Une variante directe pour la suite des « non-carrés »

ÉricTrotoux(*)

Nous allons retrouver les résultats particuliers obtenus dans l'article sans utiliser (bien que les arguments soient de même nature) le théorème de Bakir Fahri.

En reprenant les notations du § III de l'article du BV 515 (p. 466) :

v est la suite des non-carrés, $v_n = k$ équivaut à $n = k - \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$ ou aussi en posant $r = \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$, $k = n + r$. Par suite, (k n'étant pas un carré) nous avons

$$r^2 < n + r < (r+1)^2 \qquad (1).$$

Tous les membres étant entiers, nous avons les inégalités équivalentes :

$$r^2 - r + 1 \leq n < (r+1)^2 - (r+1) + 1$$

ou aussi après avoir posé $x^2 - x + 1 = \varphi(x)$,

$$\varphi(r) \leq n < \varphi(r+1) \qquad (2).$$

φ définit une bijection strictement croissante de $[1,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$ dont la bijection réciproque est donnée par

$$\varphi^{-1}(x) = \frac{1}{2} - \sqrt{x - \frac{3}{2}}.$$

D'après (2) nous obtenons les inégalités équivalentes :

$$r \leq \varphi^{-1}(n) < r + 1$$

qui impliquent

$$r = \left\lfloor \varphi^{-1}(n) \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{n - \frac{3}{4}} \right\rfloor.$$

D'après (1) nous avons :

$$n \leq (r+1)^2 - (r+1) < \left(r + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Nous en déduisons $\sqrt{n} < r + \frac{1}{2}$, puis, $\sqrt{n} + \frac{1}{2} < r + 1$. En reprenant ce qui précède nous obtenons les inégalités :

(*) Mel : eric.trotoux@orange.fr

$$r = \lfloor \varphi^{-1}(n) \rfloor = \left\lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{n - \frac{3}{4}} \right\rfloor.$$

d'où il vient

$$r = \left\lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{n - \frac{3}{4}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{n} \right\rfloor.$$

Nous prouvons maintenant que :

$$\frac{1}{2} + \sqrt{n - \frac{3}{4}} < \sqrt{n + \sqrt{n}} < \frac{1}{2} + \sqrt{n}.$$

Dans $\mathbb{R}^+$ cela équivaut à prouver en passant aux carrés que :

$$n - \frac{3}{4} + \sqrt{n - \frac{3}{4}} + \frac{1}{4} < n + \sqrt{n} < n + \sqrt{n} + \frac{1}{4} \qquad (3).$$

Or ces deux inégalités (3) sont vraies car $n - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} < n$ et $\sqrt{n - \frac{3}{4}} < \sqrt{n}$ pour la première et, pour tout x, $x < x + \frac{1}{4}$ pour la seconde.

De tout cela, nous concluons que :

$$r \le \frac{1}{2} + \sqrt{n - \frac{3}{4}} < \sqrt{n + \sqrt{n}} < \frac{1}{2} + \sqrt{n} < r + 1.$$

Ainsi,

$$\forall a \in \left[-\frac{3}{4}, 0 \right], r = \left\lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{n + a} \right\rfloor = \sqrt{n + \sqrt{n}},$$

puis

$$v_n = n + \left\lfloor \sqrt{n + \sqrt{n}} \right\rfloor.$$