \mathrm{U}_n-\mathrm{T}_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.\end{aligned}$$

Exercices : Calculer les sommes suivantes :

1º) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{100\cdot 101}$; 2º) $\dfrac{2}{1\cdot 3}+\dfrac{2}{3\cdot 5}+\dfrac{2}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{2}{99\cdot 101}$;

3º) $\dfrac{3}{1\cdot 4}+\dfrac{3}{4\cdot 7}+\dfrac{3}{7\cdot 10}+\cdots+\dfrac{3}{301\cdot 304}$; 4º) $\dfrac{1}{1\cdot 6}+\dfrac{1}{6\cdot 11}+\dfrac{1}{11\cdot 16}+\cdots+\dfrac{1}{496\cdot 501}$;

5º) $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{37\cdot 38\cdot 39}$;

6º) Trouver x tel que : $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{10}+\cdots+\dfrac{2}{x(x+1)}=\dfrac{1998}{2000}$.

5. Différence décalée

Activité : Une somme de puissances

On pose $\mathrm{S}=2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5+\cdots+2^{15}$.
Doubler cette somme S : écrire 2S et montrer que $2\mathrm{S}-\mathrm{S}=2^{16}-1$.
En déduire S.

Propriété 3. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, alors : $1+x+x^2+\cdots+x^n = \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$.

Preuve : Posons $S = 1+x+x^2+\cdots+x^n$. Alors : $x \cdot S - S = x^{n+1}-1$.

Méthode 3: Comment calculer une somme contenant des puissances q^n ?

Lorsqu'on étudie une somme S contenant des puissances q^n, il est commode d'utiliser une différence décalée

$$q \cdot S - S.$$

Le tableau suivant donne une idée sur quelle différence décalée on peut utiliser :

Forme de la somme	**Différence décalée**
Formule classique : $S = 1+a+a^2+\cdots+a^n$	$aS - S$
Puissance paire : $S = 1+a^2+a^4+\cdots+a^{2n}$	$a^2S - S$
Puissance impaire : $S = 1+a^3+a^5+\cdots+a^{2n+1}$	$a^2S - S$

Exercices : Calculer les sommes suivantes :

1°) $1+3+3^2+\cdots 3^{100}$.

2°) $4+4^2+4^3+\cdots 4^n$.

3°) $1+5+5^2+\cdots 5^{2000}$.

4°) $3+3^2+3^3+\cdots 3^{2005}$.

5°) $7+7^3+7^5+\cdots 7^{1999}$.

6°) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots\dfrac{1}{2^{99}}+\dfrac{1}{2^{100}}$.

7°) $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots\dfrac{1}{3^{99}}+\dfrac{1}{3^{100}}$.

8°) $\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5^2}+\dfrac{3}{5^3}+\cdots\dfrac{k}{5^k}+\cdots+\dfrac{11}{5^{11}}$.